

## PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES DE COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA EN EDUCACIÓN BÁSICA

Julio León, Sergio Domínguez, José Luis Frías y José Ortiz

Universidad Nacional Experimental “Rómulo Gallegos”, San Juan de Los Morros, Estado Guárico y Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Maracay.

[jucele59@yahoo.es](mailto:jucele59@yahoo.es) [jolufrias@yahoo.es](mailto:jolufrias@yahoo.es) [ortizjo@cantv.net](mailto:ortizjo@cantv.net)

Pensamiento Numérico. Básico (4 – 15 años). Empírico / Experimental

### RESUMEN

Se analizaron los errores y dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa en el aula, a nivel del sexto grado de la Educación Básica de la Unidad Educativa “José Félix Ribas” (público) y del colegio “San Juan Bautista” (privado) de San Juan de los Morros, Estado Guárico. El abordaje se hizo a partir de la resolución de problemas matemáticos, los errores y el análisis de los problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa. Se utilizó un diseño cuasi-experimental y se realizó un trabajo de campo que permitió determinar si los procesos utilizados por los estudiantes son correctos e incorrectos, además contribuyó a contrastar como influye la expresión de comparación empleada en el enunciado del problema y la cantidad desconocida. La muestra estuvo conformada por sesenta (60) alumnos de cada unidad educativa, elegidos intencionalmente; a quienes se les aplicó dos cuestionarios a fin de analizar los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas aritméticos de comparación multiplicativa. El análisis y la interpretación de los datos se realizaron a través de la estadística descriptiva e inferencial para el análisis de la diferencia de medias y la relación entre las variables en estudio. Los resultados mostraron que la variable cantidad desconocida influye en la dificultad de la comprensión de los problemas aritméticos verbales. Además hay asociaciones significativas entre los errores que cometen los alumnos y las variables de tarea utilizadas para definir los problemas.

**Palabras clave:** Resolución de Problemas, Problemas Aritméticos Verbales, Educación Básica

### INTRODUCCIÓN

En esta investigación se trata la resolución de problemas dentro del campo específico de conocimiento de la cognición matemática (Schoenfeld, 1992; Puig y Cerdán, 1989) y, en el denominado pensamiento numérico (Ortiz, 2004; Rico, 1995). Este es un trabajo contextualizado en el ámbito escolar (NCTM, 2000; Gary, Strutchens y Elliot, 2007), el cual pretende analizar la resolución de problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa en sexto grado de educación básica.

En este orden de ideas, Vegas (1992) menciona algunas dificultades que tienen los alumnos al resolver problemas, entre los cuales están: Bajo dominio de procedimiento para resolver problemas; Bajo nivel de conocimiento de las operaciones realizadas; Dificultad para hallar los datos implícitos en el texto, e, Insuficientes conocimientos teóricos.

Entendemos que un problema aritmético verbal es un problema de contenido aritmético, que se enuncia en un contexto de información verbal, y se clasifican en simples y compuestos (Castro, 1995b). Los simples contienen solo dos datos numéricos con los que el alumno tiene que operar para obtener el resultado, y para resolverlo, se necesita una sola clase de operaciones aritméticas. En los problemas aritméticos verbales compuestos, intervienen más de dos datos, y

es necesario emplear al menos dos operaciones aritméticas distintas o una misma operación varias veces, para poder resolverlos. En este sentido, Brekke (1991) analiza las respuestas correctas e incorrectas que dan alumnos a dos tests escritos de problemas de estructura multiplicativa y concluye que los alumnos no comprenden muchas veces el significado real de la palabra “veces”. Aunque para muchos niños la palabra “veces” es sinónimo de multiplicación.

### **EL PROBLEMA**

Según Castro (1995a), la aritmética escolar pretende desarrollar el conocimiento de las relaciones cuantitativas y la habilidad para resolver problemas, relativos a los números, que se presentan en las transacciones ordinarias de la vida. Esta afirmación sugiere que, mientras más conocimiento tenga el alumno acerca de los procesos utilizados para resolver problemas de expresión verbal, donde la información viene dada mediante un texto y de los objetos que trata la aritmética, más interesante podría resultar el estudio de esta materia ya que facilita el acercamiento de las matemáticas con el contexto o la realidad de los alumnos (Mora, 2002). El mismo Castro (1995a) realizó una investigación donde los alumnos resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa y encontró que problemas con la misma estructura y que difieren sólo en la forma de expresar la comparación difieren en dificultad.

El principal motivo que originó la realización de esta investigación, se relaciona con el hecho de explorar las dificultades que presentan los alumnos de sexto grado de Educación Básica cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa en el aula. Se pretende estudiar la manera como los alumnos resuelven problemas aritméticos de comparación multiplicativa. En tal sentido se plantean las siguientes interrogantes: ¿Influye la cantidad desconocida en el esquema de comparación y expresión lingüística utilizada en la resolución de problemas aritméticos verbales? ¿Qué errores cometen los estudiantes cuando resuelven problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa? ¿Cómo se asocian las variables cantidad desconocida en el esquema de comparación y expresión lingüística con los tipos de errores que cometen los estudiantes? Para dar respuesta a estas cuestiones, se propone el objetivo de analizar la resolución de problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa a nivel del sexto grado. Dicho análisis se estructura a partir de: 1) Examinar si distintos tipos de problemas aritméticos verbales tienen igual índice de dificultad para los alumnos, 2) Describir los errores que cometen los alumnos cuando resuelven problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa y, 3) Determinar la asociación entre los tipos de errores que cometen los alumnos y las variables de tareas utilizadas para definir los problemas.

### **METODOLOGÍA**

Esta investigación persigue analizar la resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa a nivel del sexto grado, utilizando un diseño cuasi-experimental, debido a que se realiza un conjunto de consideraciones acerca de las variables independientes o factores que se han manipulados experimentalmente y del control de la muestra, así como de los instrumentos de medida utilizados, entre otros. Asimismo, este estudio se apoya en un trabajo de campo y en la indagación documental.

Para el análisis de los problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa se consideran los aspectos siguientes: Tipos de Proposiciones que se utilizan en el enunciado de estos problemas; es decir, Proposición asignativa: asignar un valor numérico a una variable, por ejemplo: Juan tiene 12 peras; Proposición Relacional: establece una relación cuantitativa entre dos variables, por ejemplo: Ana tiene 6 veces más que Juan y Proposición Interrogativa: es cuando en el problema se pregunta sobre el valor numérico de una cantidad. Finalmente, para

establecer la relación de comparación multiplicativa se utilizan tres tipos de términos comparativos: comparación de superioridad que se forma incluyendo la expresión “veces más que”, comparación de igualdad que se forma con “veces tantas como” y la comparación de inferioridad que se forma con “veces menos que”.

La población para esta investigación, estuvo conformada por doscientos alumnos del sexto grado de la Unidad Educativa Nacional “José Félix Ribas”, y por ciento sesenta estudiantes del mismo nivel, pertenecientes a la Unidad Educativa Colegio “San Juan Bautista”; ubicadas ambas instituciones en la ciudad de San Juan de los Morros, Estado Guárico, Venezuela. La muestra estuvo integrada por sesenta alumnos de la Unidad Educativa Nacional “José Félix Ribas” (público) y sesenta estudiantes de la Unidad Educativa Colegio “San Juan Bautista” (privado); seleccionada intencionalmente debido a conocimientos previos acerca de las características de estos grupos.

Para recabar la información de la investigación, se utilizó como técnica: una revisión bibliográfica que sirvió de referencia para conformar el aspecto teórico que sustenta la investigación; además se usa la técnica de la encuesta a través de dos cuestionarios, aplicados a la muestra antes mencionada. Estos instrumentos son de respuesta libre, donde se proponen diez problemas por cada uno. La validez de los cuestionarios se determinó mediante el juicio de cuatro expertos y la entrevista a cuatro alumnos.

Se aplicaron dos pruebas piloto a los alumnos para determinar el índice de confiabilidad del cuestionario. Al utilizar el Alfa de Cronbach, los coeficientes resultantes son 0,87 y 0,85 (mayores que 0,8) lo cual indica que los instrumentos son confiables.

Una vez que se aplicaron los instrumentos, los datos obtenidos se analizaron utilizando la estadística descriptiva, a través de media, varianza, desviación típica, representación en cuadros y diagramas poligonales y circulares. Posteriormente se hizo uso de la estadística inferencial sobre el rendimiento de los sujetos cuando resolvían problemas aritméticos de comparación multiplicativa, mediante un análisis factorial de la varianza con cuatro factores, donde dos son factores con efectos fijos: instituto y cuestionario. También se incluye la interpretación cualitativa de los diferentes errores que comenten los alumnos, del sexto grado de Educación Básica, cuando resuelven problemas aritméticos de comparación multiplicativa, y las diferentes asociaciones que existen entre estos.

El modelo cuasi-experimental utilizado para la recogida y análisis de los datos es un diseño factorial con cuatro factores. De estos cuatro factores, dos son variables independientes de tarea: la variable semántica (R) relación de comparación y la variable cantidad desconocida (Q); los otros dos son factores con efectos fijos: el Colegio y Cuestionario, donde las variables de comparación multiplicativa toman los siguientes valores:

R1 = n veces más que . R2 = n veces menos que.

Q1 = Comparado desconocido.

Q2 = Escalar desconocido.

Q3 = Referente desconocido.

Para establecer si existen relaciones entre las variables se usó el modelo loglineal, el cual incorpora los logaritmos neperianos de las frecuencias de la tabla de contingencia. Este modelo es recomendado por Latiesa (1991) y a su vez ha sido utilizado por Ortiz, Rico y Castro (2003) para análisis de interrelaciones entre variables en Educación Matemática. Este modelo loglineal

incluye los efectos principales, las interacciones dobles y la interacción triple, y es a partir del análisis loglineal que se verifican los aportes que los efectos puedan agregar al modelo, y ejerzan influencia que pueda explicar la frecuencia observada de la tabla de contingencia.

## RESULTADOS

Para cumplir con los objetivos antes planteados se realizaron tres análisis factoriales de la varianza de dos factores con efectos fijos: que son institutos y cuestionarios.

1. El primero es para analizar el rendimiento de los alumnos en la resolución de los problemas verbales simples.
2. En el segundo se analiza, el rendimiento de los alumnos en problemas verbales simples de comparación multiplicativa.
3. En el tercer análisis, el rendimiento de los alumnos en problemas verbales proporción simple.

Con cada uno de estos casos se verifica las siguientes hipótesis nulas:

- (1) No hay diferencias significativas debido al factor Instituto.
- (2) No hay diferencias significativas debido al factor Cuestionario
- (3) No hay diferencia significativa de interacción doble entre los factores Instituto y Cuestionario.

Puesto que hay tres categorías de problemas implicados, es posible conocer el rendimiento que tienen los estudiantes en los problemas como se presenta a continuación en el siguiente cuadro.

### Cuadro 1

#### Rendimiento de los Alumnos en Porcentaje de Respuestas Correctas por Institutos y Cuestionario.

Totales					
Media	Instituto		Cuestionario		Total
	Privado	Público	01	02	****
PRXQ	69,75	66,25	68,67	67,33	68,00
PRQ	56,67	58,75	60,00	55,42	57,71
PXQ	89,38	77,5	81,67	85,21	83,44

Nota: PRXQ = problemas de estructura multiplicativa; PRQ = problemas de comparación; PXQ = problemas de proporcionalidad.

En el cuadro se puede apreciar que el rendimiento medio en porcentaje obtenidos por los alumnos en los problemas de proporcionalidad simple (PXQ), ha sido del 83,44 %, el obtenido en la totalidad de los problemas (PRXQ), ha sido del 68 % y en los problemas de comparación (PRQ), fue el 57,71 %. Considerando los tres análisis antes mencionados, se podría afirmar que los alumnos tienen conocimientos generales sobre estructura multiplicativa.

Por lo tanto, se determinó un rendimiento más elevado en los problemas de proporcionalidad simple con relación a los problemas de comparación multiplicativa

Es decir, que la mayoría de los alumnos de la muestra tienen una formación básica en estructura multiplicativa que les permitió resolver con éxito los problemas de proporcionalidad simple; no obstante, muchos de los estudiantes presentaron una serie de dificultades cuando intentaron resolver problemas de comparación multiplicativa.

A continuación se presenta el análisis de los datos para detectar si hay efectos significativos de los factores cuestionario e instituto sobre el rendimiento de los alumnos.

## Cuadro 2

### Hipótesis Nulas para cada una de las Variables.

Variables	Hipótesis Nula (1)	Hipótesis Nula (2)	Hipótesis Nula (3)
PRXQ	Acepta	Acepta	Acepta
	$P > 0,05$	$P > 0,05$	$P > 0,05$
PXQ	Rechaza	Acepta	Acepta
	$P < 0,05$	$P > 0,05$	$P > 0,05$
PRQ	Acepta	Acepta	Acepta
	$P > 0,05$	$P > 0,05$	$P > 0,05$

1. En el cuadro 3 se observan los resultados del análisis de la varianza obtenida para la totalidad de los problemas. Donde se muestran que los factores tanto Instituto como Cuestionario, así como la interacción doble, no tienen efectos significativos al nivel de significación del 5 %. Lo que implica la aceptación de las hipótesis nula 1, 2 y 3 referida a los problemas de estructura multiplicativa, es de destacar que los cuestionarios no afectan al rendimiento de los alumnos en cada instituto.

2. En cuanto a los problemas de proporcionalidad simple Los resultados obtenidos en el análisis de la varianza revelan rechazar para la variable, la hipótesis nula (1) y aceptar la hipótesis nula (2) y (3), es decir no tienen efecto significativo al nivel de significación del 5% donde se acepta que no hay diferencia significativa entre los dos Cuestionarios utilizados en la recogida de datos.

3. Por otra parte Los resultados del análisis de la varianza obtenida para los problemas de comparación multiplicativa, según los factores Instituto y Cuestionario, así como ambos factores o interacción doble no tienen efecto significativo al nivel de significación del 5 %. Lo que implica la aceptación de las hipótesis nula 1,2 y 3 referida a los problemas de comparación multiplicativa. Por lo tanto se acepta que el rendimiento de los estudiantes no ha sido distinto según el Instituto y el Cuestionario.

### *Análisis del Índice de Dificultad de los Problemas de Comparación Multiplicativa:*

Para realizar el análisis se hizo un estudio del efecto del factor R, del efecto del Factor Q y por último el análisis de la interacción RxQ.

Para determinar el efecto de los factores ante mencionado se aplicó el modelo lineal de medidas repetidas con los dos factores de efectos fijos: Instituto y Cuestionario.

En el análisis de la varianza se trata de contrastar la hipótesis nula:

4. No hay efecto significativo del factor R sobre el índice de dificultad de los problemas.
5. No hay efecto significativo del factor Q sobre el índice de dificultad de los problemas

6. No hay interacción entre las variables R y Q.

### Cuadro 3

#### Hipótesis Nulas para las Variables R; Q y R-Q

Hipótesis Nula (4)	Hipótesis Nula (5)	Hipótesis Nula (6)
P = 0,000 P < 0,05 Rechaza	P = 0,008 P < 0,05 Rechaza	P = 0,000 P < 0,05 Rechaza
Nivel de significación al 5% de mayor a menor	R2 > R1 Q2 > Q3 > Q1	R1 : Q2 > Q3 > Q1 R2 : Q2 > Q3 > Q1

En el cuadro se muestra el resultado del análisis de la varianza en el factor R, donde este factor obtuvo un grado de significación  $P = 0,000$ . Rechazando entonces la hipótesis nula (4) y se acepta que los problemas verbales de comparación multiplicativa los índices de dificultad son diferentes si se cambia la expresión de comparación utilizada en su redacción. Permitiendo establecer que las medias de los valores de R1 y R2 difieren significativamente entre sí.

Para el caso el análisis de la varianza en el factor Q (cantidad desconocida). El resultado logrado para este factor fue de un grado de significación  $P = 0,008$ . Rechazando entonces la hipótesis nula (5) y se acepta que existe efecto significativo del factor Q sobre el índice de dificultad de los problemas.

Igualmente los valores obtenidos al nivel de significación del 5 %, permitieron establecer que los valores de los tres niveles difieren significativamente entre sí, donde Q1 tiene menor nivel de dificultad que Q3 y éste a su vez menor nivel que Q2.

Para el caso el análisis de la varianza de la interacción entre los factores R y Q. donde (lo que concierne evaluar es si el orden de dificultad general de Q se conserva para cada uno de los niveles de R.), Observando los resultados se rechaza la hipótesis nula (6) de no interacción de las variables R y Q, por lo tanto la presencia de interacción de las variables, pone de manifiesto la ordenación  $Q1 > Q3 > Q2$ . Por lo tanto, el índice de dificultad de un problema verbal de comparación multiplicativa no es el mismo según sea la cantidad desconocida en el esquema de comparación.

#### *Análisis de la Distribución de Errores.*

### Cuadro 4

#### Respuestas Correctas e Incorrectas (porcentaje)

Categoría	Correctas	Incorrectas	No Responde
PRQ	57,71	40,21	2,08

En este punto se hizo una clasificación de las respuestas correctas e incorrectas a los problemas de comparación multiplicativa, observándose que de las 1440 respuestas dadas por los alumnos en los problemas verbales de comparación multiplicativa el 57,71 % fueron respuestas correctas, el 40,21 % Incorrectas además el 2,08% en blanco, debido al alto porcentaje de respuestas Incorrectas. se hizo una clasificación de las respuestas incorrectas y definió los tipos

de errores que cometen los alumnos, para esto se consideró las clasificaciones de errores en investigaciones previas,

Criterio 1. Si el alumno interpreta el problema como de estructura multiplicativa o aditiva.

Criterio 2. Si el alumno invierte o no el sentido de la comparación.

Criterio 3. Si el alumno mezcla las dos estructuras.

Criterio 4. Si el alumno se bloquea y deja el problema en blanco.

Siguiendo los criterios establecidos se definió los diferentes tipos de errores.

Error1 = Sin respuesta: El alumno deja el problema sin responder, es decir en blanco.

Error2 = Cambio de estructura: el alumno en vez de multiplicar, propone como solución una suma.

Error3 = Inversión multiplicativa: El alumno en vez de multiplicar, propone como solución una división.

Error4 = Doble estructura: Utiliza dos operaciones una de ellas es una multiplicación o división y la otra una suma o una resta.

Error5 = Estructura aditiva sucesiva. Alumno utiliza la estructura aditiva para en forma consecutiva.

Error6= Otros errores. (Incoherencia) Errores que no coinciden con los anteriores.

Otros errores, significa que el alumno propone como solución, el valor 6.

### CONCLUSIONES

1. Con respecto al tipo de expresión utilizada para redactar la comparación, se ha obtenido que afecta significativamente al rendimiento de los estudiantes en esta clase de problemas y por tanto a su índice de dificultad.

2. Se han obtenido diferencias significativas entre las medias de los índices del factor cantidad desconocida (Q). Las diferencias entre estos índice permitió establecer un orden total de dificultad entre ellos, el cual es  $Q1 > Q3 > Q2$ . Estas desigualdades no se alteran significativamente por el factor instituto y por el factor cuestionario.

3. Se ha encontrado diferencias significativas en la frecuencia con la que se presenta cada tipo de error. El error más frecuente es el “cambio de estructura”, seguido por el error “inversión multiplicativa”

4. Los problemas que difieren en el tipo de cantidad desconocida promueven la producción de errores de manera desigual. Los problemas tipo Q1, son los que menos contribuyen a la aparición de errores y los problemas tipos Q2 y Q3, se caracterizan porque causan frecuencias altas de errores.

5. No existe asociación significativa entre la expresión lingüística (R) utilizada y el tipo de cantidad desconocida (Q) en el esquema de comparación en relación a la frecuencia de errores, destacándose la expresión “veces menos que” en problemas de escalar desconocido (R2Q2). Donde esta asociación influye en la producción de errores. De ahí que el error2 “cambio de estructura” esta promovido por ambas variables, R y Q.

6. No hay asociación significativa entre las variables R y Error, destacándose que estas ultimas variables en el test estadístico de la asociación parcial indicó no significativa (probabilidad = 0,5832), en consecuencia en el modelo ajustado fueron consideradas.

### REFERENCIAS

Brekke, G. (1991). *Multiplicative structures at ages seven to eleven*. (Tesis Doctoral). Nottingham, Reino Unido: Universidad de Nottingham.

- Castro, E. (1995a). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada, España: Comares.
- Castro, E. (1995b). *¿Qué es un problema de estructura aritmética de comparación multiplicativa*, Granada, (Documento en línea) disponible en:  
[www.uv.es/~didmat/angel/archivos/doctorado/06CastroE.PDF](http://www.uv.es/~didmat/angel/archivos/doctorado/06CastroE.PDF).  
(Consulta: 2003, Julio 06).
- Gary, W., Strutchens, M. y Elliot, P. (2007). *The Learning of Mathematics* (Sixty-ninth Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Latiesa, M. (1991). Introducción a los Modelos Logarítmicos Lineales. *Papers*, 37, 97-112.
- Mora, D. (2002). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas: Universidad Central de Venezuela.
- National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (Primera Edición en Castellano). Sevilla: SAEM "Thales"
- Newell, A. y Simon, H.A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Ortiz, J. (2004). Pensamiento Numérico y Algebraico. *Paradigma*, 25 (1), 225–239
- Ortiz, J., Rico, L. & Castro, E. (2003). Actitudes hacia la incorporación de la calculadora gráfica y la modelización en la enseñanza de las matemáticas. *Paradigma*, 24 (2), 29-56
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (eds.), *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica
- Puig, L. y Cerdán, F. (1989). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan
- Vegas, C. (1992). La enseñanza de la matemática en la escuela básica a través de la resolución de problemas. *Enseñanza de la Matemática*. 1(3), 15-23.