CONSTRUYENDO MATEMÁTICAS CON NUESTRO ABANICO: FUNCIONES SINUSOIDALES

Mª Asunción Bosch Saldaña (*) y Antonio Codina Sánchez (*)

RESUMEN

El estudio de las funciones sinusoidales en la secundaria y en el bachillerato se suele realizar desde una perspectiva alejada de la experimentación y la intuición. En este artículo pretendemos mostrar una propuesta de trabajo para introducir las funciones sinusoidales de una manera intuitiva y experimental, en una fase previa a su estudio analítico, a través de algunos ejemplos de la vida cotidiana como andar, parpadear, fregar el suelo o hacer abdominales.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos generales de la Educación Secundaria en Matemáticas es que los alumnos utilicen el conocimiento matemático para organizar e interpretar diversas situaciones de la realidad. Partimos de que el estudio de los fenómenos "reales" da sentido a las matemáticas y que la modelización proporciona una herramienta de análisis y concretización al establecer una matematización de la situación. Es decir, entendemos el proceso de modelización como *una esquematización abstracta de la realidad* (Rico, 1997) y de cómo la elaboración de modelos establece una relación entre el fenómeno de estudio y el concepto o estructura matemática.

Observando los documentos curriculares se detallan varias cuestiones relacionadas con las funciones, entre ellas las sinusoidales. En particular encontramos, entre otros contenidos, los siguientes:

1. Dependencia funcional: formas de expresar la dependencia entre variables (descripción verbal, tabla, gráfica y fórmula);
2. Características de las gráficas, referidas (en particular) a los aspectos globales de continuidad, crecimiento, valores extremos, periodicidad y tendencia;
3. Funciones elementales, que trata (entre otros) de los fenómenos y gráficas periódicas.

La intención de este trabajo, para con los alumnos de Secundaria o Bachillerato, no es que reconozcan una gráfica como una función sinusoidal particular, sino que descubran y compartan con sus compañeros las principales características de estas gráficas a partir de situaciones cotidianas y a través de la experimentación con materiales manipulativos, considerando acciones como andar, parpadear, fregar el suelo, como movimientos angulares susceptibles de ser modelizados a través de una representación gráfica de aspectos sinusoidal o porción de la misma. Mostraremos con detalle un ejemplo de modelización que denominamos "actividad del caminante".

(*) Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Almería.

2. ANTECEDENTES DE LA PROPUESTA

Este trabajo tiene sus antecedentes en el vídeo *Sinusoidals everywhere* (sinusoides por doquier) original de la primera autora del presente artículo y presentado a la comunidad científica en el I CONGRESO INTERNACIONAL DE ETNOMATEMÁTICAS, celebrado en Granada en Septiembre de 1998. Con posterioridad se realizaron dos talleres para profesores integrados en los IX y X CONGRESOS SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS "THALES", celebrados en San Fernando (Cádiz) en Septiembre de 2000 y El Ejido-Adra (Almería), en Septiembre de 2002, respectivamente. El primer taller se titulaba *Funciones sinusoidales en todos los lugares*, y el segundo *Las Matemáticas del abanico*. A partir de la idea expuesta en el vídeo y de las aportaciones, reflexiones y críticas realizadas en los congresos, se ha elaborado la propuesta de actividades.

2.1. Descripción del vídeo

El vídeo muestra una propuesta inicial de trabajo para introducir las funciones sinusoidales de manera intuitiva y experimental, previa a su estudio analítico. En él se propone partir de algunos movimientos angulares de la vida cotidiana, como andar, parpadear o abanicarse, cuya representación gráfica (en el eje OX se sitúa el tiempo y en el eje OY la amplitud de ángulos) ofrece un aspecto de sinusoidal o porción de la misma, del tipo

$$y = a + b\ sen(ct) \quad \text{o} \quad y = a + b\ |sen(ct)| \qquad [\textit{Fórmula 1}]$$

En los ejemplos del vídeo se varían los parámetros de manera controlada e inteligible, modificando el eje de referencia, la posición de partida, el ritmo o la amplitud máxima del movimiento, comparando por superposición distintos movimientos y ofreciendo la representación gráfica de los mismos.

2.2. Descripción del taller "Funciones Sinusoidales en todos los lugares"

El taller tenía dos objetivos básicos: El primero consistía en el diseño de actividades para introducir las funciones sinusoidales en Secundaria y Bachillerato aprovechando las ideas expuestas en el vídeo y el segundo, fomentar el trabajo cooperativo entre el profesorado para reflexionar acerca de la propuesta actividades con la intención de mejorarlas. La estructura secuencial del taller fue la siguiente:

1ª parte: Visionado del vídeo en castellano *Sinusoidals Everywhere* y discusión grupal acerca del mismo.

2ª parte: Diseño, realización y análisis de actividades en pequeños grupos.

- Diseño de actividades para alumnos de Secundaria y Bachillerato, a raíz de la propuesta del vídeo.
- Experimentación de las actividades diseñadas por los profesores asistentes.
- Análisis del diseño realizado inicialmente; correcciones y concreción de la propuesta de actividades para el aula.

3ª parte: Reflexiones finales en el gran grupo.

- Puesta en común de los diseños de las actividades del grupo de profesores así como de los procesos de resolución de las mismas.
- Reflexiones sobre los beneficios que supone el trabajo cooperativo del profesorado, tanto en el seno de los departamentos de cada centro como en grupos de trabajo "intercentros" del estilo de los que promueven los Centros de Profesores.

2.3. Descripción del taller Las Matemáticas del abanico

En este caso se optó por una dinámica de trabajo muy sencilla. Primeramente, se introdujo a los profesores asistentes en las posibilidades del abanico como recurso en el aula de matemáticas para el estudio de movimientos angulares, invitándolos a aportar y discutir en grupo ideas para la realización de actividades tomando como soporte este recurso tan fácilmente obtenible para nuestros centros docentes.

A continuación se dejó un tiempo para la propuesta y discusión de actividades en pequeños grupos y por último hubo una breve exposición de dichas actividades a los profesores de otros grupos.

A raíz de las diversas experiencias y del proceso de análisis y reflexión llevado a cabo en los tres congresos, surge una propuesta de actividades para trabajar las funciones sinusoidales susceptibles de ser llevadas a cabo con alumnos de Secundaria y Bachillerato. Como señalamos al inicio, partiremos de algunas actividades previas para posteriormente desarrollar una actividad detalladamente, en concreto la denominada "El caminante". A continuación, describimos brevemente otras posibles actividades.

3. PROPUESTA DE ACTIVIDADES

3.1. Material necesario

El conjunto de material indispensable en la realización de las actividades se compone de abanicos, rotuladores y transportadores de ángulos (para el diseño del aparato de medida de ángulos), cronómetros (para la medida del tiempo), papel cuadriculado y lápices de varios colores (para las representaciones gráficas).

Además, podemos usar para algunas actividades, como material complementario, mondadientes (para comprobar el ángulo de parpadeo), fregonas, esterillas de gimnasia, y todo lo que la imaginación y raciocinio del profesor crean conveniente para llevar a cabo éstas u otras actividades similares.

Para la toma de datos, en los casos en que sea difícil, puede ser útil la utilización de una cámara fotográfica (preferentemente digital) para capturar las acciones realizadas.

3.2. Actividad Inicial: "¿Para qué sirve mi abanico?"

Esta actividad, diseñada como introducción, consiste en la elaboración artesanal de un aparato de medida de ángulos. Para ello se requieren un transportador de ángulos y un abanico. Observando y anotando sobre las aspas del abanico las medidas de amplitud del ángulo formado por cada una de ellas respecto a la primera, como muestra la siguiente figura se obtiene el instrumento buscado.

Figura 1. Abanico Graduado

También se puede tomar como unidad de medida del ángulo la abertura de las aspas del abanico, con ello trabajaremos las unidades de medida no estándares.

Una vez reflexionado acerca del instrumento de medida y de la pertinencia de adopción de una unidad de medida operativa, pasamos a realizar la primera actividad.

3.3. Actividad 1: "Siguiendo tus pasos. El caminante"

En ella se propone analizar el proceso de andar, para ello mediremos la amplitud de ángulo formado por las dos piernas, tomando una de ellas como eje de referencia (por ejemplo, la izquierda).

Si consideramos el instante $t_0 = 0$ de las piernas cerradas, obtenemos en el primer paso completo, con la pierna derecha, un ángulo máximo M, y en el segundo paso, con la pierna izquierda, el ángulo máximo negativo[1] $-M$, pasando por la posición $0º$ en el instante medio del trayecto. Los ángulos los medimos gracias al abanico graduado que hemos construido, apoyándolo en una pierna y abriéndolo hasta topar con la otra pierna, en el momento de máxima amplitud del paso. El tiempo que tardamos en realizar cada paso podemos estimarlo fácilmente cronometrando lo que tardamos en dar diez pasos y dividiendo.

Trasladando la toma de datos a una representación gráfica (Figura 2), obtenemos un gráfico de puntos del estilo siguiente:

$$(t_0, 0),\ (t_1, M),\ (t_2, 0),\ (t_3, -M),\ (t_4, 0)$$

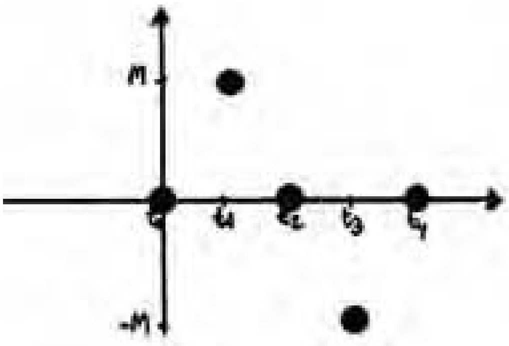


Figura 2. Primeros puntos de la función

Si suponemos que el movimiento se realiza sin brusquedad (cambios de ritmo, saltos, etc.), los datos anteriores, que se corresponden con los puntos extremos relativos y los cortes con los ejes (justo cuando se cruzan las piernas), nos sirven para realizar una primera aproximación de la gráfica (Figura 3).

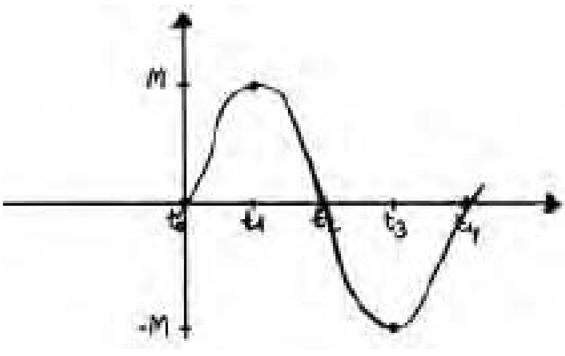


Figura 3. Primer esbozo de la gráfica

Finalmente, si consideramos que existe homogeneidad, esto es, que los pasos son todos iguales y se suceden ininterrumpidamente, se obtiene la gráfica de un movimiento periódico de periodo $T = t_4$, que podemos identificar con una sinusoidal del tipo

$$y = M \cdot sen\ (ct),$$

donde $c = 2\pi / t_4$ y M es la amplitud máxima del paso (Figura 4).

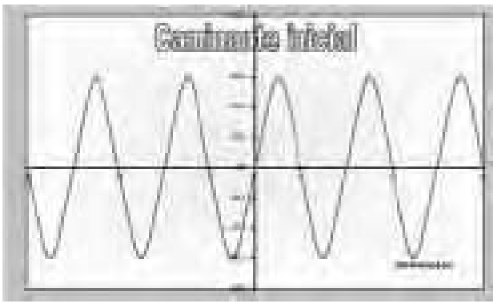


Figura 4. Gráfica Caminante Inicial

A continuación, podemos modificar parámetros para observar cómo varía la gráfica inicial. En concreto, si consideramos un momento inicial distinto al de partida (cuando los pies se cruzan), nuestra gráfica aparecerá trasladada en el eje OX (Figura 5).

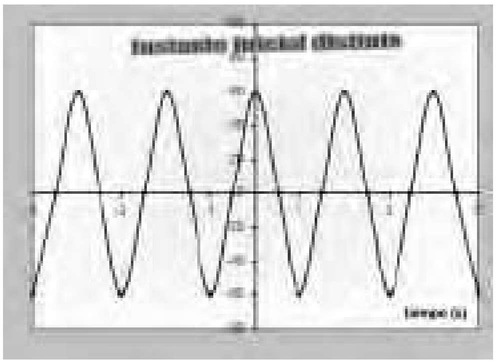
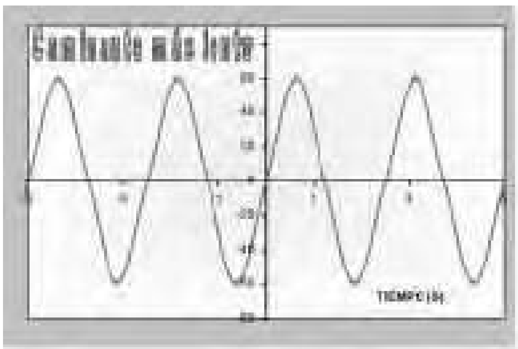


Figura 5. Instante inicial distinto

Así, si modificamos ahora el ritmo de la "caminata", aparece una gráfica más o menos "estirada", es decir, presenta un periodo mayor o menor. En este caso, variamos el parámetro c de la Fórmula 1 (Figuras 6 y 7).



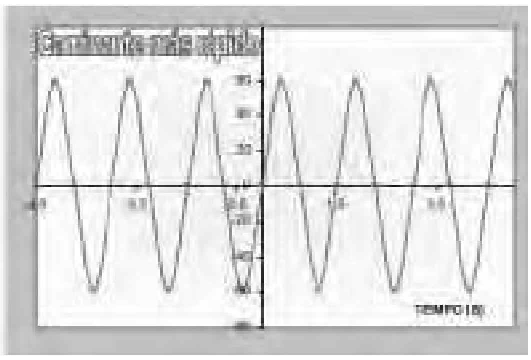


Figura 6. Caminante más lento

Figura 7. Caminante más rápido

Del mismo modo, si lo que alteramos es la amplitud máxima del paso, aparecen "picos" más o menos pronunciados, es decir, la distancia de los puntos máximos y mínimos aumenta o disminuye respecto del eje OX, con lo cual estamos variando el parámetro *b* de la Fórmula 1 (Figuras 8 y 9).

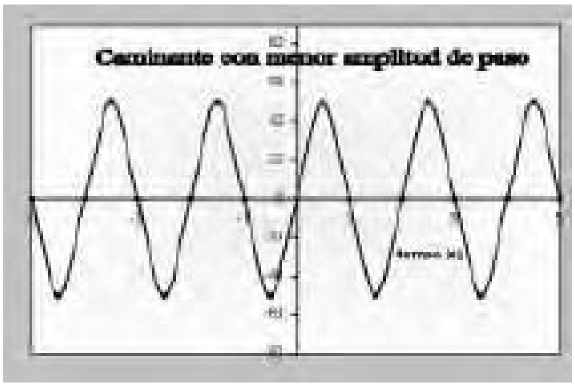


Figura 8. Caminante con mayor amplitud de paso

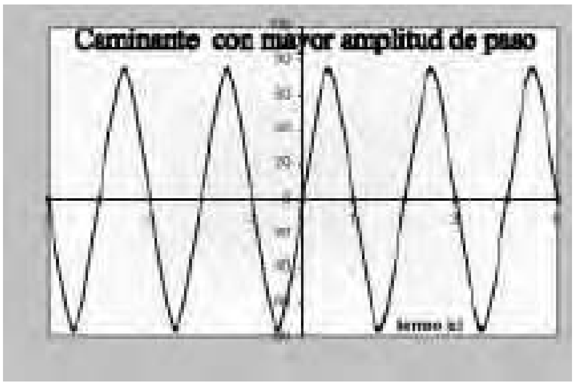


Figura 9. Caminante con menor amplitud de paso

Por último, podemos considerar y superponer las cuatro gráficas distintas que se producen si tenemos en cuenta los movimientos coordinados tanto de los brazos como de las piernas, respecto al eje vertical corporal (Figura 10).

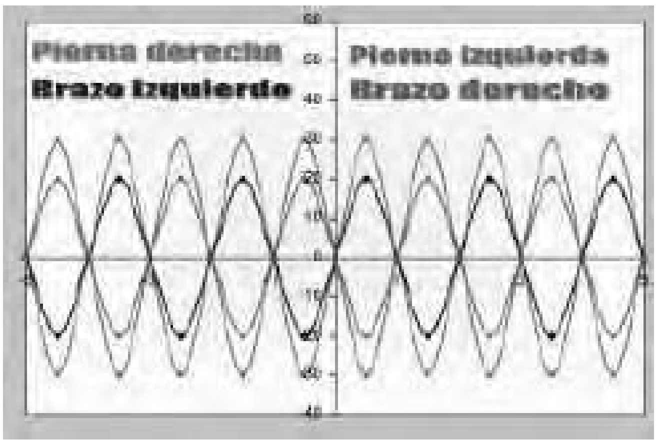


Figura 10. Superposición de movimientos

3.4. Otras posibles actividades sobre funciones sinusoidales

Como hemos comentado anteriormente, las actividades se proponen para que las realicen los alumnos dentro o fuera del aula, bien en grupo o individualmente, para su posterior discusión en el grupo clase, centrándonos en el uso de los instrumentos de medida, el análisis de los datos obtenidos, la precisión de la medida, etcétera.

Actividad 2: "Un guiño de ojo"

En esta actividad se propone el estudio del acto de parpadear. Para ello, podemos utilizar dos palillos (o en su defecto, dos lápices o, incluso, nuestros dedos) para transportar el ángulo descrito por los párpados al abanico. Consideraremos aquí el ángulo M como el de máxima apertura de los mismos y el ángulo m como el de mínima apertura, que valdrá 0 si llegamos a cerrar completamente los ojos y será estrictamente positivo en el caso de parpadeo parcial. Este fenómeno dará lugar nuevamente a una función sinusoidal, en este caso de valores siempre "por encima" del eje OX, y su expresión algebraica vendrá dada por:

$$y = m + (M\text{-}m)\ |sen(ct)|,$$

donde $c = 2\pi\ /\ t_2$ (contando los tiempos en cada parpadeo completo). Este ejemplo nos permite considerar variaciones en el parámetro a de la Fórmula 1.

Una herramienta que puede ser útil para la toma de medidas en esta actividad o cualquier otra, es realizar fotografías con una cámara digital, de este modo, analizar la apertura del párpado puede ser más sencillo y sobre todo, menos peligroso.

Actividad 3: "¡Reduce barriga con Cindy Crawdford!"

En esta actividad se propone el estudio del movimiento angular producido con la realización de ejercicios abdominales. Para ello adoptamos como referencia para nuestras mediciones la línea del suelo y la de la espalda del "sufridor/a".

Actividad 4: "¡A fregar toca!"

Esta actividad consiste en apreciar el movimiento que se realiza cuando fregamos el suelo de, por ejemplo, la cubierta de un barco, a un lado y a otro, con la dificultad añadida de que en este caso el vértice de los distintos ángulos es móvil dentro de la misma porción de sinusoide (tomando como referencia una semirrecta sobre el suelo.) El interés principal de esta actividad radica en que siempre existe una amplitud mínima positiva, lo cual nos permite también variar el parámetro a de la Fórmula 1.

Actividad 5: "¡Qué calor hace!"

En esta actividad pretendemos analizar el proceso de abanicarse, con la dificultad añadida de que en este caso no podemos observar al mismo tiempo directamente las dos semirrectas que forman los ángulos en cuestión.

Además de las anteriores, el vídeo menciona otras actividades que podrían servir para nuestro cometido, tales como bailar un swing, accionar los limpiaparabrisas de un coche o, simplemente, despedirse con el habitual movimiento angular del antebrazo.

COMENTARIOS FINALES

Este artículo, como no puede ser de otra forma, pretende ser el punto de partida de una propuesta de actividades que cada profesor/equipo de profesores deberá adaptar a sus necesidades específicas de aula. Con esta idea en mente, mostramos algunos comentarios surgidos de la reflexión con los profesores participantes en el taller así como los realizados por investigadores en el Congreso de Etnomatemáticas con el ánimo en que contribuyan en la mejora de la puesta en práctica de las actividades.

Respecto al vídeo y de la toma de datos, hay que destacar que los ejemplos presentados representan una abstracción y modelización de los fenómenos y por tanto, deben salvarse los problemas de uniformidad y continuidad que en la realidad puedan tener los movimientos angulares descritos, adquiriendo un papel prioritario la familiarización de los alumnos con este tipo de funciones y el aprendizaje de sus principales características de forma natural. Por ello es necesario, para una mejor comprensión de los procesos de modelización, que los alumnos sean conscientes de este aspecto cuando estén realizando las actividades.

Por otro lado, durante el taller llevado a cabo con profesores en ejercicio, se discutieron algunas objeciones que muestran dificultades que sirven de referencia y permiten un mayor control de posibles "conflictos" cuando se lleva a la práctica las actividades. Una de ellas radicaba en la dificultad de conseguir un número mayor de puntos que le permitiera confirmar que el modelo que pode representar la situación es el de una función sinusoidal y no unan los puntos en forma de dientes de sierra, error típico en el inicio de las representaciones gráficas de funciones. Una posible forma de atajar dicha dificultad es utilizar una cámara de video digital y detener la secuencia de imágenes en momentos determinados obteniendo así mayor número de puntos. Otra dificultad detectada fue el paso de lo discreto a lo continuo, paso conceptualmente complejo y en el que el docente debe prestar especial atención. Por último, los profesores señalaron los problemas técnicos a la hora de realizar las mediciones conducentes a la obtención de los puntos extremos, dificultad que pueda ser salvada atendiendo a la naturaleza inexacta de los procesos de modelización.

Finalmente y a modo de conclusión creemos que el estudio de los movimientos angulares descritos permite la interdisciplinaridad entre matemáticas y ciencias en el aula de Secundaria y Bachillerato, poniendo de relieve la potencialidad comunicativa del lenguaje gráfico como herramienta de análisis así como la naturaleza de la toma de decisiones imprescindible en la resolución de problemas de la vida real.

BIBLIOGRAFÍA

Bosch, M. A., 1998: Sinusoidals Everywhere (Vídeo). En *I CONGRESO INTERNACIONAL DE ETNOMATEMÁTICAS*. Granada, 2-5 Septiembre 1998.

Bosch, M. A., 2000: Sinusoides por doquier. En *IX CONGRESO SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS "THALES"*. San Fernando (Cádiz), 7-10 Septiembre 2000.

Bosch, M. A., 2002: Las Matemáticas del abanico. En *X CONGRESO "THALES" SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS*. El Ejido-Adra (Almería), 12-15 Septiembre 2002.

Castro, E. y Castro, E., 1997: *Representaciones y Modelización*. En Rico, L. (Ed) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Horsori: Barcelona.

Freudenthal, H., 1983: *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Dordrecht. Reidel Publishing Company.

NOTAS

(1) El hecho de considerar una de las piernas como eje de referencia nos permite considerar ángulos "negativos" en el sentido de las agujas del reloj.