EL PAPEL DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Ángela Patricia Camargo
acamargo@ucu.edu.uy
Universidad Católica del Uruguay

Tema: Pensamiento matemático avanzado
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Terciario universitario
Palabras clave: Cálculo diferencial - Registros de representación semiótica – Enseñanza

Resumen
Uno de los desafíos de la Didáctica de la Matemática es indagar acerca de los procesos cognitivos vinculados al aprendizaje de la Matemática. Raymond Duval, en 1995, introduce el concepto de "Registro de Representaciones semióticas". Plantea que para lograr la conceptualización, el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. (Duval 2004). Por otra parte, afirma también, que su uso debe ser enseñado para que el alumno pueda aprenderlos, y resalta la necesidad de presentarle tareas específicas con este fin.
Desde esta perspectiva, y en el marco de una Tesis de Maestría, se plantea un diseño experimental para poner a prueba intervenciones didácticas para la enseñanza de la derivada en un curso de Cálculo Diferencial del primer bimestre, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica del Uruguay. A grandes rasgos, tales intervenciones consisten en un conjunto de ejercicios que serán presentados por el docente enfatizando el trabajo con traducción de registros, acompañados de pruebas que con esta misma idea, deben resolver los estudiantes en forma individual.

Este trabajo se encuentra en el marco de una Tesis de Maestría en Educación con énfasis en la Didáctica de la Matemática, de la Universidad Católica del Uruguay. Se presentará un conjunto de nociones básicas del marco teórico en el que está encuadrado, se comentará brevemente los rasgos generales del diseño experimental, para luego compartir algunos datos del análisis realizado hasta el momento y las respectivas conclusiones preliminares.

La Didáctica de la Matemática se ha ido conformando como tal en el siglo pasado de la mano de dos campos disciplinares concretos: la Matemática y la Psicología cognitiva, (Kilpatrick, et. al, 1992). Gracias a los aportes de ésta última, un volumen importante de los trabajos en Didáctica de la Matemática se han concentrado en el "cómo se aprende Matemática", y del intento de responder esta pregunta diversos autores han elaborado teorías que intentan describir o explicar estos fenómenos.

El nivel de conocimiento matemático con que ingresan los estudiantes a la Universidad Católica del Uruguay, se refleja desde las pruebas diagnósticas al ingreso. Las mismas muestran carencias de los alumnos respecto a los conceptos matemáticos y las competencias matemáticas que las facultades esperan de sus ingresantes. (Álvarez, et al, 2001) Esto a su vez, trae consigo dificultades en el proceso de enseñanza.

Seguramente son muchos los factores que influyen en esta realidad: el currículo, los docentes, la motivación de los alumnos, los contextos socio-económicos de los estudiantes y de los centros, entre otros. La situación es compleja, pero no por ser de difícil abordaje deja de ser un problema real con el que se encuentra la Educación Matemática actualmente.

Marco Teórico

Raymond Duval, profesor de la Universidad del Litoral, director de estudios de la Academia de Lila (Francia) e investigador del Instituto de Investigaciones en Educación Matemática (IREM de Estrasburgo), en 1995, en su libro *Sémiosis et Pensée Humanie. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, introduce el concepto de “Registro de Representaciones semióticas”.

Duval (2004) afirma que para lograr la conceptualización, o lo que podríamos considerar “aprendizaje” el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc.

Este autor distingue dos conceptos fundamentales: “semiosis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis, los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto” (Duval, 2004, pp. 14). La tesis de Duval se reduce al siguiente enunciado “*no hay noesis sin semiosis*”, es decir, no se puede aprender un concepto matemático sin pasar por el necesario tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica.

Duval plantea dos preguntas que considera el núcleo del aprendizaje de las matemáticas: ¿Cómo se aprende a cambiar de registro? y ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone?, y define *registro de representación semiótica* como aquel registro que “constituye el margen de libertad con que cuenta un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor” (Duval, 2004, pp. 30)

Este autor distingue el concepto de “representación mental”, que es la que permite a un individuo considerar un objeto, en ausencia total de algo perceptible, del de “representación semiótica”. En otras palabras, la representación mental que tiene un sujeto en su mente acerca de un concepto, al que sólo puede acceder por representaciones parciales: las representaciones semióticas.

Otro aspecto a resaltar del trabajo de Duval, es que distingue tres "actividades cognitivas" referidas a los registros de representación semióticos: la formación, el tratamiento y la conversión. El primero se refiere a la selección del conjunto de caracteres del concepto que forman parte de un registro, el segundo, a toda la manipulación que puede hacerse de la información del concepto manteniendo un registro determinado, y el tercero, a la transformación de un registro a otro. Para el autor, este último es fundamental para que exista verdadera conceptualización, es decir, verdadero aprendizaje del concepto.

Distingue a su vez, dos niveles de tratamiento. Denomina "tratamiento cuasi-instantáneo" a aquel que corresponde a la "familiaridad o a la experiencia que resulta de una larga práctica o de una competencia adquirida en un dominio" (Duval, 2004, pp. 40), lo que se suele llamar un tratamiento mecánico. Por otro lado, "tratamiento intencional" es aquel que "para ser efectuado toma al menos el tiempo del control consciente" (Duval, 2004, pp. 41). A mayor posibilidad de tratamientos cuasi-instantáneos que posea un estudiante, mayor posibilidad de tratamientos intencionales.

Duval afirma también, que estos procesos deben ser enseñados para que el alumno pueda aprenderlos, y dice: "un aprendizaje que considere la relación estrecha que existe entre la noesis y la semiosis debe colocar a los alumnos en condiciones que permitan esta toma de consciencia más global, y para ello, se les deben presentar tareas específicas" (Duval, 1998, pp. 189)

A estas tareas que debieran ser propuestas a los estudiantes el autor las clasifica en tres categorías: las de "aprehensión de las representaciones semióticas", que apuntan a la formación de registros; las de "tratamientos propios de una categoría de registro", en las que el estudiante o bien debe aplicar tratamientos cuasi-instantáneos, como operaciones realizadas mecánicamente o en las que el tratamiento es intencional, pero siempre trabajando en un mismo registro de representación; y las de "producción de representaciones complejas" que implican necesariamente conversión entre registros.

Ahora bien, con respecto a las actividades propuestas a los estudiantes con el fin de que realicen conversiones, Duval (2006) aclara que no basta con tareas que exigen simplemente traducir de un registro a otro como por ejemplo que reconozcan al mismo objeto en una expresión de una función lineal y la gráfica de una recta. A este tipo de conversiones sencillas o directas, el autor denomina "yuxtaposición" y aclara que "la yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados" (Duval, 2006, pp. 159)

Es necesario por lo tanto, que las tareas de conversión propuestas exijan más que una mera yuxtaposición, tareas en las que el estudiante deba realizar las conversiones por opción propia, ya sea por economía de trabajo (porque trabajar en un registro diferente facilita la resolución) o porque el tratamiento posterior así lo requiere. Debe existir más que una yuxtaposición, una coordinación entre los registros.

Otro aspecto central de la teoría presentada por Duval, es que "la comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión". (Duval, 1998, pp. 186)

Por lo tanto, no bastará con la exposición del docente para que el estudiante pueda adquirir un concepto, pues debe manipular diferentes registros de representación para poder adquirir el conocimiento, y para esto las actividades o ejercicios propuestos a los estudiantes son fundamentales. Por otra parte, no bastará con presentar y proponer actividades que apunten a aprehensión o tratamiento de registros sino que necesariamente deben implicar conversión, pues no existirá comprensión si no se maneja al menos dos registros semióticos diferentes del mismo concepto.

Surge por tanto la pregunta: *¿es posible enseñar la conversión de registros semióticos a partir de la presentación de actividades de representaciones complejas, y de esta forma, influir en la conceptualización de elementos del Cálculo Diferencial por parte de los estudiantes?*

Diseño experimental

El Departamento de Matemática de la Universidad Católica del Uruguay, desde el año 2012 ha bimestralizado las materias para la Facultad de Ingeniería y Tecnología (FIT), de modo que el curso tradicional de Cálculo Infinitesimal 1, quedó dividido en Cálculo 1A, y Cálculo 1B. Cada parte tiene una duración de 8 semanas con 4 módulos de 80 minutos por semana. La primera, que es la que interesa para este trabajo, abarca el contenido de funciones de variable real, límites, continuidad y derivada. Para este trabajo, se diseñó una intervención didáctica para un curso de Cálculo 1A del primer bimestre 2013.

La intervención didáctica consiste básicamente en rediseñar el curso de modo de incluir un mayor número de presentaciones de ejercicios y ejemplos en los cuales la traducción entre los registros de representación gráfico y algebraico, para todos los temas fundamentales del curso: álgebra de funciones, composición, continuidad y derivada.

Se trabaja con tres grupos denominados G1_012, G1_013 y G2_013. El primero corresponde al grupo de Cálculo 1A del primer bimestre del año 2012. Este grupo se toma como punto de partida para el diseño de la intervención, es decir, es el curso que se toma como base para incluir las modificaciones para el año 2013. El G1_013 corresponde al grupo de la intervención, ambos grupos G1, tanto el de 2012 y el del 2013 se dictaron en un primer bimestre, en el turno vespertino, y contaron con el mismo docente. El grupo G2_013, también del primer bimestre 2013, es un grupo del turno nocturno, y el docente es diferente.

Comparación de los grupos G1_012 y G1_013

En estos cursos bimestrales, de 90 horas por bimestre, se cuenta con tres pruebas parciales que son tenidas en cuenta en el momento de determinar la calificación final de cada alumno. Los grupos G1_012 y G1_013 se compararon hasta el momento, en la instancia del segundo parcial. De tres ejercicios con los que contaba el segundo parcial del primer bimestre 2013, dos eran los mismos del segundo parcial del primer bimestre del año anterior. A continuación se presenta los ejercicios que se compararon y sus respectivos resultados.

1) Sean $f: f(x) = \begin{cases} x+1 & , x > 3 \\ 2x-4 & , x \leq 3 \end{cases}$, $g: g(x) = \begin{cases} x-1 & , x \geq 3 \\ x^2-5 & , x < 3 \end{cases}$

a) Investigar si existe $\lim_{x \to 3} f(x)$ y $\lim_{x \to 3} g(x)$.

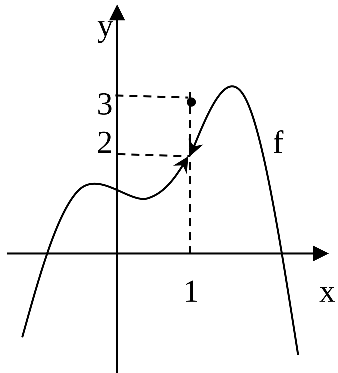
b) Decida si el teorema de límites de la función producto es aplicable para calcular $\lim_{x \to 3} (f.g)(x)$. Explique su respuesta.

c) Si la respuesta en a) fue afirmativa, use el teorema para hallar el límite pedido. Si la respuesta en a) fue negativa, halle $(f.g)(x)$ y a partir de esta expresión calcule el límite pedido, si existe. ¿Contradice el teorema del límite de la función producto?

Este primer ejercicio en principio no requiere conversión de registros, puede resolverse estrictamente a partir de *tratamiento intencional* del registro algebraico, es una actividad de tratamientos propios de una categoría de registro. Sin embargo, pese a que la media del porcentaje de respuesta correcta para ambos grupos es igual (67%), sí cabe destacar, que el 71% de los estudiantes del grupo de intervención utilizan la representación gráfica para dar respuesta al problema de la existencia del límite mientras que en el grupo del año anterior, sólo lo hace el 16%.

El segundo ejercicio, que se muestra a continuación, requiere conversión de registros dado que parte de los datos están dados en registro gráfico y la consigna está planteada en registro algebraico, es una actividad de producción de representaciones complejas.

2) Sea la función f dada por su gráfico adjunto y la función g que cumple $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 1$
Complete el siguiente cuadro, indicando en la casilla de argumentación qué resultados permiten justificar su respuesta:



	Argumentación[1]
$\lim_{x\to 1} g(x+1).f(x)=$	
$\lim_{x\to 1} (f(x)+f(1)).f(x)=$	
$\lim_{x\to 1} f(x).f(-x)=$	

Para esta actividad, que requiere conversión de registros, las medias del porcentaje de respuesta correcta son del 47% para el G1_012 y 53% G1_013, es decir, en promedio, los estudiantes del grupo de intervención responden correctamente el 53% del ejercicio, mientras que en el grupo del año anterior responden correctamente, en promedio, el 47% del planteo.

En base a esta comparación, cabe destacar que si se enfatiza la conversión de registros, efectivamente es más probable, no sólo que a los estudiantes respondan mejor a preguntas relacionadas con traducción de registros sino que además, sean capaces de aplicarla aún si el ejercicio no lo obliga, y esto último, a la luz del marco teórico de este trabajo, indica mejor conceptualización por parte de los alumnos.

Comparación de los grupos G1_013 y G2_013

En cuanto a la comparación de G1_013 y G2_013, se propuso un total de cuatro pruebas individuales comunes. El primero contó con 10 estudiantes que cursaban Cálculo 1A por primera vez y realizaron las cuatro pruebas, mientras que en el segundo los estudiantes en estas condiciones eran 11.

En cuanto a los resultados de la prueba diagnóstica, la media para cada uno de estos

[1] En la hoja original el espacio de la tabla disponible para la argumentación era mayor, aquí se ajustó el tamaño para ganar espacio.

nuevos grupos de estudiantes es igual, 24 puntos en ambos casos. Lo que indica que en principio los grupos son comparables. La tabla de medias en este nuevo contexto es la siguiente:

Medias del porcentaje de respuesta correcta		
Prueba	**G1_013**	**G2_013**
1	63	40
2	71	70
3	58	48
4	74	48

Salvo para la prueba 2, son superiores los resultados del grupo de intervención. La diferencia mayor se encuentra en la prueba 4 (ver anexo), que es la que se analiza a continuación.

En esta prueba se pide hallar el valor de la derivada de una función *f* en x=0 usando la definición de derivada en un punto y luego la ecuación de la tangente al gráfico de *f* en dicho punto. Para eso se les presenta el bosquejo gráfico de f y el de $g/g(x) = \frac{f(x)-2}{x}$

Teniendo en cuenta el gráfico de *f* saben que *f(0)=2* y para hallar la derivada de *f* en *x*=0 no tenían más que determinar al partir del gráfico de *g* el límite de *g(x)* cuando *x* tiende a 0. Como se puede observar, los conocimientos matemáticos requeridos para resolver este ejercicio son la definición de derivada en un punto y la relación de la derivada con la tangente al gráfico en dicho punto, que ambos profesores presentaron en sus respectivos cursos, y el poder determinar una imagen y un límite finito a partir del registro gráfico.

Ninguno de los profesores en su curso había presentado un ejercicio similar, de modo que la propuesta era igual de novedosa para ambos grupos de estudiantes. De los 10 estudiantes del G1_13 que se consideran en la última tabla presentada, 7 lo resuelven correctamente mientras que en el G2_013 sólo 3 de los 11 estudiantes lo hacen. Los errores cometidos tienen relación con la aplicación errónea de los conceptos como el confundir la derivada con la tangente, o no tener en cuenta el límite en la definición de derivada. También interesa destacar, que 3 de los 11 estudiantes del G2_013 hallan algebraicamente la imagen de *f* para x=*2* a partir de la expresión algebraica de *g* y no lo observan directamente del gráfico, algo que no sucede para ningún estudiante del G1_013, es decir, para el grupo de la intervención.

Conclusiones preliminares

Estudiantes del grupo de intervención aplican conversión de registros aún sin que la actividad explícitamente lo requiera, lo que indica según el marco teórico considerado, que han conceptualizado mejor.

Los estudiantes del grupo de intervención obtienen mejores resultados en actividades de producción de representaciones complejas.

Los estudiantes del grupo de intervención cometen menos errores conceptuales.

En síntesis, los registros de representación semiótica como por ejemplo el algebraico y el gráfico, juegan un rol importante en la mejor concepetualización por parte de los estudiantes, y consecuentemente en la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Álvarez, W;, Lacués, E. y Pagano, M. (2001) *Determinación del perfil de ingresantes a la Universidad*, Informe de investigación del Departamento de Matemática de la Universidad Católica del Uruguay, presentado en la RELME 15, Buenos Aires, Argentina.

Campbell, D. y Stanley, J. (1995). *Diseños experimentales y cuasi-experimentales en la investigación social*. Buenos Aires. Ed. Amorrortu

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, pp. 173–201. México. Cinvestav.

Duval, R. (2004) *Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Cali. Merlín I.D.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*; Vol 9.1, pp 143-168. Madrid, RSME.
http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf
Consultado: 20/02/2012

Ibarra, S; Bravo, J. & Grijalva, A. (2001) *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del Cálculo Diferencial*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/IbarraOlmos.pdf Consultado: 10/03/2012

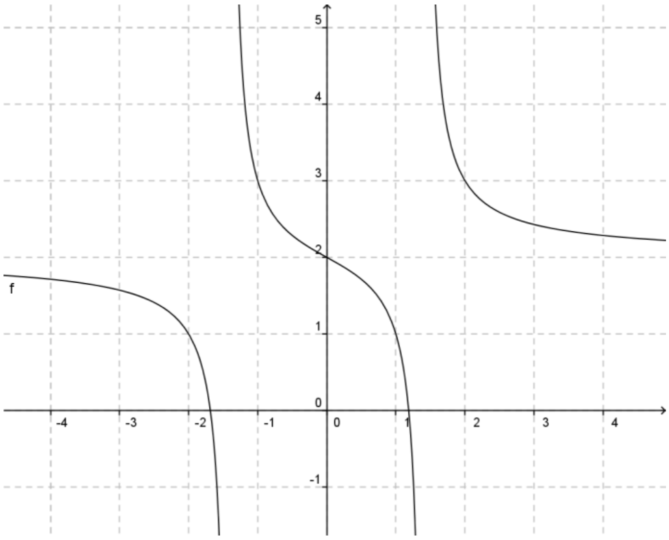
Kilpatrick, J. (1992) Historia de la Investigación en Educación Matemática. En Kilpatrick, J; Rico, L y Sierra, M. *Educación Matemática e Investigación*. pp 15-96 Madrid. Ed. Sínesis.

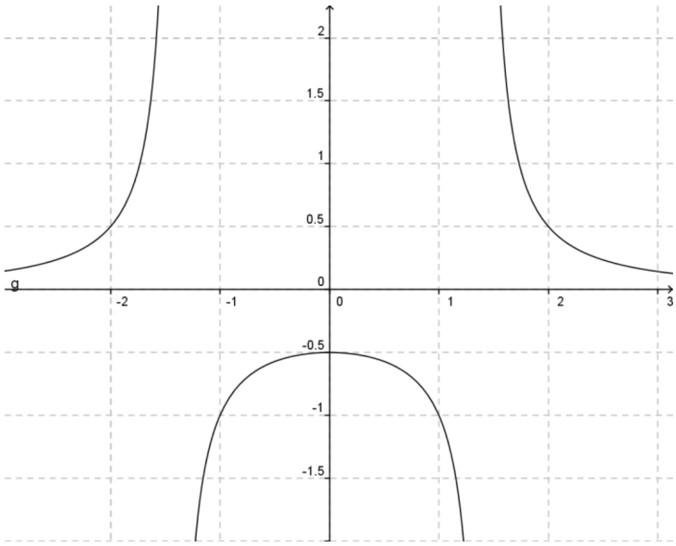
Anexo

Cálculo 1A – Primer bimestre 2013

Prueba 4

Usando la definición de derivada, halla el valor de la derivada de f en x=0 sabiendo que las gráficas que se presentan a continuación son las de f y g respectivamente, donde $g(x) = \frac{f(x)-2}{x}$, y escribe la ecuación de la tangente a f en x=0.





 ISSN 2301-0797