LA NOCIÓN DE CURVA EN DESCARTES VISTA COMO PRÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XVII

Alberto Forero Poveda - Jhon Helver Bello Chávez
albertoforero84@gmail.com - jhonhelver@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Tema: Educación Matemática e Historia de la Matemática
Modalidad: MC
Nivel educativo: Terciario-Universitario
Palabras clave: Historia, práctica social, curva, representación.

Resumen
El conocimiento profesional del profesor de matemáticas involucra en sus líneas de trabajo la comprensión de elementos históricos que fundamentaron los conceptos. Es bien sabido que el desarrollo de los conceptos en matemáticas está constituido por una serie de actividades y prácticas sociales relacionadas con la resolución de problemas en diferentes áreas. Para Descartes, el objetivo principal en la "Geometría" era la indagación sobre la aceptabilidad de una línea curva como geométrica, siendo construida por instrumentos mecánicos o definida a partir de una ecuación; complejizando la visión de la geometría que se presentaba en la Grecia antigua. Descartes se basa en suponer que los problemas se pueden resolver usando diferentes representaciones de una curva, lo que constituye para el profesor de matemáticas una reflexión necesaria para su formación, en cuanto al reconocimiento de los tipos de curva en Descartes y cómo este aspecto le dio la posibilidad de emplear diversas estrategias para la resolución de problemas específicos. Este minicurso propone el tratamiento de la noción de curva, como un ejemplo de las prácticas asociadas a Descartes para la resolución de problemas geométricos, analizando las diferentes herramientas que posibilitaron la comprensión y el tratamiento de curvas y sus aplicaciones.

Sobre los estudios previos a Descartes

En la construcción de conocimiento matemático siempre se ha dado un intento por caracterizar y definir los elementos que en matemáticas son importantes para el desarrollo y solución de situaciones específicas, en el caso de las curvas, se encuentran antecedentes en el problema de caracterizarlas desde la geometría antigua; en esta época las curvas se podían clasificar en mecánicas o en geométricas, donde las primeras se distinguían por ser dibujadas mediante algún instrumento mecánico; esta distinción le dio un carácter más importante a las curvas geométricas, pues podían ser tratadas con exactitud, desde el punto de vista de la medida. Esta caracterización se fue complejizando, para llegar a definir que una curva se podía distinguir por las formas de especificación de la misma, de esta forma, una curva podía clasificarse en especificación por propiedades o en especificación por génesis, *la especificación por propiedades recae sobre una propiedad (generalmente cuantitativa) que* *cumplen todos los puntos de la curva y es suficiente para determinarla, la especificación por génesis se refiere a la forma como la curva puede ser construida* (Molland, 1976), que recae en la discusión que se presenta desde la antigüedad sobre qué tipos de construcción son considerados como aceptables en geometría.

En particular, para la geometría antigua, además de concentrar su interés en los procesos demostrativos de la matemática, discutía sobre la construcción de las diferentes curvas (sean mecánicas o geométricas), específicamente sobre los tipos de instrumentos que pueden usarse para su construcción(incluyendo la regla y el compás), pues, en la solución de problemas, entre los que se encuentran, por ejemplo, los tres problemas griegos clásicos, la forma de caracterizar la solución era fundamental, de tal forma que *las construcciones instrumentales no eran aceptadas desde la geometría griega pura por su "carencia de rigurosidad"* (Molland, 1976); desde esta perspectiva, algunas de las especificaciones de curvas por génesis no eran totalmente aceptadas, como en el caso de Apolonio, para la construcción de uno cono por un movimiento de una línea recta que pasa por un punto fijo exterior a un círculo y pasa por todos los puntos de la circunferencia del círculo.

En la geometría griega se pueden presentar diferentes ejemplos, donde los autores trabajaron sobre construcciones caracterizadas por especificaciones por propiedades; para (Molland, 1976), Euclides, por ejemplo construye definiciones de línea recta y círculo, que muestran su forma de tratar una construcción: *Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí*, que no muestra un procedimiento para construirlo, aunque para él se hace necesario complementar tales definiciones con postulados que le permitan construir: *"Para describir un círculo con un centro y una distancia dada"*, que en general ocultan el problema de la instrumentalización y evidencian que la discusión sobre la aceptabilidad de una construcción debe ampliar sus horizontes de tratamiento.

En el contexto de la geometría griega pura, el problema de la demostración era fundamental en los trabajos de construcción y determinación de propiedades geométricas en el desarrollo del conocimiento científico; en este sentido la representación de una curva tenía un papel secundario en el proceso, pues, por ejemplo, era suficiente tener una especificación por propiedades para tratar una curva, lo que constituía un tratamiento de la matemática con un fuerte componente filosófico, por su preocupación por el rigor, más que por su diversidad de formas de representación, consideración que luego Descartes discute a partir de su Mathesis Universalis, pues se declara que la matemática se retoma en todas las ciencias, lo que amplía su perspectiva hacia las formas de representar.

En el desarrollo de la geometría, las construcciones tomaron un papel fundamental en la solución de problemas, esta importancia dio un lugar especial a la construcción de curvas, como herramientas o como métodos en la resolución de problemas, por tal motivo, por ejemplo Pappus hace una caracterización de las curvas, que es más una distinción de los problemas geométricos, a partir de las líneas que se usan en la construcción. *Esta clasificación, que Pappus atribuye a muchos geómetras antiguos es famosa y fue tomando un lugar destacado en Descartes* (Molland, 1976).

Entonces, para Pappus, desde la antigüedad los problemas se pueden clasificar en planos, sólidos y lineales, aquellos que pueden resolverse con solo líneas rectas y circunferencias son llamados planos, los problemas que pueden ser resueltos en el descubrimiento de una o más secciones cónicas se denominan sólidos (por el uso de figuras solidas en su construcción) y los problemas lineales se caracterizan por que usan líneas curvas anteriormente tratadas en los problemas planos y sólidos, *entre las curvas usadas en los problemas lineales se encuentran las espirales, las cuadratrices, las concoides y las cisoides, que tienen propiedades especiales* (Molland, 1976). Esta clasificación es un gran paso para el reconocimiento de las curvas mecánicas como herramientas o como soluciones de problemas geométricos.

En este sentido, en el tratamiento de líneas curvas en la geometría antigua, a pesar de fundamentar su trabajo principalmente en el rigor matemático, existen varios elementos que sirvieron como fundamento para la construcción y el manejo de diversas representaciones asociadas a las líneas curvas, que posteriormente darían una mayor comprensión de las situaciones problema que fundamentaron la geometría, por ejemplo, en el caso de las secciones cónicas, según BL Van Der Waerden (1985) *el método de coordenadas había sido ya utilizado por Apolonio en su "Cónica", en este trabajo un punto variable de una sección cónica es determinado por dos líneas segmentos, comúnmente llamadas "abscisa" y* *"ordenada", declarando que el método cartesiano tiene claramente sustento en raíces antiguas.*

Apolonio establece perspectivas genéticas y por propiedades para la definición de las secciones cónicas, su trabajo permite distinguir las propiedades que van a tener las secciones que se forman al cortar un cono por un plano de diferentes formas, Descartes no desconoce estas perspectivas y reconoce las propiedades geométricas determinadas en cada sección, pero además él hace uso de una instrumentalización mecánica para su caracterización. En términos cartesianos las curvas pueden ser descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos de varias líneas, cada uno siendo determinado por el anterior, lo que determina que en Descartes una curva puede ser constituida por una variación, mientras que en Apolonio la curva se construye por un corte de un plano a un cono.

La Noción de curva en Descartes

La geometría, desde la antigüedad se anunciaba como un eje principal del trabajo en matemáticas, los diferentes problemas que se encontraban en el desarrollo de conocimiento científico estaban asociados directamente a una o varias construcciones geométricas, en el caso de las curvas, éstas toman un papel importante en la solución y caracterización de las situaciones, por lo tanto la especificación y definición de las líneas curvas era un aspecto crucial que presentaría diversas heurísticas para el trabajo en matemáticas. En este sentido, en el siglo XVII, la representación se postula como una temática principal del trabajo para la resolución de problemas, *no solo en el trabajo en matemáticas, sino también en aspectos políticos, religiosos y en discusiones filosóficas* (Dennis, 1997), pues se hacía indispensable construir formas de representación, que posteriormente apoyaron los procesos de significación de diferentes objetos matemáticos, encontrando diversas formas de tratar una curva asociada a un problema específico.

A diferencia de las construcciones encontradas en los problemas geométricos, Descartes distingue en las curvas diversas cualidades que las hacen poder interpretar desde diferentes representaciones y bajo diversas formas de especificación, es decir, para Descartes, el punto de partida es la construcción geométrica que se obtiene, sea esta por una definición por propiedades o por medio de una instrumentalización mecánica, según David Dennis (1997), Descartes no realizaba construcciones gráficas de ecuaciones, él llegaba a interpretar simbólicamente las diferentes construcciones que se obtenían de una situación específica, de esta forma Descartes distingue a las líneas curvas por medio de relaciones entre líneas rectas (segmentos, en el caso) dadas, a través de expresiones simbólicas.

El avance fundamental de Descartes se dio principalmente en cuanto a la obtención de operaciones fundamentales entre segmentos, que le permitió por ejemplo tener un segmento de línea como producto de otros dos, a través de la comprensión de la razón y la proporción. Descartes define el producto y la división de la siguiente forma: “la multiplicación: Sea, por ejemplo, AB la unidad y que sea preciso multiplicar BC por BD: solamente debo unir los puntos A y C, trazando DE paralela a CA, siendo BE el resultado de esta multiplicación. ” y "La división: Si se requiere dividir BE por BD, Se puede unir E con D y trazar AC paralela a DE, entonces BC es el resultado de la división" que se pueden describir a partir de las siguientes proporciones: para la multiplicación: AB : BC = BD : BE y para la división: BE : BD = BC : AB.

La interpretación del sentido operacional con magnitudes, entre otras, fue fundamental para el trabajo sobre la interpretación de las representaciones simbólicas de curvas, como afirma (Molland, 1976), *se establece una analogía entre las operaciones con líneas rectas (o, en terminología, segmentos de línea) y las operaciones con números*, además en términos de la importancia del lenguaje simbólico en el trabajo sobre diversas situaciones geométricas, Judith Grabiner (1995) considera que los matemáticos posteriores a Descartes, hablaban del álgebra como una ciencia de números, no de magnitudes geométricas, Descartes tomó su etapa notacional en servicio de la resolución de problemas, lo que permitió hablar de las curvas a partir de sus ecuaciones algebraicas asociadas.

Situaciones de tratamiento de las curvas en Descartes

El gran avance de Descartes frente a la caracterización de curvas se presentó en el desarrollo de situaciones mecánicas que determinaban curvas, para las cuáles él requería categorizarlas, como de primer orden, si representaban una ecuación cuyo grado no era mayor al de un rectángulo formado por dos líneas o el cuadrado de una línea (curva de primer orden o clase) o de mayor orden según el grado de la ecuación asociada. Por ejemplo, en un caso pretendía estudiar la siguiente curva:

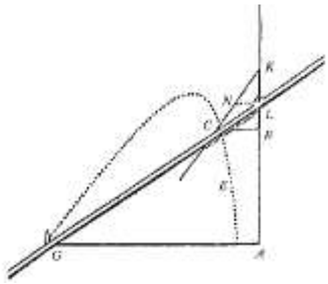

Figura 1. Construcción mecánica de la hipérbola en Descartes. Tomada de Rene Descartes' Curve-Drawing Devices

David Dennis (1997) *afirma que Descartes encontró la ecuación de la curva(construida mecánicamente) de la siguiente forma: Introduce las variables (Descartes usa el término “Cantidades desconocidas e indeterminadas”) AB=y, BC=x (en notación moderna C=(x,y)), y las constantes (“Cantidades conocidas”) GA=a, KL=b, y NL=c. Descartes rutinariamente usa las letras minúsculas x, y, z como variables y a, b, c como constantes; nuestra convención moderna requiere de su uso. Descartes, sin embargo, no tiene convención sobre que variable fue usada horizontalmente, o en qué dirección (derecha o izquierda) una variable fue medida (aquí, x es medida a la izquierda). No había, en general, una demanda que x, y sean medidas en ángulos rectos la una a la otra. Las variables fueron adaptadas a la situación geométrica. No había un uso muy vacilante de valores negativos (a menudo llamadas “raíces falsas”), y en más situaciones geométricas ellas fueron evitadas.*

Continuando con la derivación, como los triángulos KLN y KBC son semejantes, tenemos que $\frac{c}{b} = \frac{x}{BK}$, *así* $BK = \frac{b}{c}x$, *y así* $BL = \frac{b}{c}x - b$. *De esto se sigue que* $AL = y + BL = y + \frac{b}{c}x - b$. *Como los triángulos LBC y LAG son semejantes, tenemos que* $\frac{BC}{BL} = \frac{AG}{AL}$. *Esto implica las siguientes cadenas de ecuaciones:*

$$\frac{x}{\frac{b}{c}x - b} = \frac{a}{y + \frac{b}{c}x - b} \leftrightarrow x\left(y + \frac{b}{c}x - b\right) = a\left(\frac{b}{c}x - b\right)$$

$$xy + \frac{b}{c}x^2 - bx = \frac{ab}{c}x - ab$$

$$x^2 = cx - \frac{c}{b}xy + ax - ac$$

de esta ecuación, Descartes afirma que la curva EC es de primera clase, siendo, en efecto, una hipérbola.

Estas y otras situaciones muestran que para Descartes fue indispensable, al tratar una construcción geométrica (sea ésta un sustento para solucionar un problema, o el problema en sí), el tratamiento de las curvas a partir de ecuaciones, en términos de su *"Taxonomía de las curvas"* (Bos, 1981), lo que comprueba la necesidad en el uso y construcción de representaciones de diferentes elementos matemáticos para su comprensión.

Reflexión Final

Para (Dennis, 1997), *Descartes, en sus trabajos más tempranos enfatizaba la importancia de hacer fuertes conexiones entre acciones físicas y sus posibles representaciones en diagramas y lenguaje. Por ejemplo, en "Las reglas para la dirección del espíritu": "Regla 14: El mismo problema deberá ser entendido como un relato para la extensión actual de cuerpos y al mismo tiempo deberá ser completamente representado por diagramas para la imaginación, para así ser mucho más percibido distintivamente por el intelecto"* presenta cómo sus concepciones filosóficas influenciaron gran parte del trabajo matemático, en este caso las representaciones asociadas a las curvas, junto con la instrumentalización usada para su construcción.

Uno de los aspectos a los que Descartes le dedicó bastante tiempo fue a la caracterización de las líneas curvas, pues varios problemas, entre los que se encuentran los problemas griegos clásicos, el problema de Pappus, la resolución de ecuaciones, involucraban en su desarrollo o solución a una o varias curvas; ésta situación hizo que se discutiera la clasificación de las líneas curvas en geométricas o mecánicas, pues uno de los trabajos importantes en Descartes fue la instrumentalización de las construcciones geométricas asociadas a las líneas curvas que se necesitaban en el problema, lo que le posibilitó una caracterización que no fuera sobre el instrumento sino sobre la ecuación determinada.

Descartes afirmaba que la geometría se concibe como "la ciencia que se encarga de la medida de todos los cuerpos" y que en este sentido, él mediante sus instrumentos mecánicos, que posteriormente trataba desde ecuaciones específicas, podía controlar y conocer medidas asociadas a los problemas, es decir que el carácter instrumental de la construcción de la curva no le quitaba su carácter geométrico, lo que la hacía una opción válida en la resolución de situaciones específicas. De esta forma, garantizaba que las cuadratrices, las concoides y cisoides pudieran ser clasificadas como curvas, teniendo en cuenta que la clasificación no se pretendía realizar por mecánicas o geométricas, sino más bien (en el sentido de una evolución de la clasificación hecha por Pappus), a partir de la determinación de una expresión simbólica asociada, que la curva se clasificara según el grado de su ecuación.

Finalmente con las investigaciones y trabajos de Fermat y Descartes se pudo llegar a una buena clasificación de las curvas (para el caso de las curvas algebraicas); ambos autores, por diferentes medios llegaron a que cada ecuación cuadrática en X y Y representa una línea recta o una sección cónica y Descartes afirmó que estas pertenecían a las de primer tipo y así sucesivamente según el grado de la ecuación. En general, es posible dar una posición importante a la noción de curva en el tratamiento de situaciones geométricas, ésta noción se ha involucrado en diferentes discusiones en el marco del rigor en matemáticas, desde allí existen diferentes visiones que la hacen más o menos trascendental en el desarrollo de la matemática (debido a su carácter representacional); de esta forma, basados en el trabajo realizado en el siglo XVII por Viete, Descartes, Fermat, entre otros, se logró mostrar que un lenguaje o un diagrama tiene la capacidad de presentar herramientas y/o soluciones a problemas geométricos y además puede ampliar la comprensión de un objeto matemático.

Referencias bibliográficas

Álvarez, C.: Descartes y la ciencia del siglo XVII. Siglo XXI. México, 2000. Caps.1,3,4.

H.J.M. Bos.(1981). On the Representation of curves in Descartes` Geométrie Springer. Archive for History of Exact Sciences. Vol. 24, No. 4, pp. 295-338.

B.L. Van der waerden. (1985). A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer Verlag.

Campos, A. (2000). Acerca de la Epistemología de la Matemática. Bogotá, Colombia. Universidad Nacional de Colombia.

David Dennis. (1997). Rene Descartes' Curve-Drawing Devices: Experiments in the Relations Between Mechanical Motion and Symbolic Language: Mathematics Magazine, Vol. 70, No. 3, pp. 163-174. Mathematical Association of America.

F. Vera, Aguilar. (1970). *Cónicas. Apolonio de Perga* (en *Científicos griegos*, Introducción y notas) Madrid.

Forero, A., Morales, J. (2012). Desarrollo epistemológico de las Cónicas. Cuarto Congreso sobre la enseñanza y aplicación de las matemáticas: Bachillerato, Superior y Posgrado. Cuautitlán, México. UNAM.

M.L. Puertas. (1996). *Elementos de Euclides*. Traducción y notas. 3 vols. Gredos, Madrid.

Molland, A.G. (1976). Shifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry. Historia Matemática 3. Aberdeen, Reino Unido. University of Aberdeen.