

SUCESIONES NUMÉRICAS: UNA EXPERIENCIA CON GEOGEBRA

Gonzalez Juliana, Medina Perla, Astiz Mercedes, Vilanova Silvia
Universidad Nacional de Mar del Plata – Argentina
julianagonzalezjg@yahoo.com.ar
Nivel Universitario

Resumen

Muchos temas de matemática del primer año de las carreras universitarias presentan inconvenientes a los estudiantes para su aprendizaje. Superar estos inconvenientes es, en gran parte tarea de los docentes, y ésta debe abarcar dos aspectos claves: detectar e interpretar las concepciones erróneas que los estudiantes tienen en cada tema y generar nuevas propuestas didácticas creando ambientes de aprendizaje apropiados. Para este cometido, las herramientas informáticas como apoyo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática son de gran importancia no sólo por su versatilidad e interactividad sino también por la posibilidad de acercarse a los conceptos a través de diferentes formas de representación de los mismos, en particular la representación gráfica. El presente trabajo expone una propuesta realizada en el contexto de la beca de investigación de estudiante avanzado de la UNMDP de una de las autoras (Juliana Gonzalez), que se puso en práctica a fin de contribuir con los alumnos de Bioquímica de la Fac. de Cs. Exactas y Naturales, en la superación de las dificultades de comprensión de conceptos relacionados con sucesiones numéricas, dando especial énfasis al de límite de una sucesión numérica. Se focaliza en la forma en que se gestó la propuesta didáctica específica y la apreciación que los estudiantes que trabajaron con el material propuesto tuvieron sobre el mismo y sus avances en la comprensión de los conceptos involucrados.

Palabras clave: sucesiones, límite, Geogebra , visualización

Introducción

Son muchos los temas de matemática que en el primer año de las carreras universitarias presentan inconvenientes a los estudiantes para su aprendizaje. Que puedan superar estos inconvenientes es, en gran parte tarea de los docentes, y ésta debe abarcar dos aspectos claves: detectar e interpretar las concepciones erróneas que los estudiantes tienen en cada tema y generar nuevas propuestas didácticas creando ambientes de aprendizaje apropiados. Para este cometido, las herramientas informáticas como apoyo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática son de gran importancia no sólo por su versatilidad e interactividad sino también por la posibilidad de acercarse a los conceptos a través de diferentes formas de representación de los mismos, en particular la representación gráfica. Esta última se relaciona directamente con la visualización, pero no como “lo que se ve”, sino como “la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende” (Cantoral y Montiel, 2003, p. 6). En este contexto está concebido el concepto de representación gráfica presente en el trabajo.

Se plantea en referencia a la construcción de los conceptos matemáticos, la importancia de destacar que cada representación que de ellos se haga es parcial respecto al concepto que representa y por ende se debe considerar como absolutamente necesaria la interacción de diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto (Duval, 1998). Otra visión, distingue entre la imagen que posee un individuo sobre un concepto y el concepto en sí. En matemática un concepto está dado por la definición, mientras que la

imagen de un concepto, es la idea que la persona se hace del mismo y que no necesariamente coincide con él (Vinner, 1991).

En relación a las concepciones erróneas en Educación Matemática, las investigaciones actuales las consideran como parte normal de los procesos de aprendizaje (Brousseau, 1986, en Ricco, 1995) y tratan de avanzar en lograr un esquema claro de interpretación y previsión de las concepciones inadecuadas (Radatz, 1979; Mulhern, 1989, en Rico, 1995) como así también por hacer una clasificación de los errores sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar, 1987).

En este marco, se analizan no sólo las concepciones erróneas de los estudiantes sino también las actividades que como docentes podemos acercar a fin de que puedan acceder a la comprensión de los conceptos. Entendiendo a la comprensión como competencia, punto de vista que considera la comprensión o el saber de un objeto matemático como la capacidad de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionándolas con los restantes objetos matemáticos y usando este objeto en toda otra situación problemática que se plantee (Font, Godino y D'Amore, 2007).

Se parte de que la comprensión de las propiedades y relaciones matemáticas constituyen el paso previo a la formalización y son una condición necesaria para interpretar y usar en forma adecuada la potencialidad de dicha formalización.

Los errores observados en el desarrollo de trabajos y exámenes de alumnos de Cálculo I, referidos a diferentes temas, motiva a pensar en la existencia de fallas en la adquisición del lenguaje adecuado y la interacción de éste con un razonamiento lógico, como posibles obstáculos de dicha comprensión.

A partir de las observaciones de clases teóricas y el trabajo con los estudiantes en las clases prácticas y sus manifestaciones sobre sus inconvenientes con el concepto sucesión numérica, se detectaron e identificaron los problemas principales que obstaculizan la comprensión del concepto de límite de sucesiones numéricas y la interpretación de su definición. Se evidenciaron inconvenientes por no interpretar el lenguaje formal y por la dificultad de interpretación gráfica y algebraica y por sobre todo la relación entre todas ellas.

Por otra parte, respecto de la incorporación de las tecnologías de la información y comunicación en la enseñanza de la matemática, numerosas investigaciones confirman que el uso de las mismas, ayuda a los estudiantes en el proceso de interpretación de conceptos matemáticos, a través de un mayor acceso a representaciones múltiples de los mismos que promueven la articulación entre diferentes representaciones de ellos, y también que el uso de este tipo de tecnología les permite trabajar individualmente, comprobando sus ideas y sus resultados en la resolución de problemas. (Martínez, Astiz, Medina, Montero y Pedrosa, 1998; Medina, Astiz, Vecino, Vilanova, Rocerau, Oliver, Valdez, Álvarez y Montero, 2000; Costa, Di Domenicantonio y Vacchino, 2010).

En general, los recursos, tanto manipulativos como virtuales, son inertes en sí mismos. Para que desempeñen un papel en el aprendizaje es necesario formular tareas que inciten la actividad y reflexión matemática [...] El recurso puede ayudar a crear un contexto rico para apoyar el diálogo del profesor con los alumnos a propósito de unas tareas que son específicas, y que ponen en juego los conocimientos matemáticos pretendidos. (Godino, Recio, Roa, Ruiz y Pareja, 2005, p. 11)

Es en este sentido que se trabajó en la realización de una propuesta didáctica específica para trabajar con los estudiantes conceptos involucrados en el tema sucesiones numéricas, incorporando el uso de tecnología informática, creando aplicaciones realizadas con software matemático.

Esta propuesta, realizada en el contexto de la beca de investigación de estudiante avanzado de la UNMdP de una de las autoras (Juliana Gonzalez), se puso en práctica a fin de contribuir con los alumnos de Bioquímica de la Fac. de Cs. Exactas y Naturales, en la superación de las dificultades de comprensión de conceptos relacionados con sucesiones numéricas, dando especial énfasis al de límite de una sucesión numérica. En el presente trabajo, se describe la forma en que se gestó la propuesta didáctica específica y la apreciación que los estudiantes que trabajaron con el material propuesto tuvieron sobre el mismo y los avances en la comprensión de los conceptos involucrados.

Metodología de trabajo

Previo a la confección de las actividades que se propusieron a los estudiantes, se entrevistó a dos docentes responsables de la asignatura Cálculo I para estudiantes de Bioquímica. La entrevista, de tipo semi estructurada, tuvo como objetivo relevar por un lado, el tipo de dificultades que habían observado en los estudiantes al abordar el concepto de sucesión numérica y en qué instancia lo pudo observar: en la clase práctica o en los exámenes (parciales o finales) y por otra parte, a criterio de cada docente, cuál o cuáles de esos conceptos consideraba que les presentan mayor nivel de dificultad a los estudiantes.

Teniendo en cuenta las consideraciones vertidas por las docentes y los errores detectados sobre el tema sucesiones en los parciales de la asignatura Cálculo I desarrollada durante el primer cuatrimestre de 2009, se diseñaron las actividades que incluyen ejercicios interactivos en Geogebra (ver ejemplos más adelante), y una guía en papel. Esta última tiene dos objetivos, por un lado dar el espacio para la realización de cálculos o desarrollos algebraicos y escribir las justificaciones solicitadas y por otro, contestar acerca de la apreciación (posibles dificultades o inconvenientes) que tienen sobre cada uno de los ejercicios resueltos y el soporte informático en sí.

Se seleccionó el programa GeoGebra por ser un software libre y de plataformas múltiples diseñado especialmente para trabajar en educación matemática. Es un entorno sencillo, amigable y potente con el que se pueden realizar fácilmente construcciones geométricas y analíticas, y además ofrece la posibilidad del desarrollo de aplicaciones interactivas que pueden ser utilizadas desde un navegador de Internet (applets).

Las actividades interactivas desarrolladas con el software Geogebra permiten a través de la manipulación de variadas y numerosas gráficas colaborar con: la interpretación de los conceptos relacionados con sucesiones numéricas: acotada, monótona, convergente, divergente, oscilante; y la relación entre ellos; la aprehensión de la noción intuitiva de límite de una sucesión numérica y la interpretación de este último concepto a través de su definición formal.

Por otra parte, la variedad de ejercicios presentados tuvo como objetivo que los mismos permitiesen ser generadores de inquietudes en los alumnos para que consulten sobre conceptos específicos dentro del tema sucesiones numéricas.

Para realizar el análisis del uso de la herramienta puesta a disposición de los estudiantes, se proporcionó a los mismos un cuestionario inicial antes de comenzar a trabajar con el material informático, un cuestionario final que contestaron a posteriori de dicho trabajo y se llevó un registro de observaciones durante el trabajo. El último instrumento que se tomó en cuenta para las conclusiones finales es el examen parcial de la asignatura.

El cuestionario inicial consta de una serie de preguntas que tienen como objetivo obtener una primera aproximación sobre la imagen que los estudiantes tienen de los conceptos: sucesión numérica; sucesión numérica acotada, monótona, convergente, divergente, oscilante; la relación entre los conceptos: sucesión convergente y sucesión que tiene límite finito; sucesión acotada y sucesión convergente; sucesión monótona y sucesión convergente; sucesión acotada y sucesión divergente; sucesión monótona y sucesión divergente; sucesión oscilante y divergente; sucesión monótona, acotada y convergente y la distinción de condiciones para determinar si una sucesión numérica es convergente, divergente, oscilante, monótona, acotada.

Por su parte, el cuestionario final contó con 16 preguntas que abarcaron los mismos temas y con el mismo objetivo que el cuestionario inicial.

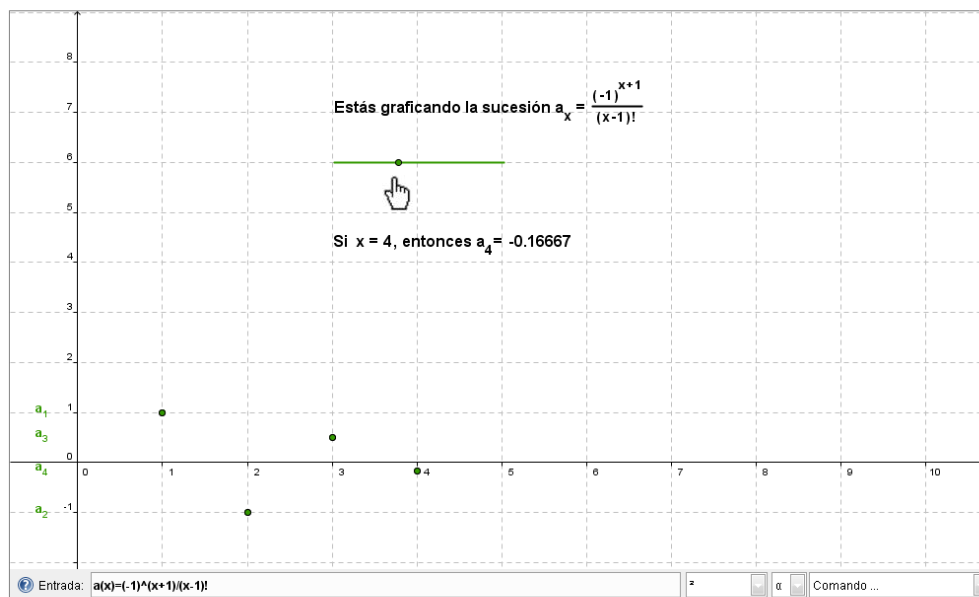
El registro de observaciones que se realizó para cada alumno que trabajó con el material informático constó de las anotaciones narradas que surgieron durante la devolución de cada uno de los instrumentos escritos, la observación y consultas realizadas en el desarrollo de la experiencia o en clase, y de la resolución del ejercicio sobre sucesiones del examen parcial.

Ejemplos de las actividades interactivas propuestas con software Geogebra

A modo de ejemplo, se presentan tres de las actividades del material informático.

Una de ellas permite generar gráficas de sucesiones (Gráfico 1). La aplicación es interactiva y permite ingresar el término general de la sucesión que se desea representar e ir graficando uno a uno los puntos que la componen, moviendo el deslizador.

Ejercicio 4

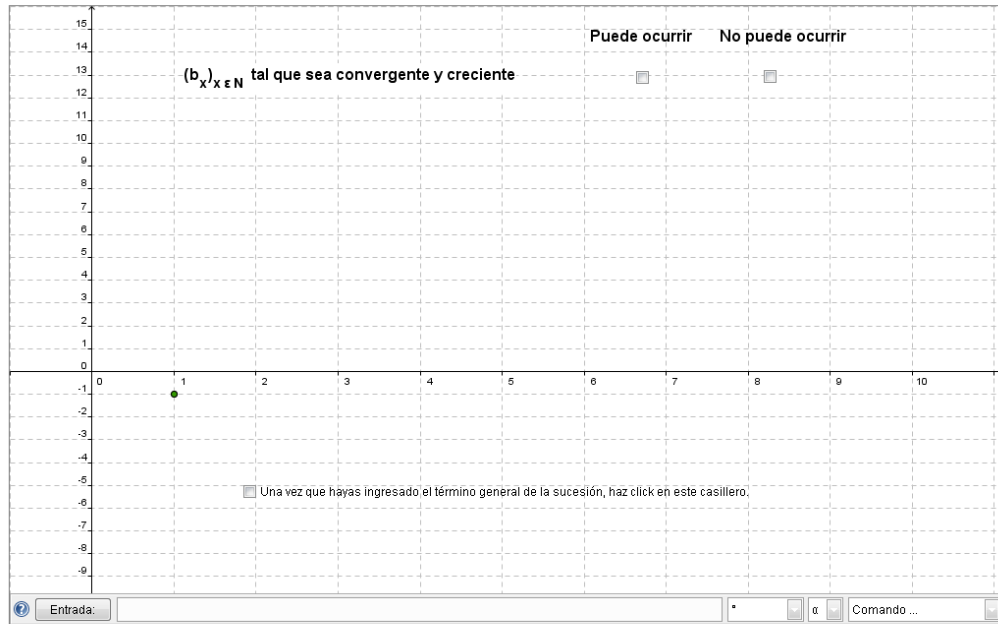


Juliana Gonzalez, Creado con [GeoGebra](#)

Gráfico 1

Otra de las actividades, tiene como objetivo dar ejemplos, si es posible de sucesiones que cumplan determinados requisitos. La aplicación, que se muestra en los gráficos 2 y 3, es interactiva y permite contestar por sí o por no a la posibilidad de existencia de la sucesión, y de ser sí, permite corroborar la respuesta que se da como ejemplo de sucesión.

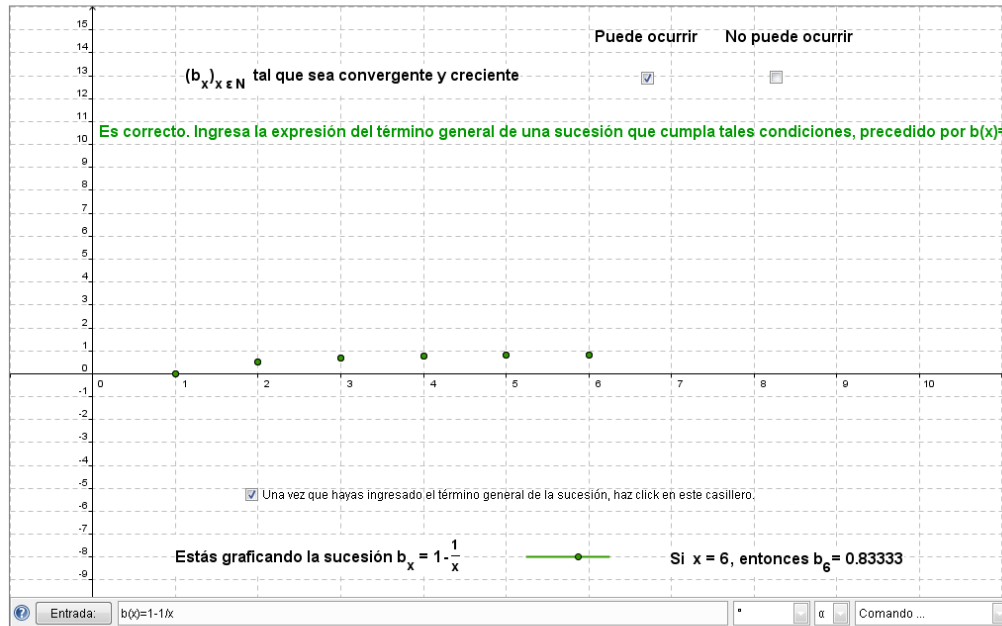
Ejercicio 9. Inciso a)



Juliana Gonzalez, Creado con [GeoGebra](#)

Gráfico 2

Ejercicio 9. Inciso a)

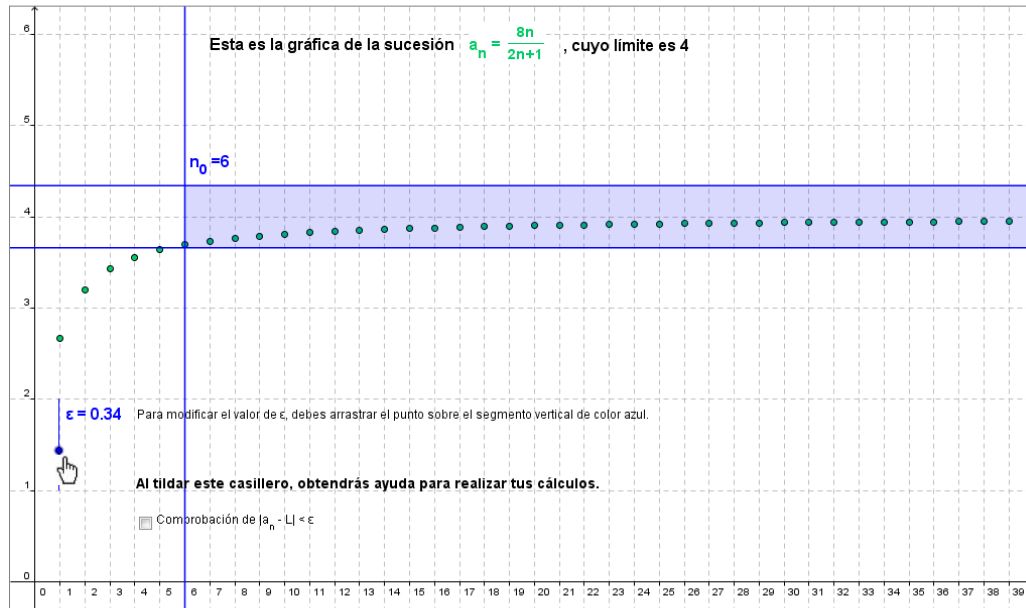


Juliana Gonzalez, Creado con [GeoGebra](#)

Gráfico 3

La tercera actividad que se presenta como ejemplo, tiene como objetivo interpretar la definición de límite de una sucesión numérica a través del análisis de sus diferentes componentes (*Gráfico 4* y *Gráfico 5*). La misma es interactiva y permite verificar cálculos que generalmente no se realizan en forma manual y probar con varios valores de ϵ cuáles son los intervalos de convergencia que se generan y con cada uno de ellos obtener el correspondiente valor de n_0 .

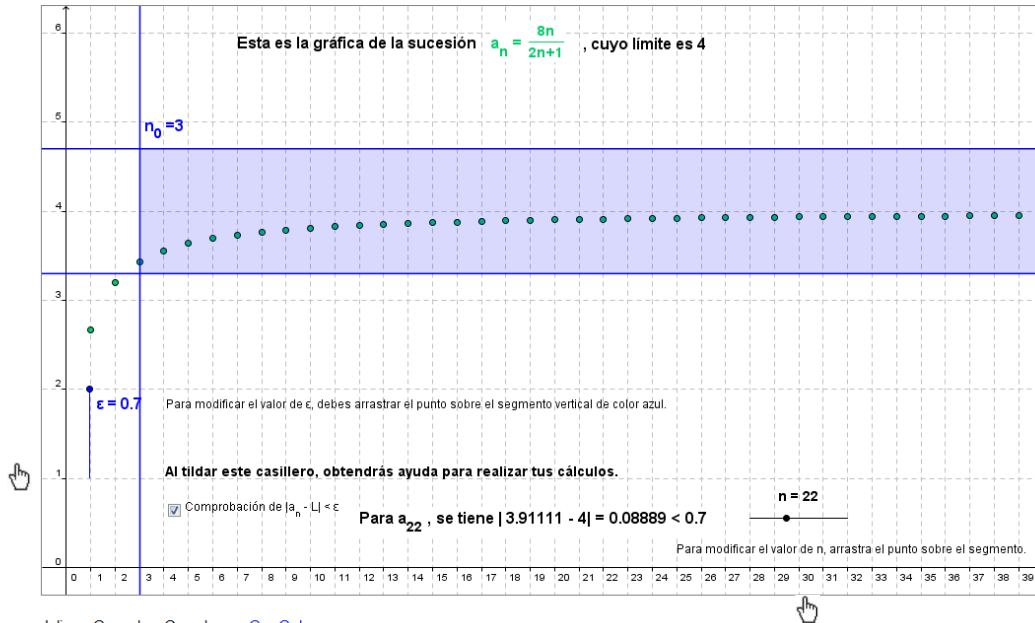
Ejercicio 13. Inciso a)



Juliana Gonzalez, Creado con [GeoGebra](#)

Gráfico 4

Ejercicio 13. Inciso a)



Juliana Gonzalez, Creado con [GeoGebra](#)

Gráfico 5

El trabajo de los estudiantes y sus apreciaciones acerca de la propuesta presentada

Los estudiantes que tuvieron a su disposición el material informático generado en Geogebra, trabajaron en el Laboratorio de Computación en cuatro encuentros de una hora cada uno, en horario de clases prácticas de la asignatura Cálculo I. En el ambiente de aprendizaje creado, se contó con la participación de dos docentes en su rol de observadores y consultores.

También tuvieron la posibilidad de llevar el material para trabajar en otro momento, fuera

del aula, para lo cual se puso a disposición para consultas, no sólo el encuentro en el Laboratorio de Computación o la clase, sino también la comunicación via e-mail (vía que en general no fue utilizada).

A través de los registros de observaciones de cada estudiante sobre el trabajo desarrollado en el Laboratorio de Computación se evidenció que el material informático no les generó inconvenientes en su uso, que la resolución de las actividades les permitió involucrarse de manera diferente con los conceptos sobre los cuales tenían dudas o no habían alcanzado a entender durante la clase teórica o práctica en el aula, que las consultas al docente las realizaban una vez que trabajaban en forma interactiva con el material, no directamente al enfrentarse con las consignas, pero no obstante, no se logró en general, un avance significativo en el empleo del lenguaje simbólico, aún cuando sí se logró un avance en la forma de expresión coloquial y en el uso de gráficos en las justificaciones que acompañaban las respuestas de las consignas propuestas.

Por su parte, los estudiantes manifestaron agrado por trabajar con este tipo de material, enfatizando la utilidad del mismo entre otras cosas por: poder generar muchos gráficos de sucesiones en forma sencilla; encontrarse con “diferentes maneras de decir lo mismo” y entenderlas; analizar gráficos “por partes” y poder modificarlos para ver sus consecuencias; lograr extraer conclusiones al interpretar gráficos diferentes “sobre el mismo tema”; tener las correcciones en forma inmediata.

Consideraciones finales

Las actividades con ejercicios interactivos desarrolladas en Geogebra se plantearon con el objetivo de contribuir con los alumnos de Cálculo I de Bioquímica de la Fac. de Cs. Exactas (UNMdP), en la superación de las dificultades de comprensión de conceptos relacionados con sucesiones numéricas, dando especial énfasis al de límite de una sucesión. En este contexto, se generó el ambiente de aprendizaje descrito en el trabajo, el que fue bien recibido y considerado como un aporte significativo por parte de los alumnos.

Es importante destacar que la propuesta didáctica no se queda en la mera presentación de ejercicios que incluyen gráficos con Geogebra, aún cuando los mismos sean interactivos, sino que no deja de lado la exigencia de respuestas escritas en papel como justificaciones en lenguaje coloquial, simbólico o a través de cálculos algebraicos. También se debe tener en cuenta que en el ambiente de aprendizaje, la participación del docente juega un rol importante como observador y consultor.

Volviendo a palabras anteriormente citadas:

[...] los recursos, tanto manipulativos como virtuales, son inertes en sí mismos [...] Puede ayudar a crear un contexto rico para apoyar el diálogo del profesor con los alumnos a propósito de unas tareas que son específicas, y que ponen en juego los conocimientos matemáticos pretendidos. (Godino *et al*, 2005, p. 11)

En este sentido se planteó la propuesta y a la luz de las consideraciones y observaciones realizadas, se está trabajando en continuar con esta modalidad para ser incorporada en otros temas.

Referencias Bibliográficas

- Cantoral R. y Montiel G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Revista Números España*, 55, 3-22.
- Costa V., Di Domenicantonio R. y Vacchino M. (2010). Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial. *Revista Unión (versión digital)*, 21, 173-185.
- Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201.
- Font V., Godino J. D. y D'Amore B. (2007). An onto-semiotic approach to
- Godino J., Recio A., Roa R., Ruiz F. y Pareja J. (2005). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. Recuperado el 10 de diciembre de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/criterios_evaluacion_recursos.pdf
- Martínez D., Astiz M., Medina P., Montero Y. y Pedrosa M. (1998). Aspectos del Uso del Cabri-Geometre en el Estudio de Triángulos. *Revista de Enseñanza y Tecnología*, 9(1), 28-35.
- Medina P., Astiz M., Vecino S., Vilanova S., Rocerau M., Oliver M., Valdez G., Álvarez E. y Montero Y. (2000). Gráficas de funciones para la resolución de problemas. El Derive puede ayudar. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O. e Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in high school matemátics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (1), 3-14.
- representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 2-7.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp 65-81). Londres: Kluwer Academia Publishers.