

LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO GEOMÉTRICO Y DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA. UNA EXPERIENCIA DESDE EL CEINEM - NT

Martha Iglesias Inojosa

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Maracay

mmiglesias@cantv.net

Pensamiento Geométrico

RESUMEN

Desde el escenario de actuación que representa la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría adscrita al Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT) de la UPEL Maracay y a la luz de los resultados de las indagaciones e investigaciones llevadas a cabo en distintas instancias académicas e investigativas, se pretende presentar – a través de esta conferencia - un espacio para la reflexión en torno a los rasgos relevantes de las nuevas tendencias en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, entre los cuales destacan: (1) el papel de la intuición y visualización matemática en la construcción y manipulación del conocimiento geométrico, (2) el uso de los llamados software de Geometría Dinámica en las clases de Matemática, (3) el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele como soporte conceptual y metodológico del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, (4) la necesidad de cambiar los procedimientos de evaluación, ya que, mediante este enfoque didáctico, es necesario evaluar las habilidades geométricas asociadas a los procesos de conceptualización, axiomatización, experimentación, visualización, clasificación, demostración y resolución de problemas y (5) el diseño y la implementación de propuestas didácticas sustentadas en un proceso permanente de investigación educativa.

Palabras clave: Pensamiento Geométrico, Didáctica de la Geometría y unidades didácticas con contenidos geométricos.

Problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría

El *sistema tradicional de enseñanza de la Geometría* ha sido seriamente cuestionado por la comunidad internacional de educadores matemáticos, ya que, según Castelnovo (1989), desde épocas remotas la misma ha estado marcada por su carácter memorístico y repetitivo.

La enseñanza de la Geometría no ha sido abordada desde una perspectiva psicopedagógica que contribuya al desarrollo de las capacidades cognitivas de los niños y jóvenes y al logro de los objetivos actitudinales asociados a ésta y, por ende, solamente ha logrado propiciar un aprendizaje memorístico y repetitivo.

Esta problemática educativa ha captado la atención de los educadores matemáticos durante los últimos cincuenta años.

En 1959, el matemático francés Jean Dieudonné expone la necesidad de abandonar la enseñanza euclidea sustituyéndola por una matemática más viva y motivadora. En 1960, un grupo de especialistas reunidos en Dubrownik (Yugoslavia) sugirieron organizar ciertos cursos de matemática con bases intuitivas y experimentales, así como unificar las diversas áreas del conocimiento matemático. Tales recomendaciones no se siguieron y, en cambio, la axiomática euclidea fue sustituida por la axiomática basada en la obra del Grupo Bourbaki. Esta reforma se conoció con el nombre de “*Matemáticas Modernas*”.

De modo que, en las décadas de los años sesenta y setenta, se hizo énfasis en las estructuras lógicas y algebraicas del conocimiento matemático, dejando así relegada a la Geometría (Ruiz y Barrantes, 1998).

A finales de la década de los años setenta, en el seno de la comunidad internacional de educadores matemáticos, se inició un movimiento orientado a rescatar la enseñanza de la Geometría en el ámbito escolar. Cabe mencionar que, en el Congreso de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) que se realizó en Karlsruhe (Alemania) en 1976, el matemático inglés Michel Atiyah manifestó que la Geometría había sido suprimida en las escuelas de muchísimos países, sin tener en cuenta que el aprendizaje de la Geometría ayuda a establecer vínculos entre el mundo físico y la Matemática, ya que contribuye al desarrollo de la intuición, de la imaginación espacial y del razonamiento lógico – deductivo (Castelnuovo, 1989).

A partir de la década de los años ochenta, los educadores matemáticos han reconocido la necesidad de reinsertar la enseñanza de la Geometría en el ámbito escolar desde una perspectiva matemática y psicopedagógica adecuada y, por ende, ellos han concentrado sus esfuerzos en el desarrollo de estrategias didácticas acordes con las tendencias emergentes en la Educación Matemática (Scott y Wenzelburger, 1989). Al respecto, se reconoce que el conocimiento geométrico no debe ser presentado en forma acabada a los estudiantes y, por ende, es recomendable evitar una presentación rigurosamente sostenida de una Geometría Axiomática.

No obstante, la ausencia de una buena formación geométrica, durante muchos años, ha dificultado a una generación de docentes de Matemática la puesta en práctica de tales propuestas didácticas, por no poseer el dominio del conocimiento geométrico, ni las habilidades didácticas requeridas (Alsina Catalá, Fortuny Aymemí y Pérez Gómez, 1997; Veloso y Ponte, 1999).

Asimismo, en función a la experiencia docente de la conferencista, es habitual que, en los institutos venezolanos de formación docente, ingresen estudiantes con una escasa, en ocasiones nula, formación en Geometría, lo cual “incide en la falta de madurez matemática de los alumnos y en su poca capacidad de razonamiento” (Carrera de Orellana y Moya Romero, 1992; 83).

La formación inicial de los docentes es el principal objeto de estudio de diversas investigaciones en distintos países (Ortiz, 2002), debido a que se reconoce la necesidad tanto de caracterizar el conocimiento profesional del docente como de diseñar, desarrollar y evaluar propuestas didácticas que permitan a los futuros docentes apropiarse de tal conocimiento profesional (González López y Lupiañez Gómez, 2001).

Esta situación también se evidencia, en el ámbito de la investigación en Educación Matemática, cuando se aborda la problemática relacionada con la formación inicial de los docentes de Matemática (Kilpatrick, 1995; Camacho, Socas y Hernández, 1998), con el propósito fundamental de clarificar los fines que se persiguen (el para qué), los contenidos a tratar (el qué) y la metodología a seguir (el cómo) en los institutos de formación docente.

Así, pues, puede inferirse que - en el proceso de formación inicial de los docentes de Matemática - sus formadores deben propiciar la participación de éstos en situaciones de enseñanza y aprendizaje orientadas a la adquisición del conocimiento didáctico debidamente asociado al conocimiento matemático. Entendiéndose – en este trabajo – por conocimiento didáctico “aquel que proporciona al profesor unas herramientas conceptuales y funcionales que le permiten reflexionar con criterios fundados sobre la planificación y el desempeño de su trabajo profesional” (Ortiz, 2002; p. 38). Por consiguiente, la formación inicial de los docentes de Matemática debe ser un escenario propicio para la reflexión didáctica en torno a las situaciones problemáticas fundamentales del campo de la Educación Matemática y la búsqueda de soluciones efectivas a las mismas.

En este sentido, la autora ha venido vinculando la investigación sobre la formación inicial de los docentes en Matemática con dos de los elementos considerados claves de la Educación Matemática (Veloso y Ponte, 1999): (1) La enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, y (2) la inserción de las nuevas tecnologías – como los software de Geometría Dinámica – en las clases de Matemática.

Al respecto, cabe señalar que, Iglesias (2000) asumió el diseño e implementación de una propuesta didáctica que integrara elementos considerados innovadores y de un comprobado potencial didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría: (a) el uso de un software de Geometría Dinámica como el Cabri – Géomètre II, (b) la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y (c) el llamado enfoque de resolución de problemas. Esta propuesta se materializó con el diseño e implementación del curso de *Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora* (en adelante, RPG_AC), el cual estuvo dirigido a los estudiantes de la especialidad de Matemática de la UPEL Maracay durante el período académico 1999 – 2, lográndose así su incorporación, como curso optativo de integración, al diseño curricular vigente de la especialidad de Matemática en esta institución (Iglesias y Mireles, 2003).

Asimismo, en el marco de la Maestría en Educación, mención Enseñanza de la Matemática que se ofrece en la UPEL Maracay, la autora asumió tanto el diseño del programa como la administración del curso obligatorio de *Geometría y su Didáctica*, con el propósito de brindar a los participantes la oportunidad de desarrollar habilidades para el análisis y la solución de problemas propios del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, mediante el diseño de modelos didácticos centrados en la resolución de problemas geométricos y sustentados en teorías de la instrucción y del aprendizaje que sean pertinentes. Entre los contenidos abordados en dicho curso, se encuentran: (1) Problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en Venezuela, (2) Teorías contemporáneas de la instrucción y del aprendizaje aplicables a la enseñanza de la Geometría, entre ellas el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, (3) Enseñanza de la Geometría centrada en la resolución de problemas, (4) Uso efectivo de los Software de Geometría Dinámica para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría y (5) Diseño de modelos didácticos aplicables en la enseñanza de la Geometría. Además, se discuten ciertos referentes teóricos y metodológicos que orientan el diseño, la puesta en práctica y la evaluación de unidades didácticas con contenidos geométricos por parte de los docentes de Matemática participantes en este curso. Entre estos referentes destacan las siguientes: (1) *Modelo didáctico – metodológico* (Luengo y otros, 1997), (2) el *Mapa de Enseñanza y Aprendizaje* (Orellana Chacín, 2002), (3) los *Organizadores Curriculares* (Segovia y Rico, 2001), (4) el *Modelo de Van Hiele* (Van Hiele, 1959) y (5) la *Metodología de Evaluación de Programas en Educación Matemática* (Ortiz, 2002; Ortiz y Iglesias, 2006). Obviamente, escapa del alcance de esta conferencia, describir y analizar cada uno de los mencionados referentes; no obstante, cabe mencionar que el diseño de una unidad didáctica con contenido geométrico contempla los siguientes aspectos: fundamentación teórica y metodológica, análisis conceptual del tema seleccionado, intencionalidad didáctica que se persigue con el diseño y puesta en práctica de la propuesta, actividades didácticas, materiales, recursos y evaluación.

Además, cabe mencionar que el curso de *Geometría y su Didáctica* se ha convertido en la antesala del *Seminario de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría* (curso optativo de la mencionada maestría), el cual constituye un espacio orientado a brindar a los participantes la oportunidad de profundizar en la comprensión de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría y el análisis de ciertos marcos teóricos y metodológicos susceptibles de ser aplicados en la investigación sobre Pensamiento Geométrico y

Didáctica de la Geometría, teniendo como referencia reportes de investigación y artículos de divulgación que se consideren pertinentes. Es importante señalar que los participantes del seminario se dedican a elaborar su proyecto de trabajo de grado en el marco de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría.

A continuación, se presentan ciertas interrogantes que han surgido, a partir de la reflexión didáctica, de las situaciones observadas en distintas instancias de actuación docente y que, además, han orientado a los proyectos asociados a la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría:

¿Por qué la enseñanza de la Geometría en forma tradicional no ha facilitado el aprendizaje significativo de esta área en la mayoría de los estudiantes?

¿Cuáles son las repercusiones del uso de la computadora sobre la enseñanza de la Matemática y, en especial, de la Geometría?

¿En qué medida el uso de un software de Geometría Dinámica puede propiciar el aprendizaje significativo de esta área del conocimiento matemático?

¿Cómo propiciar el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas y metacognitivas relacionadas con la resolución de problemas geométricos asistida con un software de Geometría Dinámica?

¿Es posible que los docentes en formación aprendan a enseñar Geometría haciendo uso de estrategias didácticas innovadoras y software de Geometría Dinámica, a la vez que profundizan sus conocimientos geométricos?

¿Cómo planificar actividades didácticas que tiendan a favorecer tanto la comprensión de las demostraciones en Geometría como el desarrollo de habilidades cognitivas asociadas al quehacer matemático por parte de los futuros docentes de Matemática?

¿Cómo los software de Geometría Dinámica podrían favorecer la exploración y la formulación de conjeturas en Geometría, a partir de la resolución de problemas geométricos, por parte de los futuros docentes de Matemática?

¿Cómo propiciar el paso de la conjetura a la demostración en Geometría por parte de los futuros docentes de Matemática?

¿Qué uso le dan los futuros docentes de Matemática a los software de Geometría Dinámica cuando abordan, mediante un enfoque de resolución de problemas, las demostraciones en Geometría?

¿Cuáles son las habilidades didácticas puestas en práctica, por los futuros docentes de Matemática, cuando diseñan actividades de enseñanza y aprendizaje en el contexto de un programa de formación basado en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y que integre el uso de un Software de Geometría Dinámica, el enfoque de resolución de problemas y la demostración en Geometría?

¿Cuáles son las actitudes de los futuros docentes de Matemática hacia la demostración matemática y el uso de los software de Geometría Dinámica?

¿Cuál es el Nivel de Razonamiento Geométrico alcanzado por los estudiantes de Educación Básica, previo al estudio de una determinada unidad didáctica con contenidos geométricos?

¿Cuáles son las habilidades geométricas puestas en práctica por los alumnos de Educación Básica, cuando participan en actividades didácticas diseñadas para la enseñanza y aprendizaje de contenidos geométricos?

¿Tales unidades didácticas contribuirán al desarrollo del razonamiento geométrico en los alumnos de Educación Básica, propiciando su paso al siguiente nivel de razonamiento?

Objetivos Generales de la Línea de Investigación

En función de las interrogantes planteadas, la línea de investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría tiene los siguientes objetivos generales:

1. Incorporar entre los estudios de investigación a desarrollar en el *Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática utilizando Nuevas Tecnologías* (CEINEM – NT) los siguientes:

- Estudios sobre los diversos elementos cognitivos, metacognitivos y afectivos que intervienen en la resolución de problemas geométricos usando un software de Geometría Dinámica.

- Estudios sobre los procesos de concepción y visualización matemática que se producen al abordar la resolución de problemas geométricos asistido por computadora.

- Estudios sobre diseño, desarrollo y evaluación de propuestas didácticas basadas en la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y el uso de un software de Geometría Dinámica aplicables en el ámbito educativo nacional.

- Estudios sobre la evaluación del impacto del uso de las llamadas nuevas tecnologías sobre el proceso de formación inicial de los docentes de Matemática.

2. Diseñar, desarrollar y evaluar propuestas didácticas basadas en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y orientadas a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría en el ámbito escolar.

3. Diseñar, desarrollar y evaluar estrategias didácticas que propicien la manipulación dinámica de los objetos geométricos mediante el uso efectivo de los software de Geometría Dinámica en los distintos niveles educativos.

4. Diseñar y desarrollar estrategias de evaluación que permitan evaluar en forma efectiva los procesos propios de construcción del conocimiento geométrico.

5. Crear ambientes de aprendizaje que propicien el desarrollo de las habilidades asociadas al proceso de resolución de problemas geométricos asistido por computadora.

6. Valorar el potencial didáctico del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría en el desarrollo de habilidades cognitivas asociadas al quehacer matemático y, por ende, en la comprensión de la naturaleza científica de la Matemática.

Referentes Teóricos

A continuación se revisarán ciertos referentes que han orientado el desarrollo de los proyectos de investigación culminados o en desarrollo en el marco de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría.

Uso de los Software de Geometría Dinámica

Para comenzar es importante resaltar que los *software de Geometría Dinámica* (en adelante, SGD) han logrado ocupar un lugar privilegiado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en diversos países, según las diversas reseñas de experiencias didácticas centradas en el uso de tales software (Pérez Jiménez, 1993; Ponte, 1995; Huertos Rodríguez, 1995; Gravina, 1996; Loureiro, 1999; Iglesias, 2000; González López y Lupiañez Gómez, 2001; Campistrous Pérez y López Fernández, 2001; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002; Kadunz, 2002; Jahn, 2002; Gawlick, 2002).

Los SGD son un conjunto de programas computarizados que crean un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes exploran las figuras geométricas, descubren ciertas propiedades y formulan conjeturas. Con la utilización de este tipo de software, las construcciones geométricas adquieren una condición dinámica, superando así la condición estática de una construcción realizada con lápiz y papel, lo cual posibilita contar con múltiples representaciones gráficas de una misma construcción geométrica y visualizar, en forma continua y en tiempo real, cómo se produce el cambio de un estado a otro en dicha construcción. Así, se logra introducir la experimentación en las clases de Geometría y, con ello, se logra crear un ambiente donde los estudiantes aprenden a conceptualizar y a conjeturar y, además, sienten la necesidad de validar o rechazar tales conjeturas (King y Schattschneider, 1997; De Villiers, 1999 a; Loureiro, 1999; Iglesias, 2000; Campistrous Pérez y López Fernández, 2001; González López, 2001; Kadunz, 2002; Sträßer, 2002).

Cabe señalar que, en el caso particular de la *resolución de problemas geométricos utilizando el Cabri – Géomètre II* (en adelante, Cabri II), se puede establecer que el alumno se enfrenta a una situación problémica en el ámbito de la Geometría, cuando se enfrenta a la necesidad de comprender y justificar cómo se vinculan las relaciones observadas entre los objetos geométricos que configuran una construcción realizada y manipulada con el Cabri II. El proceso de resolución de problemas geométricos es ampliamente favorecido por el uso del Cabri II, debido a que los estudiantes disponen de una herramienta que facilita la *visualización matemática*, la cual trasciende a la simple percepción visual debido a que este proceso consiste en centrar la atención en representaciones geométricas concretas con el propósito de descubrir o develar las relaciones abstractas existentes entre los objetos (Iglesias, 2000; Barroso Campos y Gavilán Izquierdo, 2003).

A partir de la observación y evaluación sistemática de los participantes en el curso de RPG_AC y de su propia experiencia como resolutora de problemas geométricos, la autora ha establecido que la *resolución de problemas geométricos asistido por computadora* es un proceso que contempla, entre otros, los siguientes aspectos:

- Realizar una construcción consistente con regla y compás usando el Cabri II (u otro SGD).
- Comprender el significado de las definiciones de cada uno de los objetos que conforman una construcción geométrica.
- Visualizar las relaciones existentes entre los objetos que intervienen en dicha construcción.
 - Reconocer las llamadas características invariantes geométricas.
 - Formular conjeturas.
 - Introducir construcciones geométricas auxiliares (si fuese necesario).
 - Poder deducir consecuencias pertinentes a partir de la información disponible.

Asimismo, la autora ha identificado ciertas dificultades confrontadas por algunos de los participantes en el curso de RPG_AC:

- *Realización de construcciones geométricas inconsistentes*: La inconsistencia de una construcción geométrica se evidencia cuando, al dinamizarla, no se preservan las propiedades deseadas, debido al manejo inadecuado del software (en el cual hay que declarar explícitamente las relaciones de dependencia de un objeto con otro) o a la realización de construcciones sin tomar en consideración las propiedades que caracterizan un objeto geométrico (lo cual evidencia cierta deficiencia en la comprensión y manipulación de los conceptos geométricos).

- *Limitaciones para describir las propiedades geométricas que se visualizan en una construcción:* Los estudiantes centran sus esfuerzos en la identificación de propiedades invariantes en cada una de las construcciones geométricas y, por consiguiente, en la formulación de conjeturas; sin embargo, se evidenciaron ciertas dificultades en cuanto al uso adecuado del lenguaje geométrico y al momento de establecer las definiciones de ciertos objetos geométricos, a partir de la visualización de algunas de sus propiedades básicas.

- *Dificultades para transitar de la conjetura a la demostración:* A pesar que los participantes previamente han cursado las asignaturas obligatorias de Geometría I y II, en las cuales se sigue un tratamiento rigurosamente axiomático de la Geometría Euclidiana y, por ende, se ven obligados a realizar un importante número de demostraciones propuestas en el conocido libro de *Geometría Moderna* escrito por E. Moise y F. Downs (1986), ellos manifiestan ciertas dificultades para abordar demostraciones geométricas que involucren tópicos no abordados en estos cursos y de los cuales no tenían una referencia clara sobre las definiciones y propiedades que podían ser utilizadas durante el proceso de demostración. La autora se atreve a señalar que los estudiantes cuando abordan una demostración en los cursos de Geometría I y II siguen, en forma sistemática, la teoría axiomática y, por supuesto, no correrían el riesgo de utilizar definiciones no establecidas o propiedades aún no demostradas formalmente en clase. En cambio, en los talleres realizados en el curso de RPG_AC, se pretendió que los estudiantes experimentaran y comprendieran que los teoremas son producto de un proceso propio del quehacer matemático; proceso que pasa por las siguientes etapas:

Explorar → Conjeturar → Validar o Rechazar Conjeturas

- *Dificultades para entender la necesidad de demostrar lo evidente:* Dado que la realización y exploración de construcciones geométricas en un ambiente de manipulación dinámica permite la recolección de suficientes evidencias experimentales sobre las características invariantes geométricas, los estudiantes no ven la necesidad de demostrar lo que es evidente, lo que todos “pueden ver”. Por lo tanto, el docente debe propiciar a través del diálogo la necesidad de argumentar y demostrar las conjeturas establecidas, aunque su validez se evidencie claramente en la pantalla de una computadora.

Cabe señalar que la situación relacionada con las dificultades que presentan los estudiantes para entender la necesidad de demostrar lo evidente o para abordar el proceso de demostración matemática ha sido reportada por diferentes investigadores, entre los cuales destacan Fetisov (1973), Gutiérrez y Jaime (1995), De Villiers (1999 b), Gutiérrez (2000) y González López (2001) y, que, además, las mismas también se presentan en los ambientes de aprendizajes con papel y lápiz.

Por ende, la influencia del uso de un SGD sobre el proceso de la demostración matemática en Geometría es cuestión abierta a nivel investigativo (Jones, Lagrange y Lemut, 2002).

Al respecto, parece existir cierto consenso en cuanto a que la simple inserción de un SGD no garantiza el aprendizaje significativo de la geometría, ni el paso de la conjetura a la demostración (González López, 2001; Arzarello, Olivero, Paola y Robuti, 2002) y, por ende, es fundamental el papel que juega el docente en la aproximación de los estudiantes a los aspectos formales del quehacer matemático: las definiciones y la demostración formal. De modo que los docentes – investigadores deben buscar los medios a través de los cuales los estudiantes entiendan que la demostración es una actividad propia del quehacer matemático y no simplemente un requerimiento formal establecido por ellos.

El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele

Actualmente - en el ámbito de las investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría - el *Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele* es aceptado como el soporte conceptual y natural de estas investigaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990; Corberán, 1994, Gutiérrez, 2000). Dicho modelo fue presentado, a finales de la década de los 50, en los Países Bajos, por dos profesores de Matemática, Pierre Van Hiele y Dieke Van Hiele – Geldof (Van Hiele, 1957; Van Hiele, 1959). Ellos - a partir de sus propias experiencias - establecieron que, en el aprendizaje de la Geometría, los estudiantes avanzan a través de una sucesión de cinco niveles de razonamiento, los cuales se describen a continuación:

Nivel 0 (Reconocimiento): El estudiante reconoce las figuras geométricas por su apariencia y de forma global; es decir, sin llegar a identificar sus partes componentes. En este nivel, el estudiante ignora ciertas características pertinentes de la figura, mientras enfatiza algunas características no pertinentes como lo puede ser la posición ocupada por una figura en un plano. Así, un cuadrado dibujado con los lados paralelos a los bordes del pizarrón deja de ser reconocido como tal si es cambiado de posición.

Nivel 1 (Análisis): El estudiante analiza las partes componentes de una figura geométrica tales como lados y ángulos internos. Así, pues, descubre, en forma experimental, relaciones entre las partes componentes de una figura o entre objetos geométricos; reconoce las características relevantes de una figura y las diferencia de las características irrelevantes; sabe que cambiar una figura de posición a otra no afecta a sus atributos relevantes; no acepta que una figura puede pertenecer a varias clases generales y tenga varios nombres, así una proposición como la siguiente no es comprendida: "Todo cuadrado es un rombo"; no puede establecer relaciones mediante deducciones lógicas, ni hacer demostraciones formales.

Nivel 2 (Relaciones, Clasificación u Ordenamiento): El estudiante establece relaciones lógicas y sigue razonamientos deductivos sencillos, a partir de las propiedades descubiertas en el nivel 1. Sin embargo, en este nivel, el estudiante aún no comprende el funcionamiento de los sistemas axiomáticos en la validación del conocimiento geométrico.

Nivel 3 (Deducción): El estudiante que razona a este nivel entiende el significado de los axiomas o postulados y es capaz de seguir y realizar razonamientos deductivos y demostraciones formales de los teoremas.

Nivel 4 (Comparación de Sistemas Axiomáticos o Rigor Lógico): En este nivel, el estudio de la Geometría es elevadamente abstracto y no incluye necesariamente el estudio de modelos concretos o pictóricos. Aquí, el estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analiza rigurosamente tales sistemas.

Además, para la comprensión de este modelo, es necesario admitir las siguientes premisas:

- Los estudiantes no pueden llegar a un nivel si no alcanzan primero a los niveles anteriores.
- El paso de un nivel a otro no se da automáticamente con el cambio de edad, sino que el mismo está asociado al tipo de enseñanza recibida por el estudiante.
- Cada nivel tiene sus propios signos lingüísticos y su propia red de relaciones para conectar estos símbolos.
- Dos personas que razonan a diferentes niveles no pueden entenderse entre sí. En otras palabras, si los estudiantes están en un nivel y la instrucción está en un nivel diferente, entonces

el aprendizaje deseado y el progreso a través de estos niveles de razonamiento geométrico por parte de los estudiantes no pueden ocurrir.

- No todos los estudiantes alcanzan los dos últimos niveles de razonamiento (deducción y rigor lógico) propuestos en el modelo.

Además, los esposos Van Hiele proponen que cualquier estrategia instruccional que permita conducir a los alumnos de un nivel a otro, debe contemplar las siguientes fases:

Fase 1: Información: El docente procura familiarizar a los estudiantes con el tópico geométrico a considerar en la sesión de trabajo.

Fase 2: Orientación guiada: El docente - en forma oral o mediante hojas de trabajo - orienta a los estudiantes para que realicen las exploraciones geométricas iniciales y los induce a observar algunos elementos relacionados con las propiedades geométricas relevantes.

Fase 3: Explicitación: El docente incentiva a los alumnos para que expliquen - en forma oral o por escrito - los resultados obtenidos a través de sus exploraciones geométricas.

Fase 4: Orientación Libre: El docente propone a los alumnos que realicen ciertas actividades generales tales como la resolución de ciertos problemas geométricos, con el propósito de facilitar el proceso de transferencia de aprendizaje.

Fases 5: Integración: El docente pide a los alumnos que hagan un resumen de los aspectos relevantes del tópico tratado.

Por otra parte, Hoffer (1981) propone que la enseñanza de la geometría debe fomentar el desarrollo de cinco tipos de habilidades prácticas y que tienen una naturaleza claramente geométrica:

1. *Habilidad visual:* Capacidad de observación.
2. *Habilidad verbal:* Uso apropiado del lenguaje de la Geometría.
3. *Habilidad para dibujar:* Expresar ideas geométricas en forma gráfica.
4. *Habilidad lógica:* Capacidad de estructurar argumentaciones lógicas.
5. *Habilidad para modelar:* Capacidad de construir modelos geométricos asociados al medio circundante.

Entre las habilidades vinculadas con el proceso de resolución de problemas geométricos usando un programa de Geometría Dinámica y el proceso de demostración en Geometría destacan las siguientes:

Nivel 1 (Análisis):

- Expresar en un dibujo la información verbal dada.
- Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla.
- Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos.

Nivel 2 (Relaciones, Clasificación u Ordenamiento):

- Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras.
- Reconocer las propiedades comunes de diferentes tipos de figura.
- Definir con palabras adecuadas y consistentes.
- Formular frases que muestren relaciones entre figuras.

Nivel 3 (Deducción):

- Utilizar información de otra figura para deducir más información.
- Comprender las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas.
- Reconocer cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura.
- Deducir a partir de la información dada cómo dibujar una figura específica.
- Utilizar las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones.
- Poder deducir consecuencias a partir de la información dada.

- Poder deducir propiedades de los objetos geométricos a partir de la información dada.
- Poder resolver problemas que establezcan relaciones entre objetos físicos y objetos geométricos.

De modo que, a pesar que la habilidad para demostrar proposiciones matemáticas se consolida en el nivel de deducción, se observa que en los niveles previos se desarrollan ciertas habilidades geométricas que permiten abordar la demostración; esta situación debe ser tomada en consideración a la hora de diseñar una propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas geométricos que incorpore el uso de un SGD y la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, así como al momento de describir y analizar las habilidades geométricas de los futuros docentes de Matemática que estén relacionadas con la demostración matemática en ambientes de Geometría Dinámica.

Diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas con contenidos geométricos

En el proceso de *enseñanza de la resolución de problemas geométricos*, el seguimiento del *Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele* ha brindado a los docentes de Matemática una teoría coherente sobre la manera más efectiva de entender y orientar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría y, además, la aplicación de este modelo se ha hecho indispensable en el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje asistidos por el uso de los software de Geometría Dinámica.

El uso de nuevas tecnologías computarizadas como los software de Geometría Dinámica exige a los docentes que diseñen, desarrollen, implementen y evalúen propuestas didácticas orientadas a:

1. Instrumentar un diseño instruccional con un claro enfoque constructivista del aprendizaje y acorde a las nuevas tendencias pedagógicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.
2. Contribuir a la incorporación debidamente planificada de la tecnología computarizada en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría.
3. Propiciar el aprendizaje activo del conocimiento geométrico mediante el uso eficiente de un software interactivo.
4. Vivenciar el potencial didáctico de los software interactivos orientados a la enseñanza de la Geometría.
5. Aplicar el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele como soporte conceptual y metodológico del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría.
6. Estimular el desarrollo de destrezas asociadas a la resolución de problemas geométricos mediante el uso de tecnologías computarizadas.
7. Propiciar el estudio independiente y el trabajo cooperativo entre compañeros de estudio.
8. Respetar el ritmo y el estilo de aprendizaje de cada uno de los estudiantes.

Cabe señalar que, en este orden de ideas, en el marco de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, se han culminado (*) o se están desarrollando (**) los trabajos de investigación abajo indicados y que están orientados a la evaluación de unidades didácticas en sus momentos de diseño, desarrollo y resultados; unidades didácticas que abordan contenidos geométricos específicos tales como: transformaciones en el plano, triángulos, circunferencia y círculo, teorema de Pitágoras, lugares geométricos, razones y funciones trigonométricas, etc. Y que, además, incorporan el uso de materiales, recursos y estrategias didácticas como: construcciones con regla y compás, doblado o plegado de papel, plantillas de trama cuadrada, bigeoplanos, Tangram Chino, software de Geometría Dinámica, etc.

Autor(es)	Tutor(a)	Título
Martha Iglesias (**)	José Ortiz	Formación Inicial de los Docentes de Matemática: La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio Evaluativo
Zoli Moreno (*)	Martha Iglesias	Una Propuesta Didáctica Orientada a la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría en 8° Grado de Educación Básica (Moreno, 2006; Moreno e Iglesias, 2006).
Rocío Báez (*)		Principios Didácticos a seguir en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en la UPEL El Mácaro
Rolando García (*)		Estudio de las Funciones Trigonométricas y sus Inversas en un Ambiente de Geometría Dinámica
Orlando Linares (**)		Evaluación de una Unidad Didáctica orientada a la Enseñanza y el Aprendizaje del Teorema de Pitágoras en un Ambiente de Geometría Dinámica
Jacinta C. Pérez (**)		La Calculadora Graficadora en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría de la Circunferencia y del Círculo a nivel de 7° Grado de Educación Básica
Roselyn Sánchez (**)		El Plegado de Papel y las Construcciones Geométricas con Regla y Compás en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría del Triángulo a nivel de 7° grado de Educación Básica
Ernesto Rengel (**)		Evaluación de una Unidad Didáctica para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Parábola mediante el Doblado de Papel.

Asimismo, se están elaborando cinco (5) proyectos de investigación en el marco de los cursos de Tutoría I y II correspondientes a la Maestría en Educación, mención Enseñanza de la Matemática. Es importante indicar que los trabajos de investigación culminados (*) serán presentados en el marco del VI Congreso Venezolano de Educación Matemática (VI COVEM), para su debida divulgación y discusión.

Consideraciones Finales

Por lo aquí planteado, se establece que entre los *rasgos relevantes de las nuevas tendencias en la enseñanza de la Geometría* destacan:

1. Se valora el papel de la intuición y visualización matemática en la construcción y manipulación del conocimiento geométrico y, por ende, es recomendable que los estudiantes partan de la exploración de los cuerpos geométricos y las construcciones con regla y compás.
2. Se ha introducido el uso de los llamados software de Geometría Dinámica en las aulas de clase de muchísimos países, debido a que éstos facilitan la realización y exploración de los cuerpos geométricos y las construcciones con regla y compás.
3. Se ha aceptado el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele como soporte conceptual y metodológico del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría.
4. Se admite la necesidad de cambiar los procedimientos de evaluación, ya que, mediante este enfoque didáctico, es necesario evaluar las habilidades geométricas asociadas a los procesos de conceptualización, axiomatización, experimentación, visualización, clasificación, demostración y resolución de problemas.
5. El uso de un software de Geometría Dinámica como el Cabri – Géomètre II y la aplicación del Modelo de Van Hiele en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Geometría exigen *el diseño, la implementación y la evaluación de propuestas didácticas sustentadas en un proceso permanente de investigación educativa.*

REFERENCIAS

- Alsina Catalá, C., Fortuny Aymedí, J.M. y Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive análisis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didactic der Mathematik*, 34 (3), June 2003, 66 – 72.
- Barroso Campos, R. y Gavilán Izquierdo, J.M. (2003). Resolución de problemas de geometría con Cabri II. *Números*, 54, Junio 2003, 23 – 30.
- Camacho, M., Socas, M. y Hernández, J. (1998). An análisis of future mathematics teacher's conceptions and attitudes toward mathematics. *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 29 (3), 317 – 324.
- Campistrous Pérez, L.A. y López Fernández, J.M. (2001). La calculadora como herramienta heurística. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas* n° 28, 84 – 99.
- Carrera de Orellana, I., y Moya Romero, A. (1992). La Enseñanza de la Matemática en la Educación Básica y Media Diversificada en Venezuela. *Boletín CENAMEC Multidisciplinario* 5, 72 - 84.
- Castelnuovo, E. (1990). *Didáctica de la Matemática Moderna*. Segunda edición. México: Editorial Trillas, p.p. 183 – 201.
- Corberán, R. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. Madrid: C.I.D.E., M.E.C.
- De Villiers, M. (1999 a). The future of secondary school geometry. *La lettre de la Preuve. Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 99 1112. Disponible en: <http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/991112.html>. Traducción al español por Víctor Larios Osorio y publicada en *XIXIM: Revista Electrónica de Didáctica de las*

Matemáticas, Año 1, N° 2, Enero 2001. Disponible en: <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/n02.html>.

- De Villiers, M. (1999 b). *The Role and Function of Proof with Sketchpad*. En Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad. United States of America: Key Curriculum Press.
- Fetisov, A.I. (1973). *La Demostración en Geometría*. México: Editorial Limusa – Wiley, S.A.
- Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *Zentralblatt für Didactic der Mathematik*, 34 (3), June 2003, 85 - 92.
- González López, M.J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En Gómez. P. y Rico, L (Eds.). *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro*. Universidad de Granada, 277 – 290.
- González López, M.J. y Lupiáñez Gómez, J.L. (2001). Formación inicial de profesores de matemáticas de secundarias: Actividades basadas en la utilización de software de geometría dinámica. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas* n° 28, 110 – 125.
- Gravina, M.A. (1996). Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria. En VII SBIE – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte (MG), 1-13. Disponible en: http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/arti4.htm
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.
- Gutiérrez, A. (2000). Aportaciones de la Investigación psicológica al aprendizaje de las matemáticas en secundaria. En *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, N° 24, Año VII, Abril 2000, p.p. 23 – 33.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is More than Proof. En *Mathematics Teacher*, Enero 1981, p.p. 11 – 18. Traducción: Ricardo Barroso Campos.
- Huertos Rodríguez, M. (1995). El microordenador como instrumento de enseñanza individualizada. *Epsilon*, N° 33, 251 - 260.
- Iglesias, M. (2000). *Curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.
- Iglesias, M. y Mireles, M. (2003). Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora: Una Experiencia Innovadora en la Formación Inicial de los Docentes de Matemática. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Tomo II, Volumen 16, Año 2003, p.p. 640 – 645.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares, M.V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla – España: Alfar, p.p. 295 – 384.
- Jahn. A.P. (2002). “Locus” and “Trace” in Cabri – Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *Zentralblatt für Didactic der Mathematik*, 34 (3), June 2003, 78 - 84.

- Jones, K., Lagrange, J. y Lemut, E. (2002). Introduction to WG2. Tools and Technologies in Mathematical Didactics. En Novotná, J. (Ed.). *Proceedings of European Research in Mathematics Education II*. Prague: Charles University, Faculty of Education, 125 – 127. Disponible en:
- <http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/cerme2.pdf>.
- Kadunz, G. (2002). Macros and Modules in Geometry. *Zentralblatt für Didactic der Mathematik*, 34 (3), June 2003, 73 - 77.
- Kilpatrick, J. (1995). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (Eds.). *Educación Matemática. Errores y Dificultades de los Estudiantes. Resolución de Problemas. Evaluación. Historia*. México: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.
- King, J.R. y Schattschneider, D. Preface: Making Geometry Dynamic. (1997). En King, J. R. y Schattschneider, D. *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington: Mathematical Association of America.
- Loureiro, C. (1999). Computadores no Ensino da Geometria. En Veloso, E.; Fonseca, H.; Ponte, J.P. da; Abrantes. P. (Eds.). *Ensino da Geometria no virar do milénio*. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 43 – 50.
- Luengo González, R. y otros (1997). *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.
- Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington, Delaware, E.U.A: Addison – Wesley Iberoamericana, S.A.
- Moreno, Z. (2006). Una propuesta didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en 8º grado de educación básica. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos.
- Moreno Quintana, Z. y Iglesias Inojosa, M. (2006, Octubre) Transformaciones en el Plano. Una Propuesta Didáctica. En R. Oropeza (Ed.), *Actas Científicas XI Jornada Institucional de Investigación*, p.p. 205 - 217. Maracay.
- Orellana Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? *Enseñanza de la Matemática* 11(2), 21-42.
- Ortiz, J. (2002). *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Ortiz Buitrago, J. y Iglesias Inojosa, M. (2006, Junio). Uso de la Evaluación de Programas en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 19, p.p. 709 – 714. México.
- Pérez Jiménez, A. (1993). Cabri - Géomètre, un programa para trabajar en clase. *Epsilon*, N° 26, 93 - 102.
- Ponte, J. da. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educacao e Matemática*, N° 34, 2º trimestre de 1995, 2 - 9.

- Ruiz, A. y Barrantes, H. (1998). *La Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática*. Disponible en:
<http://euclid.barry.edu/~luna/iacme/ciem.html>
- Scott, P., y Wenzelburger. E. (1989). Currículum y evaluación estándares para escuela de matemáticas. *Educación Matemática*, 1(3), Diciembre 1989, 58 - 64.
- Segovia., I. Y Rico, L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En Castro, E. (Editor). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis, S.A., 83-149
- Sträßer, R. (2002). Research on Dynamic Geometry Software (DGS) – an introduction. *Zentralblatt für Didactic der Mathematik*, 34 (3), June 2003, 65.
- Van Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. (Universidad Real de Utrecht: Utrecht, Holanda). Director: Hans Freudenthal. Disponible en:
<http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprenggeom/archivos2/VanHiele57.pdf>
- Van Hiele, P.M. (1959). El Pensamiento del niño y la geometría. *Boletín de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública*. Traducción: Ricardo Barroso Campos.
- Veloso, E. y Ponte, J.P. da. (1999). Introdução. En Veloso, E.; Fonseca, H.; Ponte, J.P. da; Abrantes. P. (Eds.). *Ensino da Geometria no virar do milénio*. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1 – 5.