LOS NÚMEROS SE RELACIONAN

Teresa Fernández
I.S.F.D.y T. Nª 39. Vicente López. Buenos Aires. Argentina
terfer@gmail.com
Nivel Medio

Resumen
La *familia* de los números enteros es muy grande, inmensa. En ella conviven infinitos (y numerables, es decir, *contables*) miembros que, aunque pueda parecer curioso tratándose de una familia, nunca nacieron y nunca morirán. Siempre han estado ahí y ahí continuarán.
Todos ellos son importantes y también todos ellos pueden ser útiles en cierto momento. Pero al fin y al cabo nuestra existencia es finita, terminará. Este hecho unido al carácter infinito de los números enteros hace que resulte imposible encontrarse con todos, que sea inviable conocer a todos los miembros de esta *familia*.
Uniendo estos dos hechos es evidente que muchos números grandes quedarán fuera de nuestro alcance en el sentido de que no tendremos el placer de tenerlos delante.
Pero sí podemos conocer las relaciones existentes entre esos números. Estas relaciones pueden ser generadas por distintas propiedades de ellos, por su conexión con otros, por ser soluciones de distintas ecuaciones…por ser simplemente famosos.
Pero los que hoy presentaré son los números que se conectan entre sí por características, en su mayor parte, de divisibilidad.
"¿Qué puede haber más bello que una relación profunda y satisfactoria entre números enteros? Ocupan un rango elevado en los dominios del pensamiento puro y de la estética por encima de sus cofrades menores: los números reales y complejos." (Manfred Schroeder)
Palabras clave: Número- clasificación-divisibilidad- relaciones.

Introducción

Pitágoras es el primero en considerar que el universo es una obra sólo descifrable a través de las matemáticas. Fueron los pitagóricos los primeros en sostener la forma esférica de la tierra y postular que ésta, el sol y el resto de los planetas conocidos, no se encontraban en el centro del universo, sino que giraban en torno a una fuerza simbolizada por el número uno.
Primero es la unidad, que cada cosa depende de que sea una, y ése es el principio del uno: que cada algo sea de una cierta manera el todo de si o un punto. Pero lo reiterado ya es otro, no igualdad, sino diferencia, que es lo segundo o el dos. El tercero deriva la relación y superficie. El cuarto, el tránsito de la superficie a la solidez que representa la pluralidad, la suma de 1, 2, 3 y 4 da 10 (tetraktys), la década, que representa la armonía, cuyo contenido es la progresión lógica que lleva a ella, y desde la cual se reinicia todo movimiento.
El número regía el universo de los pitagóricos. No era el número en el moderno sentido de la palabra: era el número natural, también llamado entero, el que reinaba soberanamente...
De los muchos descubrimientos sobre aritmética que se les atribuyen en algunos la visión geométrica juega un papel fundamental para encontrar y "probar" resultados aritméticos y algebraicos. Es posible representar a los números por medio de puntos arreglados con cierto orden geométrico clasificándolos en triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, etc. También se encuentran sus estudios de los números pares e impares y de los números primos y de los cuadrados, esenciales en la teoría de los números. Desde este punto de vista

aritmético, cultivaron el concepto de número, que llegó a ser para ellos el principio crucial de toda proporción, orden y armonía en el universo.
Evidentemente en esa época empezó el estudio de la relaciones entre números, teniendo en cuenta sus divisores, su formación o sus propiedades.
De aquí en adelante, esta comunicación tratará de ser un breve compendio de algunas de esas relaciones.
Si consideramos los números y sus divisores, definimos los siguientes:
-***Número primo*** tiene sólo como divisores a la unidad y a sí mismo, como vimos en el módulo anterior;
-***Números primos gemelos*** Son aquellos números primos que solo difieren en 2 unidades.
Por ejemplo: 3 y 5; 11y 13.
-***Números casi primos***: son aquellos que resultan del producto de dos números primos.
Por ejemplo: 91=7. 13
- ***Número perfecto***: Se denomina así cuando la suma de los divisores propios es igual al número, esto es $s(n) = n$. Un ejemplo de ellos es 6 , ya que sus divisores son: 1, 2,3, y su suma da 6.
-***Número semiperfecto:*** todo número natural que es igual a la suma de algunos de sus divisores propios. Por ejemplo, 18 es semiperfecto ya que sus divisores son 1, 2, 3, 6, 9 y se cumple que 3+6+9=18.
-***Número multiperfecto:*** Es aquel en el cual se verifica $\sigma(n) = k.n$, o sea que la suma de todos sus divisores es múltiplo del número. (k es un número natural>1) Por ejemplo:
$\sigma(120)=1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60+120=360=3.120$. -

También tenemos números que siguen determinada fórmula de formación:
-***Número de Mersenne:*** todo número natural de la forma 2^p-1, siendo p un número primo. Si ese número resulta ser primo se denomina **primo de Mersenne.** Una buena manera de buscarlos, es ir probando las distintas potencias de 2. Por ejemplo**,** $\mathbf{2^3= 8}$ y **8-1= 7**, luego **7** es un primo de Mersenne. $\mathbf{2^5=32}$ y **32-1 = 31**, entonces **31** es un primo de Mersenne.
- Todos los ***números perfectos pares*** son de la forma $[2^{p-1}.\ (2^p-1)]$, donde p y 2^p-1 son números primos. Los números perfectos son producto de un primo de Mersenne y una potencia de 2.
-***Números amigos:*** dos números a y b son amigos si $s(a) = b$ y $s(b)=a$ por ejemplo 220 y 284
$s(220)=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$
$s(284)=1+2+4+71+142=220$
Existen alrededor de 1200 pares de números amigos conocidos; los ya mencionados, y también 111448537712 y 118853793424,
Los pares más grandes que se conocen contienen 152 dígitos.
Existen varios métodos para hallarlos. El más conocido es el siguiente:
$A = 3 \cdot 2^x - 1$
$B = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$
$C = 9 \cdot 2^{2x-1} - 1$
Si x>1, y los números A, B y C son primos, entonces $2^x A.B$ y $2^x.C$ constituyen un par de números amigables.
Ejemplo:
X = 4, entonces A = 47 , B = 23, y C = 1151, los cuales son primos. Luego:

2^x A.B =24 .47.23 = 17296
2^x.C = 24 .1151 = 18416.
Y ambos son números amigos.

- ***Número deficiente*** es aquel cuyo valor es menor que la suma de sus divisores propios; esto es s(n) < n.

Por ejemplo18 < 1+2+3+6+9

Los números primos son siempre deficientes ya que s(n)=1

-***Número abundante*** es aquel cuyo valor es mayor que la suma de sus divisores propios; esto es: $s(n) > n$

Por ejemplo 10 > 1+2+5

-***Número raro:*** todo número natural que es abundante pero que no es igual a la suma de ningún subconjunto de sus divisores propios. Por ejemplo, los número 70 y 836 son raros.

-***Números sociables:*** cumplen lo mismo que los números amigos pero en vez de ir en parejas van en grupos más grandes. La suma de los divisores del primer número da el segundo, la suma de los del segundo da el tercero, y así sucesivamente. La suma de los divisores del último da el primer número de la lista.

Por ejemplo los números 12496, 14288, 15472, 14536 y 14264.

Otra clasificación de los números

Al igual que la clasificación pitagórica de los números, hoy día también existe otra que trataremos en este punto.

- ***Número apocalíptico:*** es un número natural *n* que cumple que 2^n contiene la secuencia 666. Por ejemplo, los números 157 y 192 son apocalípticos ya que 2^{157} y 2^{192}, en su expresión decimal, contiene las cifras 666.

Veámoslo para

$2^{157} = 0.1826877046663629.\ 10^{48}$

¿Por qué se nombran así estos números? En la Biblia se cita el número **666** como el número de la Bestia, relacionado habitualmente con *Satanás* o con el *Anticristo*. El origen de esta asociación está en el libro del *Apocalipsis* del Nuevo Testamento:

"Aquí hay sabiduría: El que tiene entendimiento, cuente el número de la bestia, pues es número de hombre. Y su número es seiscientos sesenta y seis" (Ap 13:18).

-***Número ambicioso***: todo número que cumple con lo siguiente: la secuencia formada al sumar sus divisores propios, después los divisores propios del resultado de esa suma, después los del número obtenido…acaba en un número perfecto. Por ejemplo, 25 es un *número ambicioso* ya que sus divisores propios son 1 y 5 y se cumple que 1+5=6, que es un número perfecto.

-***Número automórfico:*** todo número natural *n* tal que n^2 tiene al propio *n* como última cifra. Por ejemplo, 5^2=25 y 6^2=36 son números automórficos, también llamados curiosos.

Otros ejemplos son: 76^2= 5776

625^2= 390625

-***Número trimórfico*** es todo número natural n tal que los últimos dígitos de n^3 son el mismo n. Por ejemplo, 49 es trimórfico pues 49^3=117649.

Continuamos con las relaciones entre números

- ***Cuadrado:*** todo número natural que es el cuadrado de otro número natural. Por ejemplo, 9 es un cuadrado ya que $9=3^2$.
- ***Cubo***: todo número natural que es el cubo de otro número natural. Por ejemplo, 125 es un cubo ya que $125=5^3$.

- ***Número malvado:*** todo número natural cuya expresión en base 2 (binaria) contiene un número par de unos.

  Por ejemplo: 12 y 15 son números malvados ya que $12=1100_2$ y $15=1111_2$.
- ***Número odioso***: todo número cuya expresión en base 2 (binaria) contiene un número impar de unos. Por ejemplo, $11=1011_2$ es un número odioso.
- ***Número feliz:*** todo número natural que cumple que si sumamos los cuadrados de sus dígitos y seguimos el proceso con los resultados obtenidos el resultado es 1. Por ejemplo, el número 203 es un número feliz ya que:

$$2^2+0^2+3^2=13;$$
$$1^2+3^2=10;$$
$$1^2+0^2=1.$$

- ***Número hambriento:*** el k-ésimo número hambriento es el más pequeño número natural *n* que cumple que 2^n contiene los primeros k dígitos de la expresión decimal de Pi. Los primeros números hambrientos son: 5, 17, 74, 144, 144, 2003,…
- ***Número de Fermat:*** todo número natural de la forma $2^{2n}+1$ para algún *n*. Si ese número resulta ser primo se denomina **primo de Fermat**.
- ***Número narcisista:*** todo número de k dígitos que cumple que es igual a la suma de las potencias k de sus dígitos es un número narcisista. Por ejemplo, 153 es un número narcisista de 3 dígitos, ya que $1^3+5^3+3^3=153$.

Hay solo 4 números después de la unidad, que son iguales a la suma de los cubos de sus dígitos: 153, 370, 371 y 407.

Narciso, según la mitología griega se enamoró de su propia imagen reflejada en un estanque, y se convirtió en la flor que ahora lleva su nombre.

Los números narcisistas, enamorados de sí mismos, se definen como aquellos representables por la manipulación matemática de los dígitos de esos números.

Otras relaciones

Invariantes digitales perfectos: Son números enteros mayores que 1, iguales a las sumas de las potencias enésimas de sus dígitos. Un ejemplo de esto son los narcisistas.

$$1634=1^4+6^4+3^4+4^4$$

-***Invariantes digitales recurrentes:*** Si la suma de las potencias enésimas de un número ***n*** es igual a otro número n_1, y la suma de las potencias enésimas de los dígitos de n_1 es igual a otro número n_2, y si tras repetir este procedimiento cierto número de veces se produce el número original **n** entonces **n** es llamado invariante digital recurrente: IDR.

Existen 4 de 3ª orden:

$$55: \; 5^3 + 5^3= 250$$
$$250: 2^3 + 5^3 + 0^3= 133$$
$$133: 1^3 + 3^3 + 3^3 = 55$$

-***Número palindrómico:*** número natural que se lee igual de derecha a izquierda y de izquierda a derecha. Por ejemplo 1348431. (comúnmente llamados: “capicúas”).

-***Número poderoso:*** todo número natural *n* que cumple que si un primo *p* es un divisor suyo entonces p^2 también lo es. Por ejemplo, el número 36 es un número poderoso ya que los únicos primos que son divisores suyos son 2 y 3 y se cumple que 4 y 9 también son divisores de 36.

- ***Número oblongo***: todo número natural que cumple que es el producto de dos naturales consecutivos. Por ejemplo, los números 6 y 30 son números oblongos (*pronic numbers*); ya que

6= 2 . 3 30= 5 . 6

-***Número repunidad:*** todo número natural que está formado solamente por unos: 1, 11, 111, 1111,… . Estos números responden a la fórmula:

$$\frac{10^n - 1}{9},$$

Donde ***n*** da también la cantidad de 1 que posee ese *número repunidad.* Al elevarlos al cuadrado, los repetunos producen capicúas mientras el número de cifras va de 1 a 9, pero a partir de 10 ó más unos, los cuadrados ya no son palindrómicos. Se ha afirmado erróneamente que tan sólo los números primos pueden tener cubo capicúa, mas hay infinitos enteros que prueban la falsedad de tal afirmación, y el menor de ellos es el repetuno 111. Es divisible por 3, y su cubo, 1.367.631, es capicúa

-***Número de Smith***: todo número natural que cumple que la suma de sus dígitos es igual a la suma de los dígitos de sus divisores primos contando su multiplicidad (es decir, el número de veces que aparece cada uno de ellos). Por ejemplo, el número 27 es un número de Smith ya que 2+7=9 y su único divisor primo es 3, que aparece tres veces, y por tanto 3+3+3=9.

-***Número libre de cuadrados***: todo número natural que cumple que en su descomposición en factores primos no aparece ningún factor repetido. Por ejemplo, el número 30 es un número libre de cuadrados.

- ***Número ondulado***: todo número natural de la forma *ababab…*. Por ejemplo, los números 121 y 43434 son números ondulados.

- ***Número Omirp***: Número primo que al invertir sus dígitos da otro número primo.:1597 y 7951 son primos.

-***Número intocable***: todo número natural que no es la suma de los divisores propios de ningún número. Por ejemplo, los número 52 y 88 son números intocables.

- ***Número vampiro***: todo número natural para el cual exista ***una factorización*** formada por lo dígitos del propio número. Por ejemplo, el número 2187 es un número vampiro ya que lo podemos factorizar así:

2187= 27 . 81

La idea de los números vampiros fue introducida por Clifford A. Pickover en 1994.

Los números vampiros verdaderos cumplen cuatro reglas:

1-Tienen un número par de dígitos

2-Se obtienen por el producto de dos números, llamados colmillos, los cuales tienen cada uno la mitad de dígitos que el número vampiro.

3-Tienen los mismos dígitos que los colmillos(y en la misma cantidad)

4-Los colmillos no pueden terminar los dos en cero

Ej : 15 x 93 = 1395

Existen 7 números vampiros verdaderos con 4 dígitos :

1260 = 21 · 60
1395 = 15 · 93
1435 = 35 · 41
1530 = 30 · 51
1827 = 21 · 87
2187 = 27 · 81
6880 = 80 · 86

Carlos Rivera introdujo el concepto de Número **vampiro primo** en el cual los colmillos son números primos:
117067 = 167 · 701
Existen también números vampiros que pueden tener más de un grupo de colmillos:
125460 = 204 · 615 = 246 · 510
Se conoce un vampiro de 70 dígitos que tiene 100.025 pares de colmillos, el número es :
1067781345046160692992979584215948335363056972783128881420721375504640

Curiosidades aritméticas

El número 153 es considerado mágico desde la antigüedad, ya que según la Biblia, es el número de peces de uno de los milagros producidos:
Evangelio según San Juan (Cap. 21, versículo 11). En él se lee que los *discípulos, no habiendo pescado nada durante toda la noche, se disponían a abandonar la tarea, cuando siguiendo el consejo de Jesús, echaron de nuevo la red, la cual cuando Simón Pedro la levantó y trajo a tierra, estaba llena de grandes peces, en número de 153, y siendo tantos, la red no se rompió.*
Desde entonces se le buscaron distintas propiedades numéricas. Por ejemplo se vio que es un número triangular, o sea que la suma de los primeros números naturales (en este caso hasta el 17) da 153.
Otras propiedades:
a- 1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153
b- $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$
c- Otra particularidad encontrada en este número es: se parte de un número cualquiera múltiplo de 3 y se suman los cubos de sus cifras. Al resultado, que también será múltiplo de 3, se aplica la misma operación. Aplicando sucesivamente la misma operación se llega a 153... ¡¡siempre!! Por ejemplo partir de 252.
d- Si el número del cual se parte no es múltiplo de 3, la sucesión de las sumas de los cubos de las cifras se estabiliza en otros números mágicos, que se suelen llamar “agujeros negros”, para indicar que al llegar a ellos no se puede salir más. Ejemplo de ellos son: 407, 370 y 371.
En este caso, el proceso puede terminar en un ciclo, como:
217 $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ 352 $\longrightarrow$ 160 $\longrightarrow$ 217 $\longrightarrow$ 352 ....
Pruébelo con 919 y 136... ¡Y vea qué sucede!

Por último…

El **1729** es el llamado número de Hardy-Ramanujan, que es el más pequeño de los números Taxicab, es decir, el número natural más pequeño que puede ser expresado como la suma de dos cubos positivos de dos formas diferentes: $1729 = Ta(2) = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. El número ***Taxicab n-ésimo*** es el número natural más pequeño que se puede expresar de n formas distintas como suma de dos cubos positivos. Era, según él, ***'un número aburrido'***, agregando que esperaba que no fuese un mal presagio. 'No, Hardy', dijo Ramanujan, 'es un número muy interesante. Es el número más pequeño expresable como la suma de dos cubos [positivos] de dos formas diferentes.”
Actualmente, los números Taxicab son:
Ta(1) = 2
Ta(2) = 1729
Ta (3) = 87539319 = $167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$

Ta(3) = 87539319
Ta(4) = 6963472309248
Ta(5) = 48988659276962496
El Ta(6) no se conoce todavía, aunque hay un 99% de posibilidades de que sea 24153319581254312065344.

-Número cabtaxi, a menudo llamado y notado Cabtaxi(n), es definido como el más pequeño entero que se puede escribir en n maneras o modos diferentes (en un orden de términos aproximados) como suma de dos cubos positivos, nulos o negativos. Los números cabtaxi existen para todo n >= 1; pero solamente 8 de entre ellos son probables:

n	**Ca(*n*)**	**a^3+b^3**
1	1	1,0
2	91	3,4 6,-5
3	728	6,8 9,-1 12,-10
4	2741256	2421,19083 140,-14 168,-126 207,-183
5	6017193	166,113 180,57 185,-68 209,-146 246,-207
6	1412774811	963,804 1134,-357 1155,-504 1246,-805 2115,-2004 4746,-4725
7	11302198488	1926,1608 1939,1589 2268,-714 2310,-1008 2492,-1610 4230,- 4008 9492,-9450
8	137513849003496	22944,50058 36547,44597 36984,44298 52164,-16422 53130,-23184 57316,-37030 97290,-92184 218316,-217350
9	424910390480793000	645210,538680 649565,532315 752409,-101409 759780,-239190 773850,-337680 834820,-539350 1417050,-1342680 3179820,-3165750 5960010,-5956020

Los números Cabtaxi(5), Cabtaxi(6) y Cabtaxi(7) han sido hallados por Randall L. Rathbun; y el Cabtaxi(8) por Daniel J. Bernstein, quien ha demostrado que Cabtaxi(9) >= 1019, mientras que Duncan Moore en el 2005 halló los números que corresponderían a Cabtaxi (9).

Referencias Bibliográficas

Fernández,T; Mendoza S. (2009) Divisibilidad y algo más. Curso virtual dictado en SOREM.