ANÁLISIS DIDÁCTICO DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS. LA DERIVADA COMO CONTEXTO DE REFLEXIÓN

Vicenç Font
Universitat de Barcelona, Catalunya - España
vfont@ub.edu
Nivel Universitario

Resumen
Las nociones de derivada en un punto y de función derivada son tradicionalmente difíciles de comprender para muchos alumnos. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto, por ejemplo, en el uso de las reglas de derivación. Además, en el momento del primer encuentro del alumno con la función derivada aparece el problema de que su cálculo, usando la definición por límites, para algunas funciones elementales resulta complicado. Este último aspecto ha llevado a la búsqueda de métodos alternativos para el cálculo de la función derivada que no se limiten al uso de las reglas de derivación o bien al cálculo directo del límite. En este trabajo se realiza un análisis didáctico de algunas secuencias de cálculo alternativo de la función derivada poniendo el énfasis en las representaciones utilizadas y en los procesos de generalización y metafóricos activados. El objetivo es mostrar una parte del tipo de análisis didáctico que se pretende que hagan los futuros profesores de secundaria.

1. La Competencia en Análisis Didáctico de Procesos de Instrucción

En este apartado se explica el contexto curricular en el que se desarrolla la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas de secundaria en España y se argumenta que el núcleo de dicha formación debe ser el desarrollo de la competencia profesional en el análisis de proceso de instrucción matemática.

1.1 El contexto curricular

Competencias profesionales

Estamos en un momento de reforma de los currículos de formación inicial de los profesores de enseñanza secundaria de matemáticas. Dicha reforma organiza los curriculums por competencias, lo cual nos lleva, entre otras, a las siguientes preguntas: ¿Qué tipo de competencias debieran desarrollarse en estos currículos? ¿Cuáles son estas competencias? ¿Cómo se pueden desarrollar y evaluar?

En lo que sigue centraremos nuestras reflexiones en el título de máster que habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria. Las directrices de este máster establecen que: 1) Su duración sea de 60 créditos ECTS (sistema europeo de transferencia y acumulación de ***créditos)***. 2) Las competencias se clasifican en genéricas, específicas (matemáticas y su didáctica en nuestro caso) y las que se desarrollan por medio de la práctica. 3) Los 60 créditos se distribuyen en tres módulos (genérico, prácticum y específico). 4) El módulo especifico de matemáticas y su didáctica contempla tres materias: complementos para la formación matemática, aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, innovación docente e iniciación a la investigación educativa.

La competencia matemática en el currículo de secundaria

Los currículos por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria están pensados para desarrollar una competencia profesional que le permita al futuro profesor desarrollar y evaluar la competencia matemática contemplada en el currículo de secundaria.

Actualmente hay una tendencia a considerar que “saber matemáticas” incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículos basados en competencias. Dichos currículos contemplan la competencia matemática, la cual es entendida, en muchos casos, de manera similar a como se entiende en el informe PISA 2003.

1.2 Un aspecto problemático y una pregunta relacionada

Los currículos por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dicho problema lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria? La respuesta a la cual, a su vez, depende de cómo se conteste a la pregunta previa: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado para enseñar matemáticas?

Una de las problemáticas que más ha interesado en el área de educación matemática es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. Diversos autores han dado respuestas diferentes: conocimiento pedagógico (Moore, 1974), conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986) y conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001) entre otras. En nuestra opinión, estas respuestas coinciden al considerar como una de las competencias profesionales que debe tener un profesor aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje (análisis didáctico), pero difieren, entre otros aspectos, en cuáles son las herramientas necesarias para realizar este tipo de análisis didáctico.

1.3 Un primer posicionamiento

Nuestro primer posicionamiento es que la competencia profesional que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática se puede considerar compuesta por dos macro competencias: 1) La competencia matemático-epistemológica y 2) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción matemática. Además, nuestra posición es que el núcleo de la competencia profesional del futuro profesor de secundaria debería de ser la competencia en el análisis didáctico. De manera secundaria se debería mejorar la competencia matemática-espitemológica en el máster.

La razón principal para tomar esta opción es que el modelo de formación inicial de profesores de secundaria es de tipo secuencial: primero formación disciplinar y posteriormente una formación profesionalizadora. Dicho de otra manera, En el máster también se debe ayudar a desarrollar la competencia matemática, pero se presupone que dicha competencia ya se ha desarrollado en los estudios previos que acreditan los alumnos para su ingreso en el máster.

1.4 Un segundo posicionamiento

Nuestro segundo posicionamiento es que partimos de las siguientes hipótesis:

1) La mejora de la competencia en el análisis de la actividad matemática se puede favorecer mediante situaciones de resolución de problemas matemáticos seguidas de reflexión y análisis sobre la “matemática en acción” puesta en juego en dicha resolución, esto es, el reconocimiento de las prácticas, objetos y procesos matemáticos utilizados.

2) La competencia profesional en el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos está estrechamente relacionada con la competencia profesional que permite evaluar las competencias matemáticas del currículum.

3) La mejora de la competencia en análisis didáctico se favorece mediante la valoración (y posterior diseño de mejoras) de procesos de enseñanza-aprendizaje, los cuales previamente se analizan desde los puntos de vista epistémico, cognitivo, instruccional y normativo.

Estas hipótesis de partida nos han llevado a optar, para el desarrollo de la competencia en análisis didáctico, por el modelo de análisis propuesto por un enfoque de investigación integrativo en el área de didáctica de las matemáticas: el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Font, Planas y Godino, 2010). Este enfoque propone un análisis didáctico de procesos de instrucción que considera los siguientes cinco niveles o tipos de análisis: 1) Identificación de prácticas matemáticas. 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos. 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas. 4) Identificación del sistema de normas y metanormas. 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer nivel de análisis explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción matemático. Este primer nivel se puede entender como la narración que haría un profesor para explicar a otro profesor lo que ha sucedido desde el punto de vista matemático. El análisis didáctico debe progresar desde la situación problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (nivel 1), a los objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros estudiantes, se debe progresar hacia el estudio de la interacción. El tercer nivel de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas (nivel 3). Estas configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas, que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de instrucción (niveles 1 y 2), sino también otras dimensiones de estos procesos (cognitiva, afectiva, etc.). El cuarto nivel de análisis estudia dicha trama.

Los cuatro primeros niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto nivel se centra en la valoración de la idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2006). Este último nivel se basa en los cuatro análisis previos y es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

Hemos optado por el modelo de análisis propuesto por el EOS porque consideramos que se trata de un modelo de análisis que integra aspectos del llamado enfoque epistemológico y de las teorías socioculturales. Por una parte, el análisis de las prácticas, objetos y procesos matemáticos permite describir las matemáticas del proceso de instrucción analizado, mientras que, por otra parte, el análisis de las interacciones y de la dimensión normativa permite describir la interacción producida en el proceso de instrucción y las normas que la regulan. Por último, los criterios de idoneidad implican la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc.

2. Análisis Didáctico de Objetos y Procesos Matemáticos. La Derivada como Contexto de Reflexión

En este apartado se ejemplifica el tipo de análisis de objetos y procesos matemáticos que intentamos desarrollar en los futuros profesores de secundaria. En este caso el foco será un determinado tipo de objeto: las representaciones y determinados procesos (por ejemplo, procesos de generalización, argumentación y metafóricos). El contexto de reflexión será el primer encuentro del estudiante con la función derivada.

2.1 El problema didáctico

En los procesos de instrucción en los que se introduce por primera vez la derivada, es usual encontrarse con que las nociones de derivada en un punto y de función derivada son difíciles de comprender para muchos de los alumnos. Se trata de un problema didáctico relevante que diferentes investigaciones han permitido acotar: las dificultades se encuentran precisamente en la comprensión de las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto, por ejemplo, en el uso de las reglas de derivación. La dificultad pues está relacionada con el proceso de significación y de comprensión.

La forma clásica de introducir el concepto de derivada, con el concepto de límite en el centro de sus acepciones local y global, conlleva un alto nivel de complejidad, lo que pudiera explicar el origen de la dificultad mencionada. Diversas investigaciones (Font, 2000; Badillo, 2003; Font y Contreras, 2008) han puesto de manifiesto que la comprensión de la derivada está relacionada con la activación de una compleja trama de funciones semióticas que permita entender la relación entre $f'(a)$ y f'.

Otro problema didáctico relacionado con el anterior es que, en el momento del primer encuentro del alumno con la función derivada, el cálculo de la derivada, usando la definición por límites, resulta muy complicado para determinadas funciones elementales (la función seno y la función exponencial de base e).

Las propuestas de mejora de la enseñanza y aprendizaje de la derivada, con relación a la comprensión de las nociones de derivada en un punto y de función derivada, sugieren posponer la definición de la función derivada por límites (por ejemplo, introduciendo primero la interpretación geométrica de la derivada). Con relación a la dificultad del cálculo del límite de determinadas funciones elementales, la sugerencia es buscar métodos alternativos para el cálculo de la función derivada que no se limiten al uso de las reglas de derivación o bien al cálculo directo del límite.

A continuación nos limitaremos a reflexionar sobre el problema didáctico de la dificultad del cálculo de la función derivada a partir de la definición para determinadas funciones elementales., lo cual nos lleva a la siguiente pregunta: *¿Cómo calcular f´?*. Se trata de un problema didáctico, pero también matemático.

2.2 Una respuesta teniendo en cuenta las representaciones activadas

En Font (2000), se considera que el cálculo de $f\,'(x)$ a partir de $f(x)$ se puede interpretar como un proceso, en la que a su vez se han de considerar tres subprocesos: 1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f\,'(x)$. 2) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f\,'(x)$. 3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f\,'(x)$.

En la siguiente explicación de un libro de texto podemos observar conjuntamente los tres subprocesos, ya que primero se hace una traducción en la forma de presentar la función, después se obtiene la función derivada aplicando las reglas de derivación y, por último, se buscan distintas maneras de representar la función derivada. Es decir, se sigue el esquema siguiente:

Expresión analítica de $f(x)$ $\rightarrow$ Expresión analítica de $f\,(x)$ $\Rightarrow$ Expresión analítica de $f\,'(x)$ $\rightarrow$ Expresión analítica de $f\,'(x)$

Derivada de la función $f\,(x) = \log_a x$

Al estudiar la familia de las funciones logarítmicas, hemos constatado que todas son el resultado de una dilatación (contracción) en la función $f(x) = \ln x$. Es decir, que cualquier función logarítmica cumple $\log_a x = k\cdot\ln x$. Por consiguiente, la función derivada de la función $f(x) = \log_a x$ será:

$$f'(x) = k\cdot(\ln x)' = k\,\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

Ahora bien, al estudiar el cambio de base, se observa que k es igual a $\log_a e$ o bien a $\dfrac{1}{\ln a}$.

Por lo tanto:

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad \text{o bien} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

Ambas expresiones de la función derivada se emplean indistintamente

Entender el cálculo de la función derivada como un proceso en la que intervienen tres subprocesos, cada uno de los cuales puede utilizar representaciones diferentes, permite ampliar el abanico de técnicas de cálculo de la función derivada que no se restrinja al cálculo por límites o bien al uso de reglas de derivación (Font 2000). Dichas técnicas pueden ser sugeridas, entre otras por (1) las posibilidades de los graficadores de funciones y (2) la historia de las matemáticas. Muchas de estas técnicas o procedimientos alternativos, no se limitan a utilizar únicamente la representación simbólica, e incluso se justifican mediante argumentos no deductivos (por ejemplo, razonamientos inductivos o visuales)

2.3 Ejemplo de técnica alternativa

La actividad que sigue está diseñada para alumnos de Bachillerato. Su objetivo es utilizar las posibilidades de los programas de representación de funciones para llegar a una conjetura sobre cuál es la derivada de la función seno obviando el cálculo de $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ debido a su dificultad.

Actividad: Con el graficador “Funcions i gràfics” representa la función $\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ y la función coseno. La pantalla tiene que quedar como la siguiente para el valor $h = 5$:

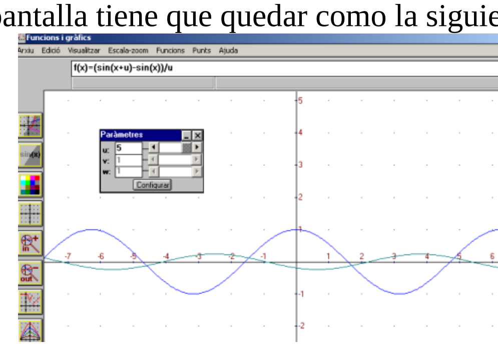

Figura 1

c) ¿Qué puedes decir de la función $\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ cuando h se acerca a cero? ¿Qué puedes decir con relación al $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$? ¿Cuál es la derivada de la función seno?

En este caso, para calcular la derivada de la función seno se trataría de seguir el esquema siguiente:

Expresión simbólica de $f(x) \Rightarrow$ Gráfica de $f'(x) \rightarrow$ Expresión simbólica de $f'(x)$

Una manera de obtener la gráfica de la función derivada a partir de la expresión simbólica de $f(x)$ consiste en utilizar un graficador para representar la función $p\,f_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (función gradiente o función pendiente de la función $f\,(x)$ según un incremento h) con h suficientemente pequeño. Al ser h muy pequeño, la gráfica que dibuja el graficador se puede considerar que es la de la función derivada. El alumno ha de reconocer que la gráfica que ha obtenido es la de la función coseno y recordar su fórmula. Este último paso supone que el alumno es capaz de reconocer la gráfica de la función coseno que tiene en la pantalla del ordenador. El uso de esta técnica permite prescindir del siguiente cálculo de la derivada de la función seno y de la demostración previa de que $\lim_{h \to 0} \frac{seno\, h}{h} = 1$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\cdot sen\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\cdot \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\cdot \lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$$

Además, tiene la ventaja de que permite reducir la unidad de trigonometría que se imparte antes de empezar la derivada, ya que no será necesario ampliarla para que incorpore las propiedades que permiten convertir la diferencia de senos en un producto.

2.4. Recuperación de técnicas antiguas gracias a los graficadores dinámicos

A continuación sigue un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (17 años) como parte de un proceso de instrucción sobre la derivada (Font, 2005). Su objetivo es el cálculo de la derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ sin usar la definición por límites. Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes. En concreto, les permitió observar que, para la función exponencial de base e, la longitud de la subtangente siempre es 1.

El software puede ser diverso, desde un programa clásico gratuito de muy fácil manejo que permite representar funciones con parámetros como “Funcions i gràfics” o bien applets (figura 2) específicamente diseñados (Applet elaborado por Eduardo Tellechea Armenta con el applet DESCARTES. Recuperable en: http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Descartes/ActividadesProyecto/deriexponenciales.htm).

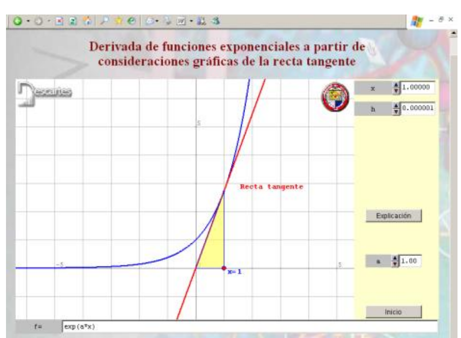

Figura 2

Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f\,'(0)$, $f\,'(1)$ y $f\,'(2)$

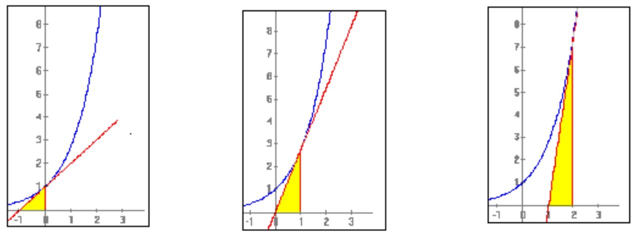

Figura 3

b) Calcula $f\,'(a)$

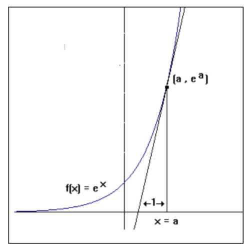

Figura 4

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f\,'(x) = e^x$.

Para calcular la derivada de la función $f\,(x) = e^x$ los alumnos han de aplicar una serie de acciones (una técnica) que consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla primero una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1). Esta condición después se simboliza, aplicando la interpretación geométrica de la derivada, lo que permite calcular la derivada en $x = a$. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. De esta manera se obtiene la expresión simbólica de la función derivada.

Esta técnica relaciona las siguientes representaciones:

Gráfica de $f\,(x)$ y Expresión simbólica de $f\,(x) \Rightarrow$ Expresión simbólica de $f\,'(x)$

El punto de partida para hallar una condición que cumplen todas las tangentes es la gráfica de $f\,(x)$. La expresión simbólica de $f\,(x)$ es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de $f\,'(x)$. Esta técnica sólo es posible si se introduce la representación gráfica y la simbólica conjuntamente de la función exponencial de base *e* ya que si no se contempla la representación gráfica, la técnica no es viable. Contemplar la representación gráfica, además de la simbólica, permite realizar determinadas prácticas que con sólo la representación simbólica no serían posibles.

El cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e* está a mitad de camino entre lo que se conoce históricamente como el problema de la tangente y su inverso —no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el

problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de la función—. Este método fue sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow.
Esta técnica tiene un campo de aplicación limitado, pero se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta y a las funciones exponenciales y logarítmicas.

2. 5 Procesos

Si bien es importante considerar las representaciones activadas en el cálculo de la función derivada hay que tener en cuenta otras factores que hacen el cuadro más complejo. Entre otros, los procesos de generalización o los metafóricos activados por las metáforas utilizadas en el discurso del profesor y en el de los alumnos.
Si observamos los tres apartados del cuestionario del apartado 4 (cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e*) podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general. En el apartado *a* se pide calcular la derivada para tres valores concretos (0, 1 y 2). En el apartado *b* se pide calcular la derivada para un valor concreto "*a*" y en el apartado *c* para un valor cualquiera. Es decir, el tránsito de lo particular a lo general ha estado muy presente en el diseño del cuestionario y las representaciones que intervienen son consideradas, según convenga, como particulares o generales. No basta sólo con considerar el tipo de representación que interviene en la técnica, es necesario reflexionar también sobre el rol que juega dicha representación con relación facilitar o dificultar los procesos de generalización.
Por otra parte, los alumnos, antes de contestar el cuestionario, habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes (tienen una longitud igual a 1). Este software dinámico estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino (la gráfica)" (Font y Acevedo, 2003).
Si bien hay bastante acuerdo entre los investigadores en didáctica de las matemáticas sobre la importancia que tienen las representaciones o la dualidad particular-general, la importancia que tiene la metáfora en la comprensión de los alumnos sólo ha empezado a ser reconocida muy recientemente. La metáfora es más importante de lo que normalmente se cree para estructurar la comprensión de los alumnos (Font, Bolite y Acevedo, 2010):

3. Consideración Final

Los futuros profesores deben ser conscientes de que *la realización de la mayoría de prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica*. Por ejemplo, si en el cuestionario del apartado 4 se hubiera eliminado el apartado b, seguiríamos pretendiendo que el alumno aplicara la misma técnica de cálculo de la función derivada y continuaríamos utilizando gráficos (los de la actividad previa con el ordenador y los del apartado a) y expresiones simbólicas (apartado c), pero la complejidad semiótica que tendría que afrontar el alumno aumentaría notablemente y, con ello, las posibilidades efectivas de resolver la tarea.
Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos una representación como un elemento genérico estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que

prescindimos de los aspectos particulares. La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los alumnos puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene representaciones que se consideran como elementos genéricos.

La incorporación de graficadotes en la enseñanza de las funciones y de las derivadas produce efectos metafóricos que condicionan la comprensión de los alumnos. Por ejemplo, la incorporación de graficadotes dinámicos puede llevar a muchos alumnos a estructurar la gráfica por medio de la proyección metafórica de su campo de experiencias sobre lo que es un "camino" (principio, final, punto que se mueve, antes, después, etc.).

Agradecimiento

Este trabajo forma parte de una investigación más general, realizada en el marco del proyecto EDUC2009-08120: "Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato".

Referencias Bibliográficas

Badillo, E. (2003), *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia*. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona. [URL:http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/ VAILABLE/ TDX-0611104-144929/]

Ball, D., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge, en V. RICHARDSON (ed.): *Handbook of Research on Teaching*, pp. 433-456.American Educational Research Association, Washington, D.C., EEUU.

Font, V. (2000), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis de doctorado sin publicar, Universitat de Barcelona. [URL: http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0408108-104902/]

Font, V. (2005), Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias* 21, 3, 405-418.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 69, 33-52.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje* 33 (1), 89-105.

Font, V.; Bolite, J. y Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics* 75,131–152.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma* XXVII, (2): 221-252.

Moore, T. W. (1974). *Introducción a la Teoría de la Educación*. Madrid; Alianza Editorial.

Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15(2), 4-14.