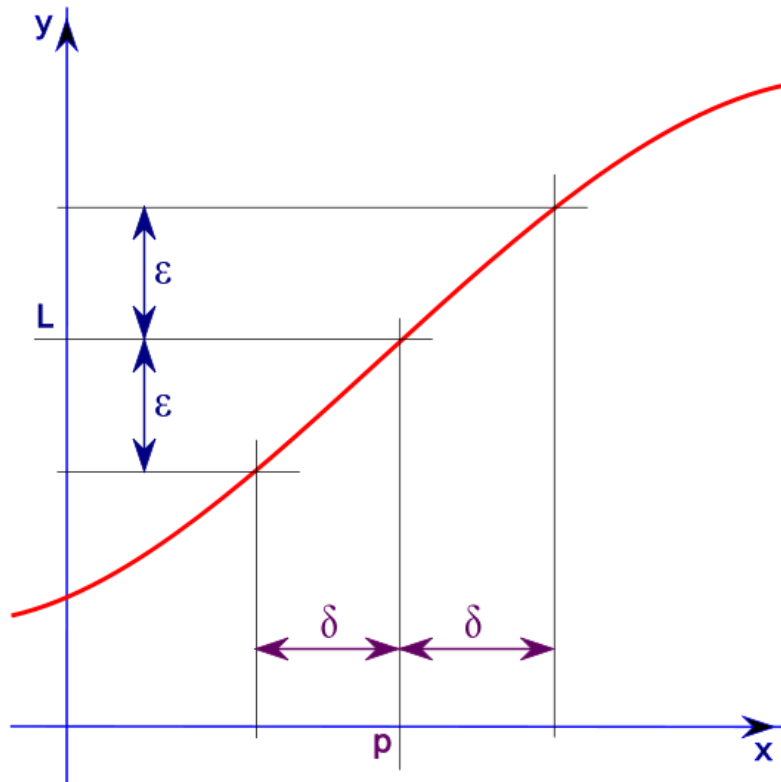


PROYECTO DE INNOVACIÓN EDUCATIVA: LÍMITE Y CONTINUIDAD



AUTORES:

JOSE ANTONIO FERNÁNDEZ PLAZA

LUIS GÓMEZ MALDONADO

ANTONIO JESÚS MARTÍNEZ RUEDA

LUIS ANTONIO TORRES SALINAS

1. INTRODUCCIÓN

Un Proyecto de Innovación Educativa es una propuesta sistemática para abordar la práctica educativa, sea en las dimensiones del currículum, de la didáctica, los materiales educativos, la evaluación, la gestión, y otros con el fin de lograr mejoras cualitativas y cuantitativas, mediante la participación activa de los miembros de la Comunidad Educativa.

Uno de los aspectos que tradicionalmente más dificultades presenta para el alumnado en matemáticas, es comprender la caracterización ε - δ del límite. Queremos hacer la diferenciación entre entender la caracterización y saber calcular límites. Al terminar la unidad didáctica referida a límites, bastantes alumnos y alumnas manejarán el cálculo de límites, con menor o mayor dificultad, pero serán muy pocos los que realmente hayan interiorizado lo que realmente significa el límite.

Por esto, en el proyecto de innovación educativa que se presenta a continuación se propone estudiar la definición formal de límite, concepto que no es fácil hacer llegar a los alumnos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \text{si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Nuestro proyecto de innovación educativa propone la realización de actividades en donde se vea la relación entre el ε y δ que aparecen en la definición. Para ello se utilizará una hoja de cálculo (Calc, Excel, Gnumeric,...), ya que con su ayuda haremos los cálculos pertinentes que nos ayudará a ver qué δ podremos coger a partir de un ε dado. Además, gracias a una herramienta que hay en la página web que presentamos a continuación, podremos manipular tanto los valores de δ y ε como su función, lo que nos ayudará a comprender la definición de límite formal analíticamente.

Así, estas herramientas nos permitirán introducir los aspectos conceptuales, mostrando explícitamente los valores que entran en juego y cómo interaccionan entre ellos, procedimentales, al calcular con ayuda de la hoja de cálculo estos valores, y las actitudes, las cuales surgirán del contacto con el ordenador y la reflexión sobre la traducción de símbolos matemáticos a una gráfica, comprendiendo la importancia de las representaciones (en este caso la tecnológica) para entender mejor el significado formal de un concepto tan abstracto como es el del límite, que abarcan la definición formal del límite.

2. PROBLEMA DETECTADO

La definición formal de límite (épsilon-delta) involucra el trabajo con entornos tanto del punto donde se quiere estudiar la existencia de límite como del candidato a límite lo cual resulta bastante complicado para el alumnado cuando se le pida por ejemplo el análisis de los errores de aproximaciones que se obtienen mediante tablas de valores.

Le proponemos el siguiente ejemplo a los alumnos: Considerando la función $f(x) = \frac{9995x+6}{10000x+1}$, calcular el límite de dicha función en $+\infty$. Para ello, lo lógico e intuitivo sería construir la tabla de valores tal y como mostramos a continuación:

| x | $f(x)=(9995x+6)/(10000x+1)$ |
|-----|-----------------------------|
| 1 | 0,99940006 |
| 10 | 0,999490005 |
| 100 | 0,999499001 |

Algún alumno/a puede decir que el límite es 1 pues puede prescindir de cifras decimales a partir de las milésimas, luego para él/ella el número estará más cerca de 1 que de 0,9995. La dificultad que se observa es que debido a realizar dichas aproximaciones no visualiza el valor del límite, lo cual se complica si el orden de la aproximación supera a la de la calculadora del alumno que suele ser de 10^{-8} .

Por tanto el problema que pretendemos resolver es cómo introducir, intuitivamente, la caracterización épsilon-delta de manera gráfica y numérica, promoviendo así en el alumnado la idea de “¿Cuánto me tengo que aproximar al punto $x=a$ obteniendo un valor δ para que las sucesivas imágenes se acerquen al límite L con un error inferior a un ε fijado previamente? ¿Y cómo se visualiza en una gráfica?”

Como se puede ver en el apartado de fundamentación teórica de nuestro proyecto, nuestro problema está estrechamente relacionado con las dificultades 2, 14, 15 y 18 que aparecen al final de dicho apartado.

3. ESTUDIO DE LAS CONDICIONES

3.1. ¿QUÉ NOS DICE EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS?

Según el REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre y la ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regulan la ordenación y se establece el currículo del bachillerato en el ámbito nacional, nuestro proyecto se diseñará para el curso de 1º de Bachillerato dentro del tema “Aproximación al concepto de límite de una función en un punto. Tendencia y continuidad. Estudio de discontinuidades”.

Según la ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía, no se hace mención explícita en donde incluir los contenidos relacionados con nuestro proyecto.

3.2. ¿QUÉ NOS DICE LA LEGISLACIÓN EN MATERIA DE INNOVACIÓN DOCENTE?

Según la ORDEN de 14 de enero de 2009, por la que se regulan las medidas de apoyo, aprobación y reconocimiento al profesorado para la realización de proyectos de investigación e innovación educativa y de elaboración de materiales curriculares, los Proyectos de Innovación Educativa y Desarrollo Curricular deberán reunir las siguientes características:

- 1º Proponer la introducción de cambios innovadores en la práctica docente o en la vida del centro para la mejora de los resultados y de los procesos educativos del centro, ya sean de tipo curricular, organizativo o funcional.

- 2° Atender a problemas o cuestiones que sean relevantes para el centro implicado y extrapolables al sistema educativo.
- 3° Promover la autoformación, el trabajo en equipo y las redes del profesorado, así como su implicación y participación activa en la búsqueda, adopción y consolidación en el tiempo de las prácticas innovadoras.
- 4° Contemplar en su planificación objetivos y actuaciones ajustados a las necesidades y a la diversidad de situaciones de aprendizaje del alumnado y recursos acordes a las posibilidades reales del centro.
- 5° Sustentarse en procesos de reflexión, indagación y/o investigación del profesorado sobre su propia práctica educativa.
- 6° Incorporar procedimientos de evaluación del alcance y de la eficacia de los cambios y de las mejoras que se esperan conseguir.

3.3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL PROYECTO

En un artículo publicado en 1981 (Tall y Vinner, 1981) estos autores señalan alguna de las imágenes conceptuales de los alumnos en torno al concepto de límite, que producen conflicto cognitivo. Destacan la imagen que los alumnos tienen del concepto de límite como proceso dinámico, cuando x se aproxima hacia "a", provocando que $f(x)$ se aproxime al límite sin alcanzarlo. En el estudio que llevan a cabo observan que esta imagen entra en conflicto con la definición formal del límite, puesto que prevalece sobre ésta y que los intentos de definición formal, en su mayoría, son incorrectos.

Para Brousseau (1983) el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo por lo que es necesario promover interacciones del alumno con una situación problemática que desestabilice sus concepciones para superar dicho obstáculo.

Brousseau distingue tres tipos de obstáculos según su origen: obstáculos de origen ontogénico (proviene de limitaciones del propio sujeto), obstáculos de origen didáctico (dependen del planteamiento educativo) y, finalmente, obstáculos de origen epistemológico (propios del concepto, de su génesis).

Bernard Cornu en lo referente al estudio del concepto de límite parte, en su tesis doctoral (Cornu, 1983), de una lista de obstáculos epistemológicos (fundamentados en el desarrollo histórico del concepto de límite) y de las concepciones de los alumnos sobre el mismo, para construir una propuesta didáctica. Dicha propuesta se basa en la realización de ciertas tareas que plantean situaciones abiertas y que favorecen las producciones orales (las cuales son grabadas para su posterior análisis) y escritas de los alumnos. Así diseña y desarrolla tres actividades de aproximación (geométrica, analítica y numérica) que pretenden plantear la necesidad de abordar el concepto límite, y otra más, que basada en las anteriores, lo introduce en sus aspectos geométrico y numérico.

Según un estudio (Blázquez, S. y Ortega, T. (2000)): El concepto de límite en la educación secundaria) realizado sobre alumnos de secundaria se señalan algunas dificultades:

1. Relacionan mal los distintos sistemas de representación funcional.
2. Les cuesta interpretar desigualdades.
3. Asocian "todas" las gráficas con funciones conocidas.
4. No entienden la idea gráfica de límite.

5. Errores de cálculo algebraico sencillo.
6. Consideran que son puntos distintos p^+ y p^- .
7. Definen mal las funciones.
8. La idea de que una función no tenga límite es más difícil de entender que el propio concepto.
9. Confunden límites finitos e infinitos.
10. Interpretan indeterminaciones como no existencia de límite.
11. Confunden límite con límite lateral.
12. No identifican el signo de la función en un entorno con el del límite y recíprocamente.
13. Creen que si el límite es cero, la función toma distintos signos en un entorno.
14. Interpretación errónea de tablas numéricas.
15. Proponen como límite el valor de la función en un punto "cercano".
16. Asocian límite con frontera y lo relacionan con los extremos de la función.
17. Identifican tender en una dirección con moverse en el eje X en esa dirección.
18. Les cuesta trabajar con entornos y con aproximaciones.
19. No entienden la dependencia funcional entre las variables.
20. No encuentran situaciones relacionadas con el concepto.

4. PROPUESTA DE ACCIÓN INNOVADORA

Nuestra propuesta sigue la siguiente estructura:

- ❖ Objetivo: Que los alumnos tengan una idea más formal del concepto de límite al introducir una medida de aproximación al candidato a límite de una función y que lo interpreten gráficamente.
- ❖ Temporalización: Dos sesiones en el aula de ordenadores.
- ❖ Recursos: Cañón, Ordenadores, Hoja de cálculo (Excel, Calc, Lotus 1-2-3...) y la página web <http://www.aulademate.com/contentid-26.html>
- ❖ Metodología:
 - **SESIÓN 1**: El profesorado planteará un ejemplo explicativo como el siguiente:

Dada la función $f(x)=x^2$, comprobar que el límite en el punto $a=2$ es $L=4$. Para ello el profesor elaborará la siguiente tabla. Les pide a los alumnos un valor para ϵ que podrá ser el que ellos quieran, para el valor de δ , el profesor les impondrá que sean 1, $0^{\circ}1$, $0^{\circ}01$... justificando al alumnado que esta decisión no generará dificultades añadidas al ejercicio.

Todos los valores de δ se tabularán, y a partir de ellos, se calcularán el resto de columnas, aclarando de manera intuitiva el significado de cada una de ellas:

$a-\delta$: aproximación por defecto de a (tendencia por la izquierda).

$a+\delta$: aproximación por exceso de a (tendencia por la derecha).

$|L-f(a-\delta)|$: error absoluto de la aproximación de L por la izquierda.

$|L-f(a+\delta)|$: error absoluto de la aproximación de L por la derecha.

| $\varepsilon=1$ | Δ | $a-\delta$ | $a+\delta$ | $f(a-\delta)$ | $f(a+\delta)$ | $ L-f(a-\delta) $ | $ L-f(a+\delta) $ |
|-----------------|----------|------------|------------|---------------|---------------|-------------------|-------------------|
| | 1 | 1 | 3 | 1 | 9 | 3 | 5 |
| | 0,1 | 1,9 | 2,1 | 3,61 | 4,41 | 0,39 | 0,41 |
| | 0,01 | 1,99 | 2,01 | 3,9601 | 4,0401 | 0,0399 | 0,0401 |
| | 0,001 | 1,999 | 2,001 | 3,996001 | 4,004001 | 0,003999 | 0,004001 |
| | 0,0001 | 1,9999 | 2,0001 | 3,99960001 | 4,00040001 | 0,00039999 | 0,00040001 |
| | 0,00001 | 1,99999 | 2,00001 | 3,99996 | 4,00004 | 0,0000399999 | 0,0000400001 |

Formularemos la siguiente pregunta a los alumnos: Viendo la tabla, ¿para qué valor de δ el error de aproximación de $L=4$, tanto por la izquierda como por la derecha, es menor que ε ?

Se puede ver que es para $\delta=0,1$. Los alumnos pueden ver también que a partir de ese δ tomando valores menores que $0,1$. Seguidamente el profesor les indicará que sea cual sea el valor de δ siempre que sea menor que $0,1$, ocurrirá lo mismo.

El profesor les pedirá que hagan lo mismo para valores de ε , $0,1$, $0,01$, $0,001$...

Si la tabla anterior es insuficiente para cierto ε , por ejemplo, $0,00001$ entonces deberán ampliar la tabla. Una vez hecho esto, les planteará la pregunta ¿ δ depende de ε ? ¿o es el mismo para todos?

Se realizará el mismo ejercicio pero cambiando de punto, por ejemplo $a=5$, y, finalmente se planteará la pregunta: Por ejemplo, ¿para $\varepsilon=1$ depende δ del punto a ? ¿o es el mismo que el anterior?

| $\varepsilon=1$ | Δ | $a-\delta$ | $a+\delta$ | $f(a-\delta)$ | $f(a+\delta)$ | $ L-f(a-\delta) $ | $ L-f(a+\delta) $ |
|-----------------|----------|------------|------------|---------------|---------------|-------------------|-------------------|
| | 1 | 4 | 6 | 16 | 36 | 9 | 11 |
| | 0,1 | 4,9 | 5,1 | 24,01 | 26,01 | 0,99 | 1,01 |
| | 0,01 | 4,99 | 5,01 | 24,9001 | 25,1001 | 0,0999 | 0,1001 |
| | 0,001 | 4,999 | 5,001 | 24,990001 | 25,010001 | 0,009999 | 0,010001 |
| | 0,0001 | 4,9999 | 5,0001 | 24,999 | 25,001 | 0,00099999 | 0,00100001 |
| | 0,00001 | 4,99999 | 5,00001 | 24,9999 | 25,0001 | 0,0000999999 | 0,0001000001 |

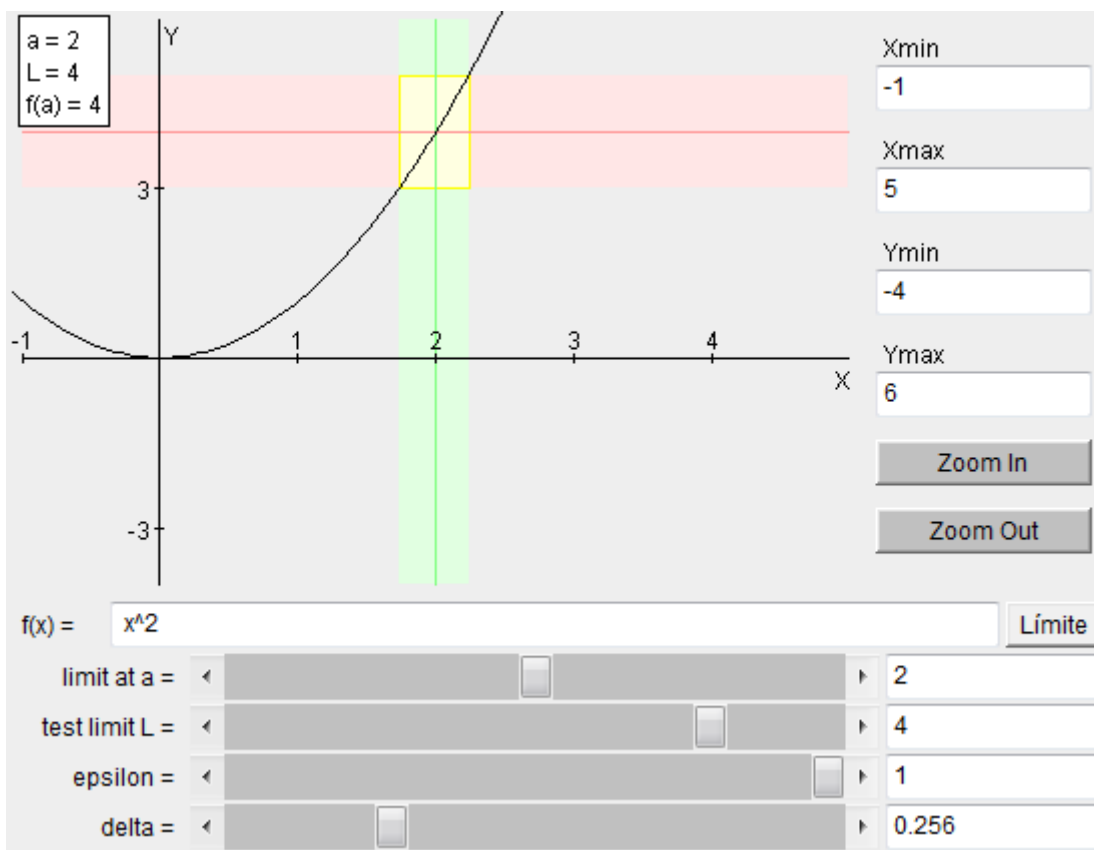
Tal y como se puede ver en la tabla, δ en este caso tiene que ser menor que $0,01$, justificando así que δ depende del punto.

Seguidamente plantearemos un problema de ampliación: *Un alumno tiene que calcular el valor de $\sqrt{2}$ con 9 cifras decimales, pero su calculadora sólo le muestra 8. Sabiendo que $\sqrt{2}$ es el límite de \sqrt{x} cuando x tiende a 2, considerando el error como el valor absoluto de la diferencia entre $f(a+\delta)$ y $f(a-\delta)$ ¿qué valor de δ se puede tomar para calcular $\sqrt{2}$ con la precisión pedida? Indica dicha aproximación.*

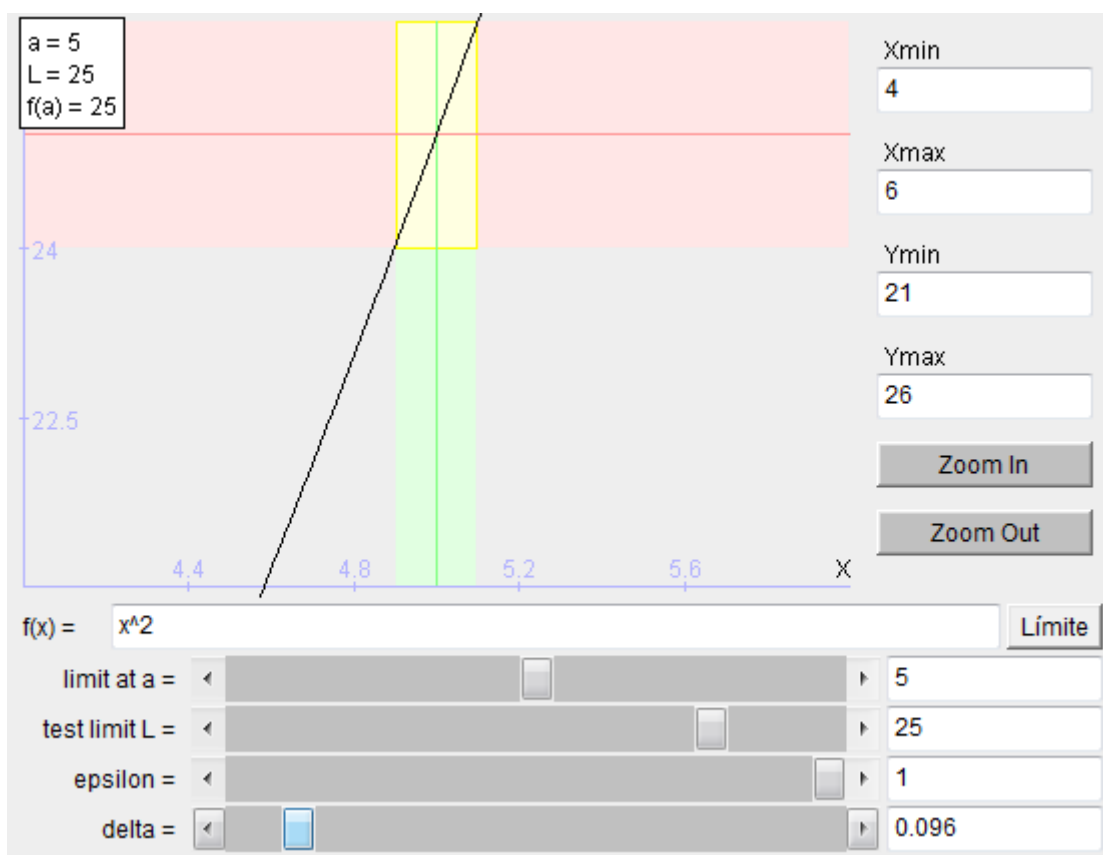
| $\varepsilon=10^{-9}$ | Δ | $a-\delta$ | $a+\delta$ | $f(a-\delta)$ | $f(a+\delta)$ | $ f(a+\delta)-f(a-\delta) $ |
|-----------------------|-------------|-------------|-------------|---------------|---------------|-----------------------------|
| | 1 | 1 | 3 | 1 | 1,732050818 | 0,7320508076 |
| | 0,1 | 1,9 | 2,1 | 1,378404875 | 1,449137675 | 0,0707327994 |
| | 0,01 | 1,99 | 2,01 | 1,410673598 | 1,417744698 | 0,0070710899 |
| | 0,001 | 1,999 | 2,001 | 1,413859965 | 1,414567072 | 0,0007071068 |
| | 0,0001 | 1,9999 | 2,0001 | 1,414178207 | 1,414248927 | 0,0000707107 |
| | 0,00001 | 1,99999 | 2,00001 | 1,414210027 | 1,41421718 | 0,0000070711 |
| | 0,000001 | 1,999999 | 2,000001 | 1,414213209 | 1,414213926 | 0,0000007071 |
| | 0,0000001 | 1,9999999 | 2,0000001 | 1,414213527 | 1,41421368 | 0,0000000707 |
| | 0,00000001 | 1,99999999 | 2,00000001 | 1,414213559 | 1,414213576 | 0,0000000071 |
| | 0,000000001 | 1,999999999 | 2,000000001 | 1,414213562 | 1,414213563 | 0,0000000007 |

Viendo los resultados de esta tabla, llegamos a la conclusión que tendremos que considerar $\delta=0'000000001$, obteniéndose una aproximación de 1'414213563 para $\sqrt{2}$.

➤ **SESIÓN 2:** El profesor le dará la interpretación gráfica con la ayuda de la página web, resolviendo los mismos problemas, pero cambiando las funciones.



Este recurso nos permite calcular δ con mayor precisión.



En este ejemplo estamos hallando otro δ distinto del anterior.

5. CONCLUSIONES

Llegamos a las siguientes conclusiones y reflexiones sobre el proyecto de innovación educativa que hemos realizado para resolver la problemática existente con la definición formal de límite:

- El hecho de trabajar con los ordenadores puede provocar en el alumnado un interés especial, porque aunque la mayoría de ellos ya poseen ordenador en su casa posiblemente ninguno se haya parado a usarlo para un fin educativo. Hay que tener la precaución de no abusar de los medios TIC porque se podría perder el carácter innovador y motivador que posee.
- Nos ha parecido interesante introducir una herramienta como es la hoja de cálculo, ya que además ayudarnos a conseguir el objetivo planteado, el uso de este tipo de software será extensivo a otras unidades didácticas, como por ejemplo las referidas a probabilidad y estadística. Asimismo, con el uso de las hojas de cálculo ampliamos la gama del software que podemos utilizar en el aula para trabajar matemáticas, acompañando a programas como Geogebra, Cabri, Derive, ...
- Trabajaremos matemáticas abstractas como es el análisis de los parámetros ϵ y δ de la caracterización de límite y crearemos una idea más profunda de la definición formal mediante la interpretación gráfica que obtenemos gracias a la página web con la que hemos trabajado.

- Sabemos que muchos alumnos se pierden al no saber interpretar esta definición, por lo que buscamos también que gracias a la interpretación gráfica hecha en la página web, los alumnos tengan el dibujo en mente cada vez que se enfrenten a la definición formal de límite.
- Planteamos también una actividad de ampliación para aquellos alumnos que avanzan con rapidez y captan fácilmente el significado de la definición formal de límite, para que puedan profundizar o ampliar lo estudiado mediante un trabajo más autónomo.

6. BIBLIOGRAFÍA

- ✓ *REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre y la ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regulan la ordenación y se establece el currículo del bachillerato en España.*
- ✓ *ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía.*
- ✓ *ORDEN de 14 de enero de 2009, por la que se regulan las medidas de apoyo, aprobación y reconocimiento al profesorado para la realización de proyectos de investigación e innovación educativa y de elaboración de materiales curriculares.*
- ✓ *Tall, D. y Vinner, S (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics.*
- ✓ *Brousseau, G.; Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática.*
- ✓ *Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.*
- ✓ *Blázquez, S.; Ortega, T., (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En Cantoral, R. (Ed.) El futuro del cálculo infinitesimal. ICME 8. México: Grupo Editorial Iberoamérica.*
- ✓ *Gorgorio, N., Deulofeu, J., y Bishop, A. (coordinadores) (2000). Matemáticas y Educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Grao. Barcelona.*
- ✓ *Sánchez, Claudio. La biblia de Excel 2000. M. ediciones.*
- ✓ <http://www.duiops.net/manuales/excel/excel.htm>
- ✓ <http://office.microsoft.com/en-us/excel/default.aspx>
- ✓ <http://www.aulademate.com/contentid-26.html>