UNA MANERA DE APRENDER MÁS MATEMÁTICA PARA ENSEÑARLA: LA "REFLEXIÓN GUIADA" COMO HERRAMIENTA DE INTEGRACIÓN MATEMÁTICO-DIDÁCTICA

Silvia Colombo, Silvia Etchegaray
Universidad Nacional de Río Cuarto - Argentina
setchegaray@exa.unrc.edu.ar
Nivel Universitario

Resumen

Con este trabajo tratamos de profundizar nuestro estudio y compartir nuevos avances en el ámbito de la formación de profesores mostrando la importancia de la reflexión orientada sobre la propia práctica matemática que realizan los alumnos del Profesorado en Matemática en la UNRC en el marco del Taller intra-disciplinar titulado "Dialéctica entre geometría sintética y analítica".

La reflexión sobre su propia práctica y sobre los significados objetivizados de ella, a partir de haber puesto a funcionar herramientas provistas por el Enfoque Onto-Semiótico de la Cognición Matemática (EOS) permite a los alumnos, ampliar la clásica distinción curricular entre conocimientos conceptuales y procedimentales. Esta ampliación basada tanto en la explicitación de las entidades proposicionales y argumentativas así como en el rol regulador del lenguaje hace posible que los futuros profesores sean conscientes de los procesos matemáticos que ponen en juego. En otras palabras los alumnos aprenden más matemática. Específicamente en este trabajo, se intenta mostrar que esta propuesta también abona al fenómeno didáctico por el cual más allá que dos alumnos estén hablando del mismo objeto, las ideas con que se lo hace funcionar en una situación pueden ser muy distintas y por ende hacer intervenir y/o emerger relaciones diferentes. Esto constituye un conocimiento necesario para su futura gestión docente. Dicho de otra manera: ayuda a la apropiación de específicas herramientas para enseñar matemática.

<u>Palabras clave:</u> Reflexión guiada – Geometría - Formación de Profesores

Planteo del problema y fundamentación

Como se expresa en Godino, J., Batanero C. (2009), una de las actividades más importantes de los investigadores en Didáctica de la Matemática y de los docentes formadores de futuros profesores en Matemática es asumir el compromiso de articular coherentemente y en contexto los aportes de las teorías de Educación Matemática, con el objetivo de formar profesionales que promuevan una actividad matemática con sentido.

Debido a que en nuestra Institución formadora de profesores en Matemática estamos a cargo tanto de la formación matemática como didáctica de los alumnos del profesorado, tenemos la oportunidad de poner en práctica y evaluar con nuestros estudiantes el funcionamiento de herramientas didáctico-matemáticas que nos proveen los resultados de investigación en enseñanza y aprendizaje de la matemática. Ante el intento de integrar ambas formaciones nos basamos en la reflexión sobre la propia actividad matemática que los alumnos realizan, utilizando para ello herramientas conceptuales del "Enfoque onto-semiótico de la cognición matemática" (EOS), cuyo iniciador es el Dr. Juan Díaz Godino.

En el EOS se adoptan presupuestos socioculturales-antropológicos sobre la matemática basados en los planteos de Bloor, 1983 y Wittgenstein, 1953, (citados en Godino, Batanero y Font, 2007) y presupuestos socio-constructivistas (Vygotsky, 1934, citado en Godino, Batanero y Font, 2007) e interaccionistas (Blumer, 1969; Coob y Bauersfeld, 1995, citado en Godino, Batanero y Font, 2007) sobre el aprendizaje de la matemática.

En este trabajo, tratamos de mostrar cómo la noción de ***sistema de prácticas matemáticas*** que se caracteriza en el EOS como toda actuación o expresión realizada por alguien (persona o institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla, generalizarla a otros contextos y problemas, se transforma en una herramienta potente para mediar y regular un acto de reflexión sobre la propia actividad matemática. Esto se realiza mediante el reconocimiento de objetos matemáticos que intervienen en ellas y del significado que de tales prácticas emergen. Los objetos identificados son las situaciones, procedimientos, conceptos/definiciones, propiedades, argumentos, lenguajes que interactúan dialécticamente y que permiten develar los ***significados personales.*** Tales elementos se conforman en una ***configuración*** la cual caracteriza las redes de objetos intervinientes y emergentes de los *sistemas de prácticas* y las relaciones que se establecen sobre los mismos (Fernandez, T; Cajaraville, J; Godino, J; 2006).

Se asume en consonancia con lo planteado nuevamente por Godino, J.y Batanero C. (2009) que ser conciente de los procesos matemáticos y de los objetos que involucra la actividad matemática personal es un punto clave, no sólo para que el futuro profesor aprenda más matemática sino para que aprenda a enseñar matemática.

Desarrollo

Los sistemas de prácticas que tratamos de describir y explicar en el marco expuesto se han generado a partir de la implementación del taller intra-disciplinar que aborda la relación entre la Geometría sintética y la Geometría analítica en el plano, contextualizado en el currículo del Profesorado de Matemática de la UNRC en el segundo cuatrimestre del 2do. Año de estudio. Conforman además un nuevo estudio con respecto al ya publicado (Colombo, S; Etchegaray, S, 2009), afinando y profundizando el análisis de las producciones personales que año tras año se desarrollan. Recordemos que el propósito matemático-didáctico del taller es que los alumnos de dicho Profesorado sean capaces de otorgarle sentido a la potencialidad y complementariedad de ambas geometrías analizando sus propios significados.

Las producciones generadas por alumnos, en el marco de este taller, se convierten en contexto de reflexión que permiten sistematizar el uso y funcionamiento de relaciones geométricas sintéticas y/o analíticas en los "*sistemas de prácticas personales*" que logran desplegarse en las clases.

Análisis de Producciones Matemáticas

En esta sección vamos a realizar, a título de ejemplo, el análisis de dos tipos de producciones matemáticas descriptas en la tabla 1 y 2 respectivamente; a los fines de ilustrar cómo se llevó a cabo con los estudiantes en un momento determinado la reflexión sobre la propia práctica.

En efecto, la elaboración de las configuraciones asociadas a las resoluciones de la situación-problema planteada nos permite poner al descubierto las relaciones que posibilitaron gestionar las interacciones en la clase e identificar los procesos matemáticos que intervienen/sustentan/se expresan en los significados personales. En otras palabras, esta herramienta didáctico-matemática nos permite realizar un análisis semántico que fundamenta el proceso de reflexión planteado, en este trabajo, como espacio significativo para la formación docente.

Enunciado de la situación- problema (extraído del material trabajado en la Escuela de Invierno de Didáctica de las Matemáticas. UNGSAM, Gascón J. 2007):
Busca los rombos que tienen dos vértices consecutivos en los puntos (0,0) y (2,3), sabiendo que otro de los vértices esta situado sobre el eje de las x.

Objetos y relaciones primarias

Lo subrayado indica las relaciones emergentes de la práctica matemática realizada.

Tabla 1

<table>
<tr>
<td rowspan="3">LENGUAJES:
Analítico (expresiones):
- Puntos dados como pares ordenados de números Reales.

-Vértices del rombo, como pares ordenados.

Geométrico(términos y expresiones)

- rombos, vértices, vértices consecutivos en los puntos (0,0) y (2,3), vértices situado sobre el eje x, vértices del rombo, diagonales del rombo,</td>
<td rowspan="3">Expresa</td>
<td>SITUACIONES/ PROBLEMAS:
-Enunciado de la situación-problema</td>
</tr>
<tr>
<td>Motivan   Resuelven</td>
</tr>
<tr>
<td>CONCEPTOS/ DEFINICIONES:
Que intervienen:
Coordenadas cartesianas ortogonales: como marco de referencia para situar puntos.
Puntos del plano: como pares ordenados de números reales. Segmento. Rombo: como cuadrilátero que tiene lados iguales. Longitud de los lados del rombo: como medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Circunferencia: como lugar geométrico. Pertenencia de puntos a una recta y a una circunferencia: como punto que pertenece a la circunferencia y al eje x. Pertenencia de puntos a dos circunferencias: puntos de intersección de ambas circunferencias. Rectas paralelas. Rectas perpendiculares por un punto. Triángulos rectángulos e isósceles. Altura y mediatriz de un lado de un triángulo.
Que Emergen:
Rombo como figura donde los vértices consecutivos son extremos de radios de circunferencias de radio $\sqrt{13}$, identificados por sus coordenadas.</td>
</tr>
</table>

paralelogramo, rectas paralelas, rectas perpendiculares, circunferencias, eje x. Numérico: Medida del lado del rombo: $\sqrt{13}$. Gráfico: - Gráfico cartesiano de cada uno de los tres rombos buscados y de circunferencias centradas en los vértices dados y en el vértice sobre el eje x. Simbólico: C [(0 ,0), $\sqrt{13}$] $\overline{AD} // \overline{BC}$ $\overline{AB}$ A(2,3), ΔBGH	Ayuda	PROPIEDADES/ PROPOSICIONES: - Teorema de Pitágoras para calcular medida de segmento con extremos en los puntos dados. - La longitud del segmento de extremos los dos puntos dados es la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo con vértices en los dos puntos dados y en el punto (2,0). Este segmento es un lado del rombo. - Teorema línea-círculo: si una línea intersecta al interior de un círculo entonces lo intersecta en dos puntos. - La circunferencia C_1[(0,0) , $\sqrt{13}$] intersecta al eje x en los puntos ($\sqrt{13}$, 0) y ($-\sqrt{13}$,0). -El tercer vértice de uno de los rombos buscados, que está en el eje x, está a distancia $\sqrt{13}$ de uno de los vértices dados. - Teorema de los dos círculos: sean a y b los radios de dos circunferencias y c la distancia entre sus centros, si cada uno de los números a, b y c es menor que la suma de los otros dos entonces las circunferencias se intersectan en dos puntos. - Los puntos que están a distancia $\sqrt{13}$ del otro punto dado y del tercer vértice del rombo buscado viven en sendas circunferencias centradas en dichos puntos y de radios igual a √13: C_1[(0,0) , $\sqrt{13}$] y C_3 [(2,3), $\sqrt{13}$]. - Todo cuadrilátero que tiene cuatro lados iguales es un paralelogramo. - En todo triángulo isósceles la altura correspondiente a un lado coincide con la mediatriz de dicho lado. - El rombo queda determinado por sus cuatro vértices -La medida de los lados del rombo es $\sqrt{13}$. -En las condiciones del enunciado se determinan sucesivamente tres rombos: uno de vértices (0 ,0), (2,3), (4,0) y (2,-3); otro de vértices (0,0), (2,3), ($\sqrt{13}$ + 2, 3) y ($\sqrt{13}$, 0) y el tercero de vértices 0,0), (2,3), (- $\sqrt{13}$ + 2, 3) y ($\sqrt{13}$, 0).

PROCEDIMIENTOS:

- Identificar puntos con pares ordenados de números reales y marcarlos.
- Trazar segmento de extremos los dos puntos dados.
- Aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos dados.
- Trazar la circunferencia $C_1[\ (0,0), \sqrt{13}\ ]$, identificar los puntos de corte de ésta con el eje x y marcarlos.
- Trazar las circunferencias $C_2\ [(\sqrt{13},0), \sqrt{13}\ ]$ y $C_3[\ (2,3), \sqrt{13}\ )]$, identificar los puntos de intersección de ambas, marcarlos y buscar sus coordenadas.
- Trazar la circunferencia $C_4[(-\sqrt{13},0), \sqrt{13}\ )]$, identificar los puntos de corte con el eje x, marcarlos y buscar sus coordenadas.
- Identificar los puntos de intersección de C_3 con el eje x y marcarlos.
- Trazar $C_5[(4,0), \sqrt{13}\ )]$, identificar su corte con $C_1[(0,0), \sqrt{13}\ ]$, marcarlos y buscar sus coordenadas.

Que Emerge:

<u>La determinación de los otros dos vértices de cada uno de los rombos buscados y su asociación con las coordenadas correspondientes.</u>

Justifican

ARGUMENTOS:

<u>- Deductivo</u>:

* para calcular la medida de un segmento que identifica la longitud del lado del rombo, a partir de las coordenadas de los dos puntos dados,

* para determinar secuenciadamente los vértices de cada uno de los rombos buscados.

* para determinar secuenciadamente las coordenadas de tales vértices.

<u>- Explicativo</u>:

* para caracterizar los lados de los rombos encontrados como segmentos con extremos en los vértices hallados, basado en las construcciones geométricas.

Tabla 2

<table>
<tr>
<td rowspan="4">LENGUAJES:
Geométrico(términos y expresiones)
- rombos, vértices, vértices consecutivos en los puntos (0,0) y (2,3), vértices situado sobre el eje x, vértices del rombo, diagonales del rombo, paralelogramo, rectas paralelas, rectas perpendiculares, ecuaciones de circunferencias, ecuaciones de rectas.

<u>Analítico</u> (expresiones):
- Puntos dados como pares ordenados de números Reales.
-Ecuaciones de la circunferencia y de rectas.
-Vértices del rombo, como pares ordenados.
-Distancia entre dos</td>
<td rowspan="3">Expresa</td>
<td>SITUACIONES/ PROBLEMAS:
-Enunciado de la situación-problema</td>
</tr>
<tr>
<td>Motivan   Resuelven</td>
</tr>
<tr>
<td>CONCEPTOS/ DEFINICIONES:
<u>Que intervienen:</u>
Puntos del plano: como pares ordenados de números reales. Rombo: como cuadrilátero que tiene lados iguales. Longitud de los lados del rombo: como distancia entre dos puntos. Fórmula de la distancia entre dos puntos. <u>Circunferencia: como lugar geométrico. Ecuación de la circunferencia.</u> Ecuación del eje “x”. Pertenencia de un punto a una recta: el punto verifica la ecuación de la recta. <u>Pertenencia de un punto a una circunferencia: el punto verifica la ecuación de la circunferencia. Pertenencia de puntos a una recta y a una circunferencia: el punto verifica ambas ecuaciones.</u> Diagonal de un rombo. Segmento. Punto medio de un segmento. Ecuación de una recta dados dos de sus puntos. Ecuación de una recta perpendicular a otra por un punto. Paralelogramo. Clasificación de paralelogramos. Ecuación de una recta paralela a otra por un punto.
<u>Que emergen</u>:
<u>Rombo como figura donde los vértices consecutivos, identificados por sus coordenadas, equidistan.</u></td>
</tr>
<tr>
<td>Ayuda</td>
<td>PROCEDIMIENTOS:
- Identificar puntos con pares ordenados de números reales.
- Aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos.
- Resolver los dos sistemas de ecuaciones formados por sendas ecuaciones de las circunferencias y la recta y = 0.
- Resolver el sistema de ecuaciones formados por la ecuación de la circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{13}$ y la recta y = 2.
- Resolver el sistema de ecuaciones formados por la ecuación de la circunferencia de centro (2,3) y radio $\sqrt{13}$ y la recta y = 3.
Emergentes:
<u>La determinación de las coordenadas analíticas de los otros dos vértices de cada uno de los rombos buscados.</u></td>
</tr>
</table>

puntos. Numérico: Medida del lado del rombo: $\sqrt{13}$. Gráfico: - Gráfico cartesiano de los tres rombos buscados y de dos circunferencias centradas en los vértices dados. Simbólico: C [(0 ,0), (2,3)] $d^2[(x, y), (0, 0)]$ $x^2 + y^2 = 13$ y = 3		PROPIEDADES/ PROPOSICIONES: - La distancia entre dos puntos es la raíz cuadrada de las sumas de los cuadrados de la diferencia de las correspondientes coordenadas de los puntos. - El tercer vértice del rombo que está en la recta y = 0 está a distancia $\sqrt{13}$ de los dos vértices dados. - Los puntos que equidistan de cada uno de los dos puntos dados en $\sqrt{13}$ viven en sendas circunferencias centradas en dichos puntos y de radios igual a $\sqrt{13}$. - Los puntos que cumplen pertenecer a sendas circunferencias y a la recta y = 0 son las soluciones de sendos sistemas de ecuaciones formados por las ecuaciones de las circunferencias y por y = 0. - Las diagonales del rombo se bisecan entre sí perpendicularmente. - El cuarto vértice del primer rombo encontrado, cuyo tercer vértice es (4,0), pertenece a la recta y = 2 y está a distancia $\sqrt{13}$ del punto (0,0). - Los puntos que cumplen pertenecer a la circunferencia de centro (0,0) y a la recta y = 2 son las soluciones del sistema de ecuaciones formados por la ecuación de la circunferencia y por y = 2. - El rombo queda determinado por sus cuatro vértices - El rombo es un paralelogramo. - La recta paralela a y = 0 que pasa por (2,3) es la recta y = 3. - Los cuartos vértices de los dos rombos buscados pertenecen a la recta paralela a y = 3 y están a distancia $\sqrt{13}$ del punto (2,3). - Los puntos que están a distancia $\sqrt{13}$ del punto (2,3) viven en la circunferencia centrada en dicho punto y de radio igual a $\sqrt{13}$. - Los puntos que cumplen pertenecer a la circunferencia centrada en (2,3) y de radio $\sqrt{13}$ y a la recta y = 3 son las soluciones del sistema de ecuaciones formado por las ecuación de la circunferencia y por y = 3. -La medida de los lados del rombo es $\sqrt{13}$. -En las condiciones del enunciado se determinan tres rombos: uno de vértices (0 ,0), (2,3), (4,0) y (2,-3); otro de vértices (0,0), (2,3), ($\sqrt{13}$ + 2, 3) y ($\sqrt{13}$, 0) y el tercero de vértices 0,0), (2,3), (-$\sqrt{13}$ + 2, 3) y ($\sqrt{13}$, 0).
		Justifican

		ARGUMENTOS: <u>- Deductivo:</u> * para calcular la longitud del lado del rombo. * para determinar de "una vez" los vértices de los rombos buscados como pares ordenados de números. * para verificar la pertenencia de puntos a rombos que cumplen condiciones utilizando la medida del lado del rombo.

A modo de síntesis

Recordemos que el objetivo de este trabajo es mostrar cómo el reconocimiento por parte del docente y de los alumnos de los ***sistemas de prácticas matemáticas*** se transforma en una herramienta potente para mediar y regular un acto de reflexión sobre la propia actividad matemática, mediante la detección tanto de objetos matemáticos que intervienen en tales prácticas como del o los significados que de las mismas emergen.

Se ratifica con este trabajo que la reflexión de los alumnos sobre su propia actividad y sobre los significados objetivados de ella, a partir de haber puesto a funcionar herramientas provistas por el EOS, permite a los mismos ampliar la clásica distinción curricular entre conocimientos conceptuales y procedimentales. En efecto, esta ampliación se caracteriza por explicitar las entidades proposicionales y argumentativas así como el rol regulador del lenguaje lo que hace posible que los futuros profesores sean conscientes de los procesos matemáticos que ponen en juego. Específicamente en este trabajo los dos significados diferentes que emergen de sendos sistemas de prácticas, son atrapados en las siguientes frases respectivamente: 1) *los tres rombos "de a uno por vez"* y 2) *lo tres rombos "simultáneamente* .De esta manera se le otorga contenido personal a la reconocida potencialidad del método analítico que se asigna desde la Institución Matemática, cuando se dice: "con este método de una vez se determinan todas las figuras solicitadas". En otras palabras, se vuelve a confirmar que los alumnos aprenden más matemática. Por último, se considera que esta forma de aplicación de la investigación didáctica también abona al fenómeno didáctico por el cual más allá que dos alumnos estén hablando del mismo objeto, las ideas con que se lo hace funcionar en una situación pueden ser muy distintas y por ende hacer intervenir y/o emerger relaciones diferentes. Esto constituye un conocimiento necesario para su futura gestión docente. Dicho de otra manera: también ayuda a la apropiación de específicas herramientas para enseñar matemática.

Referencias Bibliográficas

Colombo S, Etchegaray, S (2009) La reflexión en un espacio de Formación inicial de Profesores: Análisis de un sistema de prácticas geométricas. Disponible en la revista electrónica: www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_12.pdf

Fernández T., Cajaraville J., Godino J. (2006). *Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial.* Trabajo recuperado el 20 de marzo de 2012 en *: http://www.uv.es/aprengeom*/.

Gascón J. (2007). El proceso de algebrización de las matemáticas escolares. *Material de trabajo de la Escuela de Invierno de Didáctica de la Matemática. UNGSM*

Godino, J., Batanero C. (2009). *Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica.* Conferencia Invitada al VI CIBEM, Puerto Montt (Chile). Trabajo recuperado el 20 de marzo de 2012 en: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J., Batanero C., Font, V. (2007). *Un enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática.*: Trabajo recuperado el 20 de marzo de 2012 en http://www.ugr.es/local/jgodino