PENSANDO REAL-MENTE EN NUESTROS ALUMNOS

Virginia Montoso, Martha Ferrero
Centro Regional Bariloche - Universidad Nacional del Comahue. Argentina
vmontoro@gmail.com; marthaferrero@gmail.com
virginia.montoro@crub.uncoma.edu.ar; martha.ferrero@crub.uncoma.edu.ar
Nivel Secundario y Universitario

Resumen

El concepto de número real es una de las ideas matemáticas más útiles e importantes por cuanto sobre ella se construye gran parte del desarrollo matemático y se lo encuentra en la base de la enseñanza en las escuelas secundarias y en la universidad.

El objetivo del taller es reflexionar sobre las ideas propias de los docentes y sus apreciaciones sobre las de sus alumnos acerca del número real. El mismo se desarrollará en dos encuentros de 2 horas cada uno; en el primero se realizarán una serie de actividades en torno a los siguientes contenidos: *distintos conjuntos numéricos, notaciones y densidad de Q* y en el *s*egundo encuentro las actividades versarán sobre la r*epresentación de los reales en la recta, completitud de R e infinito matemático.*

Cada uno de estos encuentros se desarrollará en tres instancias: 1h para trabajar las actividades en grupos de no más de tres asistentes; 30 minutos para que cada grupo comparta su producción con el resto de los asistentes; 30 minutos de institucionalización de los resultados de las actividades y posibles relaciones con las investigaciones sobre el tema y reflexiones sobre consecuencias didácticas.

<u>Palabras clave</u>: Número real – Continuidad – Completitud - Concepciones

Fundamentación

El concepto de número real es una de las ideas matemáticas más útiles e importantes por cuanto sobre ella se construye gran parte del desarrollo matemático y se lo encuentra en la base de la enseñanza en las escuelas secundarias y en la universidad.

La educación primaria se centra durante sus primeros ciclos principalmente en el dominio de números naturales. Ya en el último ciclo de este nivel, se considera un objetivo escolar que los niños trabajen con números racionales y con sus distintas formas de representación: como fracciones o a través de sus expresiones decimales. Al adentrarse en los estudios secundarios, la enseñanza propone profundizar la comprensión y el uso de los números racionales y hacia el final de este período es esperable que los estudiantes comprendan el concepto de número racional, irracional, manejen el sistema de representación decimal de números reales y puedan ordenarlos, representarlos sobre la recta numérica y usarlos para resolver problemas. Sin embargo, estas expectativas frecuentemente no son satisfechas y los estudiantes terminan sus estudios secundarios sin una comprensión cabal del número real. [Brousseau, (1981); Fischbein, Jehiam y Cohen, (1994); Douady, (1980)].

Estudios realizados en diferentes países y niveles educativos muestran que un entendimiento pleno de estos conceptos que nos ocupan no se da fácilmente por lo que constituyen un desafío tanto para el aprendizaje como para la enseñanza. Encontramos algunos de ellos que muestran que los estudiantes tienden a extrapolar las propiedades del número natural a los racionales y a los reales [Moss y Case, (1999)]. Otro grupo de estudios muestra que la comprensión de los números reales entraña auténticos obstáculos epistemológicos [Fischbein y otros, (1994); Sierpinska, (1985); Artigue, (1995)] debido a una multiplicidad de factores, principalmente el continuo de los números reales [Moreno-Armella y Waldegg, (1995); Romero, (1996)] y el concepto de infinito actual que se presenta como una noción contraintuitiva que requirió más de dos milenios de trabajo para ser precisada formalmente mediante la axiomatización y cuya comprensión es dificultosa para los estudiantes [Sierpinska, (1985); Artigue, (1995); Cornu, (1983); Monaghan, (2001); Moreno-Armella y Waldegg, (1991); (1995); Montoro, (2005)].

Las generalizadas dificultades de los estudiantes secundarios e incluso universitarios en este campo podrían además atribuirse a que los números irracionales fueron conceptualizados en la ciencia respondiendo a necesidades netamente teóricas, de las que resulta difícil que los estudiantes se apropien como auténticos problemas. Como así también a la carencia, en los desarrollos de la propia matemática contemporánea, de una representación que pueda dar cuenta de todas las características del número real [Steiner, (1984)]; en estas cuestiones se encuentran las raíces del propio método matemático, ya que muchos de estos conceptos se fundamentan en demostraciones matemáticas que implicarían una aceptación por parte del estudiante de la demostración como validación de los conocimientos y hemos visto que esta visón de la demostración no es común siquiera en los estudiantes más avanzados [Balacheff, (1987); Arsac, (1987); Montoro, (2010)].

La representación de los números reales sobre la recta numérica implica la aceptación por parte de los estudiantes de dos cuestiones no menores: el continuo geométrico y la biyección del conjunto de los números reales y la recta. De hecho, hay indicios de que para los estudiantes estas cuestiones no son tan claras [Romero, (2003)]. Además la notación decimal de los números reales, alude a un proceso infinito, tanto en el caso de los racionales como en el de los irracionales, la aceptación de estas notaciones involucra la aceptación del infinito actual. Estudios que indagan sobre concepciones de estudiantes respecto del infinito matemático muestran que la aceptación del infinito actual es contraintuitiva y requiere de contextos educativos que propicien la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas [Montoro, (2005), Juan, y Montoro, (2009)].

En este taller nos interesa profundizar en la reflexión con los docentes de matemática sobre las ideas de los estudiantes sobre el número, dado que asumimos que las concepciones de los aprendices constituyen el punto de partida de la enseñanza, ya que para que los procesos de enseñanza propicien un aprendizaje significativo es necesario partir de las ideas que los estudiantes ponen en juego interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarlas. Consideramos que también es necesario, para poder tener en cuenta las ideas de los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, alcanzar una comprensión profunda de aspectos como los siguientes: qué características tienen estas ideas, de dónde proceden, cómo están organizadas, cómo es la dinámica de esta organización, y cuáles son los mecanismos de cambio de esas ideas.

Objetivo del Taller

- Reflexionar sobre las ideas propias de los docentes y de los estudiantes sobre el número real.

Contenidos matemáticos a trabajar

Distintos subconjuntos del conjunto de números reales (R), particularmente el de los racionales (Q) y el de los irracionales, distintas notaciones para las números. Orden de los números reales, densidad de Q, completitud de R. Continuidad de la recta numérica, representación de los reales en la recta. Cardinalidad de los conjuntos numéricos.

Metodología

El taller se desarrollará en dos encuentros de 2 horas cada uno:

Primer encuentro: se trabajará en torno a una serie de actividades que atienden a los siguientes contenidos: *familiaridad con los distintos conjuntos numéricos y sus distintas notaciones; densidad de Q*

Segundo encuentro: se trabajará en torno a la una serie de actividades que versarán sobre los siguientes contenidos: *representación de los reales en la recta, completitud de R e infinito matemático.*

Cada uno de estos encuentros se desarrollara en tres instancias:

- 1h para desarrollar las actividades, estas podrán ser trabajadas en grupos de no mas de tres asistentes.
- 30 minutos para que cada grupo comparta su producción con el resto de los asistentes
- 30 minutos de institucionalización de los resultados de las actividades y posibles relaciones con las investigaciones sobre el tema y reflexiones sobre consecuencias didácticas.

Actividades para el taller

Primer encuentro

1a. El resultado de las siguientes operaciones que tipo de número es:

$\sqrt{4}+1$; $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$; $\sqrt{5}+1$; $0,\widehat{3}+1$; $0,\widehat{3}+0,\widehat{6}$; $\pi+2$;

$\pi+\pi$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+\sqrt{2}$; $-3,14+\pi$

Nota: $0,\widehat{3}=0,3333\ldots$(infinitos 3)

$0,\widehat{6}=0,666\ldots$ (infinitos 6)

1.b. ¿Podrías anticipar las respuestas que darían tus alumnos? ¿Que piensas que responderían la mayoría de tus alumnos a la tarea anterior?

2. a. Dar al menos 4 ejemplos de números irracionales y 4 de racionales

2. b. ¿Crees que tus alumnos conocen algún número irracional? ¿Cuál?

2.c. Si les pedís a tus alumnos ejemplos de números irracionales y racionales, ¿Cuáles pensás que te darían?.

3. a. ¿Qué definición te parece más adecuada para introducir a los alumnos al concepto de número racional? ¿Porque?.

3.b. Si, hoy, le preguntaras a tus alumnos ¿qué es un numero racional? ¿qué crees que te dirían?

4. a. ¿Como describirías un número irracional?

4. b. Más abajo figuran definiciones de números irracionales dadas por algunos estudiantes. ¿Cuál te parece que sería la más frecuente entre tus alumnos?:

  - son algunos números como Pi y raíz de 2
  - son los que tienen infinitas cifras decimales
  - son los que no se pueden escribir como fracción
  - son números especiales
  - son las raíces

5. c. ¿Cuál de estas definiciones dadas por los estudiantes, te parece se acerca más a una mejor comprensión del número irracional?
5.d. ¿Se te ocurre alguna otra definición que pudiesen dar tus alumnos?
6.a. Si debieras que trabajar con tus alumnos la longitud de la circunferencia, ¿crees conveniente justificar que Pi es irracional?. ¿Porque?.
6.b. ¿En caso de responder afirmativamente como lo justificarías?
7.a. Trabajando los números reales ¿Te parece conveniente utilizar la calculadora en estos temas? ¿Porque?
7.b.¿Como pensás que influye el uso de la calculadora en la comprensión por parte de los alumnos sobre los números reales?.
8. a. Es frecuente escuchar que los números naturales sirven para contar, los racionales para medir, los irracionales ¿para qué sirven?
8.b. ¿Que piensa responderían tus alumnos a la pregunta anterior?
9. a. ¿Podrías nombrar un número real? (entre a y b significa mayor que a y menor que b) entre 0 y 2 ; entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y Pi .
9.b. ¿Podrías nombrar 7 números reales en los mismos casos?:
9.c. ¿ Cuantos números hay entre 0 y 2 ; entre 1/5 y 1/4 y entre 3,14 y Pi .
9.d. Si le propusieras las tareas 2.a, 2.b, 2.c a tus alumnos ¿Crees que puedrían resolverlas? ¿Qué porcentaje de alumnos lo resolvería?. ¿Qué dificultades, consideras, pueden tener para resolverlas?
10. Decir verdadero o falso y justificar
10.a. Siempre es posible encontrar un racional entre dos racionales
10.b. Siempre es posible encontrar un racional entre dos irracionales
10.c. Siempre es posible encontrar un irracional entre dos irracionales
10.d. Siempre es posible encontrar un irracional entre dos racionales.
Nota. Entre a y b significa mayor que a y b menor que

Segundo encuentro

1.a. Represente los siguientes números en una recta numérica

$$3{,}14 \;;\; \sqrt{16} \;;\; 0 \;;\; -3 \;;\; 2{,}9 \;;\; \sqrt{3} \;;\; \frac{1}{4} \;;\; \pi \;;$$

$$0{,}6666 \;;\; -3{,}1415 \;;\; 0{,}6\overset{\frown}{7} \;;\; 1{,}33333\ldots\text{ (infinitos 3)} \;;\; 0{,}619$$

1.b. ¿Cuales, en tu opinión , serían las principales dificultades que encontrarían tus alumnos para realizar esta tarea?

2. a. ¿Te parece que a tus alumnos les resulta fácil, natural o intuitivo la representación de los números reales en la recta? ¿ qué dificultades encontrás más frecuentemente al respecto?
2.b. ¿Recordás cuando representaste por primera vez los números en una recta y si es así te resultó natural y fácil?
3. a. Si fuera posible marcar sobre la recta TODOS las fracciones (racionales), la recta ¿se llenaría, se completaría? 4.b.
3.b. Si además de los racionales, marcáramos todas las raíces (cuadradas, cúbicas, etc) de números racionales, ¿se completaría la recta? ¿Quedaría lugar para más irracionales? ¿Para cuántos?

3.c. Si de la recta numérica quitásemos TODOS los números racionales (fracciones) ¿qué nos quedaría?

3.d. ¿Podrías anticipar las respuestas de tus alumnos a las preguntas anteriores?

4. a. Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

4.b. ¿Podes describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

4.c. En tu opinión ¿cuáles serian las respuestas más frecuentes de tus alumnos a la situación planteada en a y b? Y otras respuestas posibles?

5. a ¿Pensás que es posible asignar un nombre castellano a cada número real? Justifica

5.b. En tu opinión ¿cuáles serian las respuestas más frecuentes de tus alumnos a la pregunta planteada en el ítem a.?: Y otras respuestas posibles?:

6.a. En cual de los siguientes números hay más cantidad de cifras 9 (comparar dos a dos)
0,9999……..(infinitos 9) ; 0,99999999 :
0,92929292……(infinitos 92)

6.b. En tu opinión ¿cuáles serian las respuestas más frecuentes de tus alumnos a la situación planteada en a? Y otras respuestas posibles?:

Nota: en (a,b) están todos los números mayores que a y menores que b
en [a,b] están todos los números mayores o iguales que a y menores o iguales que b

7.a. ¿Cuántos números reales hay en los siguientes intervalos:
A= (0;1)? B = [0;1]? C= [0;15.000.000]?

7.b. En el conjunto A hay, ¿más, menos o la misma cantidad que en el intervalo B? ¿Por qué?

7. c. En el conjunto A hay, más, menos o la misma cantidad de números que en el C? ¿Por qué?

7. d. En tu opinión ¿cuáles serian las respuestas más frecuentes de tus alumnos a la situación planteada en a, b y c? Y otras respuestas posibles?:

8.a. En el intervalo A=(0,1) , el 1 no pertenece al intervalo. ¿Podrías escribir el número que se encuentra más cerca del 1 y que pertenezca al intervalo?

8.b. En tu opinión ¿cuáles serian las respuestas más frecuentes de tus alumnos a la situación planteada en a? Y ¿otras respuestas posibles?:

9. a. ¿Que conjunto es más abundante (rico - con mas cantidad de números):
- los naturales o los enteros?
- los enteros o los racionales?
- los racionales o los irracionales?

9.b. En tu opinión ¿cuáles serian las respuestas más frecuentes de tus alumnos a la situación planteada en a? Y otras respuestas posibles?:

10. a. Con un instrumento ideal de "corte perfecto" cortamos un segmento de recta en dos partes. Desechamos una parte. Con el segmento que nos queda repetimos el proceso. Explicar si crees que este proceso puede continuar indefinidamente.

10. b. Que piensa respondería un alumnos medio a la pregunta anterior?

10.c. ¿Que piensas que obtendríamos luego de realizar infinitos cortes?
10.d. Que piensa respondería un alumnos medio a la pregunta anterior?

Referencias Bibliográficas

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathematiques, Vol 8,* no 3, 267-312,

Artigue, M.(1995). La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. y otros (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). Bogotá: Iberoamérica.

Balacheff, N. (1987). Processus de pruebe et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, vol 18,* 147-176

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques, 2(1),* 37-127.

Cornu B., (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Comceptions et Obstacles,* Tesis de Doctorado, no publicada, Universidad de Grenoble. Grenoble. Francia

Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentisage scolaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 1(1),* 77-110

Fischbein, Y., Jehiam, R., y Cohen, D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings of the XVIII PME (vol. 2),* 352-359). Lisboa, Portugal.

Juan M. y Montoro V. (2009). Concepciones de estudiantes de nivel medio sobre aspectos básicos de la noción de infinito. *Revista de Educación Matemática). Vol 24 – dig. 24-1 (FAMAF- Córdoba (Rep. Argentina).* ISSN 0325-6308.

Monaghan, J., (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics. 48 (2-3),* 239-257

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje (28/4),* 409 - 427.

Montoro, V. (2010). Concepciones de los estudiantes de profesorado de matemática sobre la demostración. *EPSILON Vol 27(2),* 45-55.

Moreno Armella, L., y Waldegg G. (1991*).* The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 211-231.

Moreno-Armella, L., & Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Revista de Educación Matemática, 7(1),* 12-28.

Moss, J., y Case, R. (1999*).* Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30(2),* 122–147.

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias,* 14(1), 3-14.

Romero, C. (2003*)* Sobre algunos entornos de significado para los números reales. En actas del *X JAEM. Ponencia P63, pp. 549-564 .* ICE Universidad de Zaragoza. España

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 6(1*), 5-67.

Steiner, R. (1984). Teaching About the Real Numbers. *The American Mathematical Monthly (Vol. 91- 3),* 202-203..