EL TRATAMIENTO DE CIERTAS NOCIONES MATEMÁTICAS MEDIANTE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

Lina Mónica María Oviedo[1,2], Ana María Kanashiro[1]
Facultad de Ingeniería Química[1]- Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas[2]
Argentina
loviedo@fiq.unl.edu.ar
Nivel Medio

Resumen
Existen dos nociones de fundamental importancia en el aprendizaje de la matemática que están profundamente relacionadas: la de función y la de límite. Su enseñanza presenta múltiples problemas relacionados por una parte con las diversas concepciones de los objetos considerados y por otra con los obstáculos cognitivos que ellos traen aparejados.
Así sosteniendo la idea de límite está el *infinito* que los alumnos no alcanzan a comprender entre otras razones porque no es un concepto sino una noción. La construcción de esta noción debe ser contextualizada bajo sus diferentes significados asociados.
Una manera distinta de acercarse a estas ideas es trabajar con sistemas dinámicos discretos. Estos constituyen un área de investigación importante en matemática que presenta la particularidad de ser accesible para los no matemáticos y en donde, los procesos iterativos tienen una importancia fundamental.
En el presente trabajo proponemos un taller acerca de los procesos iterativos relacionados con los sistemas dinámicos discretos. El mismo está pensado para trabajar dichos procesos desde la práctica con el propósito de que cada una de las actividades propuestas pueda llevarse a cabo en el aula.
<u>Palabras clave:</u> sistemas dinámicos, funciones, iteración, límite, infinito

Objetivos del taller

1. Introducir las nociones relacionadas a sistemas dinámicos discretos.
2. Presentar algunos problemas y su resolución a través de la iteración de funciones.
3. Trabajar la noción de límite propendiendo a la formalización de la misma.

Contenidos del curso

1. Iteración de funciones. Nociones principales.
2. Sistemas Dinámicos Discretos.

Desarrollo

Para trabajar los procesos iterativos desde la práctica y con el propósito de que cada una de las actividades propuestas pueda llevarse a cabo en el aula se estructura el presente taller de la siguiente manera:
Primera jornada: Iteración gráfica de funciones- sistema dinámico discreto.
Segunda jornada: Iteración numérica de funciones. Trabajo con la calculadora.

Un poco de Historia

Para hablar del origen de los “sistemas dinámicos” debemos retrotraernos al siglo XVII y a los logros matemáticos y científicos que a partir de esa época, llegan hasta la actualidad.

Todo esto está ligado a la modelización de diversos fenómenos naturales, utilizando ecuaciones diferenciales y las funciones que ellas definen. Los principales referentes a estas cuestiones son:

Newton (1642 –1727) y **Leibniz** (1646 – 1716) que nos legaron las ecuaciones diferenciales como principal herramienta para matematizar la descripción de fenómenos físicos que evolucionan con el tiempo. Así por ejemplo Newton usó ecuaciones diferenciales para deducir y unificar las tres leyes de Kepler (1571 – 1630).

Poincaré (1854 – 1912) a fines del siglo XIX y a partir del estudio de los tres cuerpos inicia la investigación de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales que representan a los fenómenos. Con sus investigaciones los “sistemas dinámicos” cobran mayor impulso ya que, si bien no siempre es posible encontrar una solución para los mismos, su estudio permite predecir el comportamiento del sistema en el tiempo.

George Birkhoff (1884- 1944) Ya en la primera mitad del siglo XX, este matemático se dio cuenta de la importancia del diagrama de fases y enfatizó el estudio de los sistemas dinámicos discretos como manera de entender la dinámica, más compleja, de las ecuaciones diferenciales.

En esa misma época surgen nuevas técnicas topológicas y geométricas que alejaron a los matemáticos del estudio de los sistemas dinámicos salvo en la Unión Soviética, donde matemáticos como Lyapunov, Pontryagin, Andrunov, entre otros, continuaron su estudio.

En los años 60, debido principalmente a la influencia de Smale y Mosser en EEUU, Peixoto en Brasil y Kolmogorov, Arnold y Sinai en Rusia, se produce un resurgimiento del tema. La geometría combinada con el análisis duro (geometría diferencial) permitió a Kolmogorov, Arnold y Mosser formular la teoría KAM que posibilitó comprender los descubrimientos de Poincaré.

Stephen Smale (1930 -) Su trabajo con el tema comenzó en la década de los sesenta y uno de sus aportes a la teoría de sistemas dinámicos es la “estabilidad estructural” que permite, entre otras cosas, atacar el problema de la información imperfecta.

Para entender la idea de estabilidad estructural, imaginemos que el diagrama de fases de un sistema dinámico está dibujado en una lámina de goma. Cualquier otro diagrama que se obtiene por estiramiento o compresión de esta lámina es topológicamente equivalente al anterior. Los diagramas de fases topológicamente equivalentes presentan el mismo comportamiento y poseen la misma dinámica. La persistencia del sistema bajo pequeñas perturbaciones recibe el nombre de estabilidad estructural.

Supongamos que el sistema dinámico representa un sistema físico real para el que se han hecho ciertas consideraciones y aproximaciones que implican ciertos errores experimentales o de aproximación. Si el sistema no es estructuralmente estable los pequeños errores o aproximaciones cambian totalmente la estructura de la solución real. En cambio si es estructuralmente estable esos pequeños errores no tienen importancia y la solución resulta topológicamente equivalente a la real.

Lorenz (1917-2006). El nombre de Lorenz se asocia al sistema dinámico que representa la evolución del clima en el transcurso del tiempo. Dicho sistema no es estructuralmente estable.

Las ecuaciones de este sistema no son lineales y lo que Lorenz demostró es que tienen comportamiento caótico esto es, pequeñas perturbaciones iniciales pueden producir cambios muy grandes: Efecto Mariposa. (Oviedo, 2003)

¿Qué es un sistema dinámico?

El objetivo de la teoría de los sistemas dinámicos es el estudio del comportamiento a largo plazo o comportamiento asintótico de un sistema que depende del tiempo. Por ejemplo, el comportamiento de la población de una especie en una determinada situación de estudio.

Cuando la situación a estudiar ocurre en tiempos determinados en vez de continuamente, el modelo que se adopta es el de un sistema dinámico discreto a través de una ecuación en diferencias finitas o simplemente una ecuación en diferencias. En una ecuación en diferencias, la solución se obtiene mediante la iteración de una función f.

El objetivo es comprender el comportamiento de los números x, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f(x))$, ..., $f_n(x)$, ..., cuando n aumenta. Si consideramos que n evoluciona hacia el pasado la iteración es: $f_{-1}(x)$, $f_{-2}(x)$, ..., $f_{-n}(x)$ ... , estas son las iteraciones de la función f^{-1}, inversa de f, en caso de que exista. (Devaney, 1990)

¿Qué vamos a hacer en el presente taller?

Los sistemas dinámicos discretos pueden trabajarse en los primeros cursos de la universidad, así como en los últimos años de la educación media.

En este taller trabajaremos con iteración de funciones lineales y cuadráticas, asociadas a modelos simples de sistemas dinámicos de primer orden, discretos.

La idea es poder describir el comportamiento a largo plazo y acercarnos a las nociones de límite e infinito. Todo esto lo plantearemos a partir de actividades que pueden llevarse, al aula en sus prácticas docentes, en la escuela media.

Al comenzar el taller se introducirán brevemente los conceptos básicos involucrados en la propuesta como son las nociones de sistema dinámico, solución de un sistema dinámico, iteración de funciones, punto fijo, atractor, repulsor, valor inicial, órbita, límite de una sucesión, etc.

A partir de la sucesión generada para obtener la solución del sistema dinámico se pueden establecer conexiones con otros conceptos matemáticos.

Las actividades que deberán desarrollar los asistentes al taller serán de dos tipos, a saber:

1. Iteración de funciones con el auxilio de la calculadora (lineales, cuadráticas, $\sqrt{x}$, 1/x, logistica) asociadas a modelos simples de sistemas dinámicos discretos de primer orden.
2. Iteración gráfica de la función.

En la primera jornada se trabajará con iteración gráfica de algunas funciones para permitir hacer un análisis desde la gráfica como su nombre lo indica. Aquí se introduce la idea básica de iteración gráfica que consiste de un proceso algorítmico informal de movimientos repetidos "adelante y atrás" entre una curva y la diagonal (recta y = x) que conectan segmentos horizontales y verticales (Construcción de caminos según Pedro Alson) (Oviedo, 2003). Este proceso produce solamente escaleras o espirales, dirigiéndose a un punto fijo (denominado atractor) o alejándose del mismo (repulsor). Esto es, imagine la trayectoria de un punto que comienza en el eje x y que se mueve repetidamente "adelante y atrás" entre una curva y la diagonal siguiendo estos pasos:

a) muévase arriba o abajo hacia la curva.

b) muévase a la derecha o izquierda hacia la diagonal.

Para crear la trayectoria dibuje primero un segmento vertical a la curva y desde ahí uno horizontal a la diagonal. El proceso geométrico donde centrado en esta actividad es la repetición secuenciada de estos dos pasos una y otra vez. En cada uno se utiliza el último punto como el siguiente punto inicial. Como resultado surge la noción de punto fijo y la idea de límite.

En la segunda jornada se trabajará con la iteración numérica de las funciones trabajadas desde el punto de vista gráfico utilizando la calculadora. El análisis de los resultados, volcados en una tabla, permitirá visualizar la sucesión generada y describir el comportamiento a largo plazo de la órbita de los valores iniciales indicados. Esta descripción posibilitará decidir si la sucesión es convergente, divergente u oscilante. Así mismo, analizando dicha tabla, se podrá tratar intuitivamente la relación ε-N de la definición de límite de una sucesión.

Para trabajar esta noción se pueden proponer actividades como las siguientes, después de haber detectado que el valor del límite es a:

- Determine en que iteración el valor de $|f_n(x_0) - a|$ es menor que ε (por ejemplo con ε = 0,1; 0,01; 0,001).
- ¿Cómo es la diferencia entre $f_n(x_0)$ y a para valores más grandes que ese N?

Se puede proponer hacerlo para 2 o 3 valores de ε, a fin de elaborar, a continuación, como conclusión que si *el límite existe, cada vez que fijemos un ε, podremos encontrar un N.*

Por otra parte, para trabajar el vínculo entre N y el valor inicial se puede preguntar:

¿De qué valor inicial se deberá partir para llegar al límite en 43 iteraciones?

Responder esta pregunta implica usar la función inversa de la función iterada, tomando como valor inicial el más próximo al punto fijo, retroceder los 43 pasos y así determinar el valor inicial.

Referencias Bibliográficas

Devaney, R. L.,(1990), Chaos, Fractals, And Dynamics- Computer Experiments In Mathematics. U.S.A. Addison- Wesley Publishing Company Inc.

Oviedo, L., (2003). *La enseñanza de los sistemas dinámicos discretos como medio para analizar dificultades cognitivas en cuanto a las nociones de función y número real en la transición escuela media.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Río Cuarto. Río Cuarto.

ANEXO

Actividades tipos que se llevarán a cabo en el taller:

I .- ITERACIÓN DE FUNCIONES Y EL USO DE CALCULADORA

ACTIVIDAD 1 Iteración de $f(x) = \sqrt{x}$

a- Tome $x_0 = 10$, itere f(x) y registre los valores obtenidos en la tabla 1. Si designa con n el número de la iteración, ¿a partir de que valor de n cambia la pantalla, es decir desaparecen los decimales?

b- ¿Qué significa que desaparezcan los decimales?. ¿La aparición de 1 en el visor de la calculadora tiene que ver con el valor real del resultado o es un problema de limitación de la máquina? Recuerde que las raíces cuadradas de números naturales que no son exactas, son siempre números irracionales.

c- Repita lo mismo para cada uno de los siguientes valores iniciales:
$x_0 = 0,1$; $x_0 = 123,456$; $x_0 = 2,5$; $x_0 = 0,75$.

d- Registre todos los valores en la tabla 1 e informe a partir de que n desaparecen los decimales.

e- ¿Qué sucede con la iteración si se ingresa el siguiente valor: $x_0 = 9.10^{99}$? ¿El valor de n para el cuál aparece 1 es muy distinto a los obtenidos en los ítems anteriores?

f- Explique qué ocurre con la iteración de f(x) a medida que n aumenta.

g- Elabore una conclusión que exprese el resultado de la iteración en función del valor inicial elegido.

II .- ITERACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

ACTIVIDAD 7

Para cada una de las siguientes funciones, realice la iteración gráfica usando los valores iniciales que se indican, dé aproximadamente las coordenadas del punto fijo y clasifíquelo en atractor o repulsor.

a) $x_0 = -1,25$; $x_0 = 0,2$