

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA MIRADA A TRAVÉS DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA.

Zenón Eulogio Morales Martínez

morales.ze@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP-Perú.  
Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP-Perú.

Modalidad: Taller (T)

Nivel Educativo: Medio (11 a 17 años).

Tema: I.1 Pensamiento algebraico.

**Palabras claves:** Resolución de problemas, registros semióticos, transformaciones semióticas.

### Resumen

*En nuestra experiencia docente encontramos que los alumnos tienen dificultades en la resolución de problemas debido a la coordinación de los distintos registros involucrados. Según la teoría de Duval (1995) estos problemas se enfocan desde un análisis cognitivo sobre las transformaciones que realiza el alumno cuando estudia un objeto matemático. La resolución de problemas requiere de la aplicación de procedimientos y operaciones matemáticas adecuados; contamos ya con los aportes de Polya (1945), Schoenfeld (1985), De Guzmán (1993), entre otros, ahora surge un enfoque cognitivo a la luz de la teoría de Duval (1995), esta teoría nos propone: Fase I: Partimos de problemas contextuales expresados en el registro verbal con datos. Fase II: La conversión en expresiones simbólicas que permitan las transformaciones semióticas pertinentes. Fase III: La solución del problema por la realización de tratamientos en el registro simbólico (algebraico o aritmético). En este taller se proponen situaciones problemáticas de olimpiadas matemáticas de Perú y de exámenes de ingreso a nuestras universidades. Estas actividades permiten evaluar las competencias matemáticas adquiridas por los alumnos del último año de educación secundaria de nuestro país. Los participantes en el taller, orientados por el expositor realizarán estas actividades aplicando el enfoque de Duval.*

### Fundamentación Teórica del Taller

La palabra problema proviene del griego *προβαλλειν* que significa “lanzar adelante”. Nos quiere decir que ante el lanzamiento de una situación dificultosa debemos tener la inteligencia o encontrar el camino de solución, esto es, una dificultad que exige ser resuelta o una interrogante que requiere ser contestada. La mayoría de personas vivimos resolviendo problemas, desde nuestra niñez a nuestra adultez, nos enfrentamos a innumerables problemas, gran parte de ellos, abordados o modelados en situaciones matemáticas. Según Nieto (2004): “La importancia de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el proceso científico y tecnológico, el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No es de extrañar que la actividad de resolución de problemas se haya convertido en un

nuevo objeto de estudio, atrayendo la atención de psicólogos, ingenieros, matemáticos, especialistas en inteligencia artificial y científicos de todas las disciplinas”. (p. 1). En el campo educativo se ha reconocido ampliamente su importancia, es sino la más importante, la principal capacidad matemática, la que presenta la mayor dificultad en el aprendizaje. Aún más, coincidimos con Nieto (2004) cuando menciona que “lamentablemente es muy común que se expongan a los alumnos los productos y resultados de la resolución de problemas, pero no se les hace conocer el proceso mismo. En nuestro país encontramos que los libros de matemáticas empleados en los colegios públicos y privados, encontramos por lo general, las soluciones acabadas, sin análisis de los procesos cognitivos que se involucran en la solución de los mismos. Por ello, los resultados en esta capacidad no son tan exitosos. Este fracaso en la resolución de problemas tiene diversas causas: una causa didáctica centrada en la exposición del profesor que no activa conocimientos previos, que no realiza transposiciones didácticas o que no emplea el aprendizaje significativo; una causa cognitiva centrada en la dificultad de realizar alguna actividad matemática que debe realizar el alumno sobre la situación problemática planteada en el lenguaje natural y simbólico y/o gráfico; una y otras causas provenientes de la institución educativa, de las editoriales que elaboran los textos de matemáticas, de la sociedad misma; considerando la educación como una actividad globalizada.

Diversos investigadores han realizados aportes notables en la intención de lograr el método eficaz para el logro de la resolución de problemas, citamos al maestro George Polya (Hungría, 1886), al matemático Miguel de Guzmán (España, 1936); Allan Schoenfeld (EEUU) y aunque su enfoque propiamente no está centrado en esta actividad, citamos al psicólogo Raymond Duval (Francia).

El profesor Polya, en su aporte heurístico de la resolución de problemas, cita los cuatro pasos principales, como: 1. Comprensión del problema; 2. Organización de la información; 3. Plan para la resolución y 4. Ejecución del plan.

El modelo propuesto por Guzmán también se basa en cuatro pasos: 1. Familiarización con el problema; 2. Búsqueda de estrategias; 3. Llevar adelante la estrategia y 4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Schoenfeld (1985) considera insuficientes el análisis de Polya sobre la resolución de problemas, sostiene que este proceso es más complejo, por esto, involucra más

elementos, inclusive de carácter emocional-afectivo, psicológico, sociocultural, entre otros. También propone la existencia de cuatro aspectos que intervienen en el proceso de resolución de problemas: 1. Los recursos (conocimientos previos); 2. Las heurísticas (estrategias cognitivas); 3. El control (estrategias metacognitivas) y 4. El sistema de creencias.

Duval (1995), sobre la etapas de la resolución de problemas, nos propone tres fases: Fase I: Partimos de problemas contextuales expresados en el registro verbal con datos. Fase II: La conversión en expresiones simbólicas que permitan las transformaciones semióticas pertinentes. Fase III: La solución del problema por la realización de tratamientos en el registro simbólico (algebraico o aritmético).

### **Sobre el Álgebra y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica.**

La relación que el Álgebra tiene con los símbolos reside en el factor de que para pensar sobre ideas y conceptos matemáticos es necesaria una representación interna, de forma que el cerebro sea capaz de operar y comunicar estas ideas y conceptos. De la misma manera, es preciso una representación externa que nos posibilite la comunicación, Así mismo, los signos externos de representación tiene un equivalente mental, lo que torna necesaria una distinción entre las representaciones internas y externas.

La relación entre estas dos modalidades de representación fue expresada por Duval (2009), para que las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden ser vistas como dominios diferentes, pues el desenvolvimiento de las representaciones mentales se da como una interiorización de las representaciones externas y la diversificación de las representaciones de un objeto, aumenta la capacidad cognitiva del sujeto y, por consiguiente, sus representaciones mentales. Del mismo modo, las representaciones externas, como enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, entre otros, son los mejores a través de los cuales los individuos exteriorizan sus representaciones mentales y se tornan accesibles.

Las transformaciones semióticas y la coordinación entre los registros de representación, también son imprescindibles en la actividad matemática, según Duval (2009). Las transformaciones pueden ser clasificadas en dos tipos: tratamientos y conversiones. La distinción entre esos dos tipos de registro posibilita analizar cómo funciona el sistema cognitivo de comprensión del sujeto.

Duval (2009) destaca que es a través de la coordinación entre los registros lo que permite la adquisición de conocimientos. Nos afirma que, “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión” (Duval, 2009, p. 63)

La gran variedad de representaciones semióticas utilizadas en matemática, además de los sistemas de numeración, existen las figuras geométricas, las escrituras algebraicas y formales, las representaciones gráficas y una lengua natural, el mismo que es utilizada de otra manera que no es del lenguaje corriente. Para designar los diferentes tipos de representaciones semióticas utilizados en matemáticas, hablaremos, parodiando a Descartes, de “registro” de representaciones. Más o menos interesante es notar que existen cuatro tipos muy diferentes de registros.

	<b>REPRESENTACIÓN DISCURSIVA</b>	<b>REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA</b>
<p><b>REGISTROS MULTIFUNCIONALES:</b> Los tratamientos no son algoritmizables.</p>	<p><b>Lengua natural</b></p> <p>Asociaciones verbales (conceptuales)</p> <p>Forma de razonar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentación a partir de observaciones, de creencias ... ;</li> <li>• Deducción válida a partir de definiciones o de teoremas.</li> </ul>	<p><b>Figuras geométricas</b> planas o en perspectivas (configuraciones en dimensión 0, 1, 2 o 3).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprensión operatoria y no solamente perceptiva.</li> <li>• Construcción con instrumentos.</li> </ul>
<p><b>REGISTROS MONOFUNCIONALES:</b> Los tratamientos son principalmente algoritmos</p>	<p><b>Sistemas de escrituras:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Numéricas (binaria decimal, fraccionaria...);</li> <li>• Algebraicas</li> <li>• Simbólicas (lenguas formales).</li> </ul> <p>Cálculo</p>	<p><b>Gráficos cartesianos.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Variaciones de sistema de coordenadas.</li> <li>• Interpolación, extrapolación.</li> </ul>

### Metodología

El taller está orientado a docentes de Educación Secundaria (12-16 años) y docentes de los primeros ciclos de universidades, asistentes al VII CIBEM (Uruguay, 2013). Se iniciará con una breve revisión teórica (30 minutos) sobre el enfoque cognitivo de Duval (1995) con la intención de presentar a los participantes las posibles relaciones entre los registros de representación y el desenvolvimiento del pensamiento algebraico. Luego se propondrán actividades para ser utilizadas en la enseñanza del Álgebra empleando los registros de representación semiótica. Se realizarán aplicaciones a nivel de educación secundaria y preguntas de admisión a universidades sobre funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas (30 minutos). También se harán unas aplicaciones de los registros a temas algebraicos tratadas en los primeros cursos de la universidad (30 minutos).

El taller será concluido con un debate colectivo sobre las actividades realizadas por los participantes (30 minutos), con el objetivo de expresar las dificultades encontradas, así como las posibles contribuciones y la viabilidad de la propuesta de articular los registros de representación y el pensamiento matemático algebraico, que es uno de los objetivos de este taller.

### Desarrollo del Taller

Los participantes en este taller, realizarán diversas actividades comparando los diversos enfoques planteados sobre la resolución de problemas, centrando la principal actividad sobre el enfoque cognitivo de Duval (1995).

Actividad I: Situación Problemática del Nivel Escolar (13 años).

En la figura 01, se muestra un problema planteado en un examen de un colegio privado del Perú, a un niño de segundo año de educación secundaria, de 13 años, encontramos

**CAPACIDAD: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. (4 PTS. C/U)**

1. La entrada a la feria del libro cuesta S/. 5, si en dicha actividad se está vendiendo cada libro a S/. 35 y "x" representa la cantidad de libros comprados por una persona :

- Determina la función  $f(x)$  que represente el costo total que debe pagar un cliente.
- Tabula los valores del costo, para el que cumpla: 0; 1; 2; 3 y 4 libros.
- Si Mario gastó S/ 215 en total, ¿cuántos libros compró?
- Diseña el diagrama cartesiano de  $f(x)$ , si  $\mathbb{N}$  se considera como conjunto de partida y de llegada.
- ¿ $f(x)$  es inyectiva?

*c)  $215 = 35x + 210$  R: Mario compró 6 libros*

$215$	$-$	$35x$	$210$	$=$	$210$
$5$	$5$	$6$	$210$	$=$	$210$
$5 \cdot 210$	$210$	$210$	$0$	$=$	$0$

### Recomendaciones Finales

Luego de realizar las actividades propuestas, debemos apropiarnos de los procesos cognitivos que subyacen cuando se realizan las actividades matemáticas que permiten la resolución de problemas: Consideramos dos enfoques completamente diferentes para analizar los problemas en el aprendizaje de las matemáticas:

- En un enfoque matemático, lo que se analiza es SIEMPRE LA SOLUCIÓN A UN PROBLEMA de acuerdo a las propiedades y los procedimientos que se utilizarán. Se trata de un análisis retrospectivo en relación con el problema dado. Las explicaciones de las dificultades se hacen en términos de falta de comprensión de conceptos.
- En el enfoque cognitivo, lo que se analiza es el funcionamiento para el RECONOCIMIENTO POR UNO MISMO de las propiedades matemáticas que se utilizarán y cómo utilizarlas. Aquí es donde surgen, debido a las dificultades recurrentes, porque explicar las soluciones no ayuda a los estudiantes a comprender la forma de transferir a otros problemas.
- Los estudiantes no son conscientes de la actividad intelectual específica que permite realizar la actividad matemática. El enfoque cognitivo se centra en EL LADO OCULTO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA.

### Referencias Bibliográficas

- Duval, R. (2005). Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En: Alcántara S. (2005) *Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica*. Papirus editora. Sao Paulo. Brasil.
- De Guzmán, M. (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular.
- Nieto, J. (2004). *Resolución de Problemas Matemáticos*. Talleres de Formación Matemática. Maracaibo. Venezuela.
- Polya, G. (1965) *Como plantear y resolver problemas*. Título original: “How to solve it”. 1ra. Edición inglesa, 1945. Editorial Trillas. México.