ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Angélica María Martínez y Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay - Venezuela
angelicmar5@yahoo.es; mariojose@hotmail.com

Formación de profesores. Superior. Interpretativo

RESUMEN

En este trabajo, se presentan los resultados obtenidos del análisis histórico-epistemológico sobre la ecuación de segundo grado que surgen del proyecto macro titulado "Significados Personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemática" (Martínez, 2007), el cual plantea la necesidad de analizar lo que piensan los futuros docentes de matemática en cuanto a esta ecuación y determinar el grado de conocimiento que tienen sobre su resolución y sus aplicaciones, dada la importancia que tiene la enseñanza y aprendizaje de este tema a partir de la educación básica. El trabajo además, se fundamenta teóricamente bajo el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2006) donde se destaca la importancia de analizar tres facetas: la epistemológica, la cognitiva e instruccional. Por todo lo anterior, se amplían y muestran los resultados obtenidos de la primera faceta. La metodología considerada en este trabajo es la cualitativa-interpretativa, llevada a cabo mediante un estudio documental que permitió analizar la evolución histórica y desarrollo de nuestro objeto en estudio, por esto se tuvo en cuenta distintos períodos de la humanidad como la revisión y lectura de diversas fuentes, entre ellas tesis doctorales, libros de filosofía de la matemática, artículos de revistas de Educación Matemática relacionadas con el tema, para ahondar y precisar sobre su origen, desarrollo, evolución y papel en la matemática. Tal como dicen Godino y Batanero (1994), el análisis epistemológico de los objetos matemáticos debe permitir clarificar la naturaleza de dichos objetos y sus diversos significados según los contextos institucionales. Además, este tipo de análisis es esencial para la Educación Matemática, pues difícilmente se pueden estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos e indefinidos (Arrieche, 2002).

Palabras clave: histórico-epistemológico, ecuación de segundo grado, ontosemiótico.

Introducción

Al indagar sobre la ecuación de segundo grado, se ha buscado caracterizar el significado que la institución matemática le atribuye a este objeto. Una forma de lograrlo es realizando un estudio histórico-epistemológico del desarrollo que nuestro objeto en cuestión ha tenido a lo largo del tiempo, pero a su vez se requiere averiguar sobre el uso de los conceptos, proposiciones, teorías matemáticas, además, de las situaciones problemáticas esenciales que le han dado sustento (Rodino y Font, 2007). Todo lo anterior, tiene el propósito esencial de conducirnos a construir un significado de la ecuación de segundo grado que sirva de referencia para poder estudiar la inserción de este objeto matemático en la enseñanza escolar, y en lo particular, sirva de apoyo didáctico a los docentes, pues este es uno de los puntos de interés a tratar en el trabajo macro titulado: 'Significados Personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemática" (Martínez, 2007), en el cual esta inmerso el presente informe.

Es así como este trabajo, trata del análisis histórico-epistemológico de la ecuación de segundo grado, con la finalidad de profundizar en su origen, desarrollo y consolidación, y con ello vislumbrar alternativas metodológicas apropiadas para la enseñanza de este tópico matemático. Esto nos lleva a realizar un estudio documental, consultando diversas fuentes relacionadas con el tema como por ejemplo: Tesis de Maestría y de Doctorado, revistas especializadas en Didáctica de las Matemáticas, trabajos de investigadores publicados en internet, textos de historia y filosofía de las matemáticas, por citar algunos. Como dicen Godino y Batanero (1994), este análisis es útil para clasificar la naturaleza del objeto matemático en estudio y tener en cuenta la diversidad de contextos institucionales de uso donde se pone en juego dicho objeto. Además, siguiendo el modelo teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2006), se hará uso de las nociones como: Tipos de Significados sistémicos (Godino y Font, 2007) y Configuraciones epistémicas (Godino, Contreras y Font, 2006)

Por todo lo anterior, se muestran a continuación los resultados obtenidos de la primera faceta: “la epistemológica”, y dado que la presentación debe ser breve, ampliamos sólo aspectos como: Desarrollo Histórico-Epistemológico de la ecuación de segundo grado, Análisis de las configuraciones epistémicas de la ecuación de segundo grado a través de la historia y Referencias Bibliográficas.

Desarrollo Histórico-Epistemológico

Gracias a las traducciones que en el siglo XX realizaron los científicos Thureau-Dangin, en Francia, y Neugebauer, en Alemania y Estados Unidos, a las tablillas de arcilla de origen babilónico que datan aproximadamente del s. XVIII a.C., descubiertas en la zona de Nuffar, al sureste de Bagdad, en 1889; es como se han podido establecer los primeros indicios de que el hombre trabajaba con ecuaciones de segundo grado (Masini, 1980, pag. 24).

Los babilonios desarrollaron técnicas para encontrar las raíces positivas de cualquier ecuación de segundo grado, es más, fueron capaces de encontrar las raíces de algunas ecuaciones de tercer grado y resolver problemas más complicados utilizando la relación entre hipotenusa y catetos del triángulo rectángulo, que actualmente conocemos como el teorema de Pitágoras. Para esto usaron, como dice Boyer (1999), el sistema de numeración sexagesimal y crearon una gran cantidad de tablas para realizar cálculos numéricos simples como tablas de multiplicar, de dividir, tablas de cuadrados, de raíces, etc. También, calcularon la suma de progresiones aritméticas, de algunas geométricas y de sucesiones de cuadrados. En gran parte, la motivación para realizar estos cálculos, donde se veía implicada la ecuación de segundo grado, obedecía a necesidades de tipo comercial, repartición de tierras, de dinero, etc. Luque y cols. (2003), señalan que los babilonios empleaban como método de solución la completación de cuadrados y para esto se valían de factorizaciones simples que ya conocían. Desde el punto de vista moderno, ellos pudieron por este método, llegar a la solución de ecuaciones de tipo $x^2 - bx = c$, siendo

$$x= \sqrt{(b/2)^2 + c} + b/2$$

Boyer (1999), habla del método usado por los babilonios para solucionar las ecuaciones de segundo grado, dando como ejemplo un problema que ellos plantearon así: halla el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 14;30. Para lo cual, procedían explicando los pasos:

"Toma la mitad de 1, que es 0;30, y multiplica 0;30 por 0;30, que es 0;15; suma este número a 14;30, lo que da 14,30;15; éste es el cuadrado de 29;30; ahora suma 0;30 a 29;30, cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado” (pag. 56)

Todo lo anterior lo veríamos como una ecuación: $x^2 - x = 870$, donde 870 es el equivalente a 14;30 según el sistema sexagesimal del cual se basaban; mientras que el procedimiento para solucionar dicha ecuación es equivalente al planteado anteriormente por Luque y cols.

Entre tanto, si sus problemas equivalían a las ecuaciones que hoy conocemos como $ax^2 + bx = c$, multiplicaban por "a" los datos que conocían, algo así como convertir la ecuación anterior en $(ax)^2 + b(ax) = c$ y se hallaba "ax", para cambiarla al valor real de x. Con esto, se tiene el primer ejemplo de sustitución de la incógnita para resolver ecuaciones y es un gran hallazgo para los primitivos babilónicos, a tal punto que el uso de la sustitución de la incógnita les permitió resolver algunas ecuaciones de 4º y 8º grado, conocidas actualmente como bicuadradas.

En la Tablilla conocida como Plimpton 322 (cuya foto se encuentra al final del párrafo) aparecen ordenadas en columnas unas listas de números que parecen ajustarse a los posibles lados de triángulos rectángulos y los cuales se conocen como ternas pitagóricas; éstas pueden ser vistas como ecuaciones de segundo grado y las explicaremos más adelante, lo curioso es saber a través de esta tablilla que los babilonios conocían otros mecanismos para solucionar ecuaciones de segundo grado y su trabajo matemático se adelantó al de muchas otras civilizaciones.

Tablilla de Plimpton 322 (1900 a 1600aC)

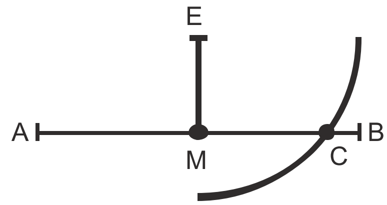
En general, los babilonios asumían sólo la respuesta positiva para ecuaciones de segundo grado, pero además encontramos que la forma de transmitir su solución era a través de un lenguaje natural, tal como Masini (1980) llama forma "retórica" y la cual permanecerá hasta antes de Diofanto; es más, se sabe que utilizaron algunos términos para nombrar aspectos matemáticos como: "us" para indicar el largo, "sag" para el ancho y "asa" para referirse al área de una figura geométrica.

Pasando a Grecia (600 a.C. – 600 d.C.), donde se abordaron problemas que conllevaron la solución de una ecuación cuadrática, se ha descubierto que utilizaron procedimientos geométricos; tal como señala Ochoviet (2007), ha esta civilización se le hizo más fácil el trabajo geométrico que el uso de la numeración griega y la aplicación de números racionales. Por esto, las magnitudes eran representadas por segmentos y el producto de dos magnitudes a y b era representado por el rectángulo de lados a y b. Así que, para hallar la solución de una ecuación como $x^2 = 2$, sabían que esta no admitía una solución racional, pero si tenía una solución trivial desde el punto de vista geométrico, tomando x como la diagonal del cuadrado cuyo lado mide uno. Sin embargo, para casos diferentes como por ejemplo, para una ecuación vista hoy en día como $x^2 - 10x + 9 = 0$, procederían de este modo:

"Trace el segmento AB =10. Por M, punto medio de AB, levante el segmento perpendicular PE = 3 (igual a la raíz cuadrada de nueve) y, con centro en E y radio MB, trace un arco de circunferencia que corta a AB en el punto C. La raíz deseada está dada por la medida AC". (Ochoviet, 2007, p. 4)

Es decir, tendríamos la figura 1

fig. 1



Por la construcción vemos que se forma un triángulo rectángulo en CME, lo que permite deducir la medida del segmento *AQ,* equivalente a:

$$10/2 + \sqrt{(10/2)^2 - (\sqrt{9})^2}$$

que corresponde a una de las raíces de la ecuación dada y cuyo valor es igual a 9.

Sin embargo, para esta época el trabajo con ecuaciones de segundo grado se vio enriquecido gracias a dos destacados personajes, uno ellos fue Diofanto, quien en su libro "Las Aritméticas" presenta muchas soluciones sorprendentes para ecuaciones indeterminadas de difícil deducción, mostrando a su vez solución a las ecuaciones llamadas pitagóricas y que actualmente veríamos de la forma: $x^2 + y^2 = z^2$. Franco (1964) comenta que para resolverlas, Diofanto trabajó con ternas de números primos entre si, o ternas coprimas; es decir, usaba grupos de tres números que, tomados de a dos no admiten otro divisor común que la unidad; pero los cuales debían cumplir con las siguientes relaciones:

$$x = 2AB, \quad y = B^2 - A^2, \quad z = A^2 + B^2$$

donde A y B representan números naturales, coprimos y de distinta paridad. Por ejemplo, para los siguientes valores de A y B se podría tener:

A	B	x	y	z
1	2	4	3	5
2	3	12	5	13
3	4	24	7	25

Como hay infinitas ternas que satisfacen los requisitos indicados, entonces Diofanto, concluyó que existen también infinitas soluciones para dichas ecuaciones y por otro lado, pudo establecer que si una terna (x, y, z) resuelve la ecuación, también la resuelve la terna (Kx, Ky, Kz), en la que K es cualquier número natural, obviamente diferente de cero.

En este período Masini (1980), dice que la forma de lenguaje usada para trabajar ecuaciones era de tipo "Sincopado", es decir, se dieron algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, mientras que los cálculos se hacían con un lenguaje natural. De hecho una notación para representar la incógnita fue el símbolo "ꝺ" y también se introdujo como símbolo para la resta una flecha vertical hacia arriba. Esta forma de expresión duraría hasta el s. XVI.

El otro personaje, fue Euclides, quien a través de situaciones geométricas, motivó el uso de la ecuación de segundo grado. Tal como señala Luque y cols. (2004), en el libro II de Los Elementos de Euclides (300 a.C.), hay 14 proposiciones para resolver problemas algebraicos con procedimientos en los cuales se involucra la aplicación de áreas, siendo interpretado el trabajo para ecuaciones de segundo grado de la forma $ax - x^2 = b^2$ en la proposición 5, la cual dice:

"Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, mas el cuadrado de la diferencia entre una de las dos partes iguales y una parte desigual, es equivalente al cuadro de la mitad de la recta dada". (pag. 301)

En la fig. 2 se muestra la construcción geométrica de la proposición.

fig. 2

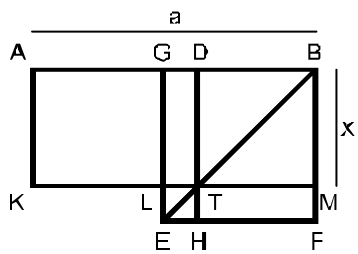
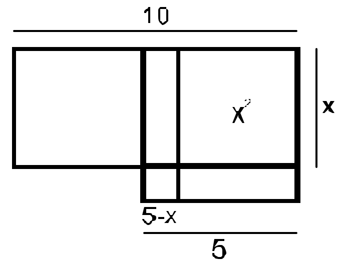


fig. 3



Mientras que la fig. 3 es el ejemplo particular de la proposición 5, que representa gráficamente la ecuación de la forma: $10x - x^2 = 21$(a), la cual podemos solucionar por los procedimientos de dicha proposición, construyendo primero un rectángulo de 10 unidades de largo y con ancho desconocido; luego al dividirlo por la mitad y extraer un cuadrado con lado x, se forman las siguientes relaciones: $(10x - x^2) + (5 - x)^2 = 25$, luego por conocer el valor de (a) reemplazamos teniendo $21 + (5 - x)^2 = 25$, lo cual equivale a $(5 - x)^2 = 25 - 21$, es decir, $(5 - x)^2 = 4$, sacando la raíz cuadrada a ambos lados se ve que $5 - x = 2$, y así $x =3$. Aunque este fue un caso particular, visto desde la notación actual, se puede deducir que en la época de Euclides la metodología era muy similar y ayudaba a establecer soluciones para casos de áreas.

Por otra parte, Luque y cols. (2003), hacen la observación de que Euclides, también fue el primer matemático en plantear y recopilar los conceptos básicos de factorización de números, en los libros VII, VIII y IX de su obra Elementos, de los cuales se desprende en el siglo XVIII, con la demostración del "Teorema Fundamental del Algebra", dada por Gauss en 1797, la solución de ecuaciones algebraicas a través de la factorización de polinomios, siendo en muchos casos el método que hoy en día realizamos para dar solución a ecuaciones cuadráticas.

Siguiendo, con el recorrido histórico; en el año 1.020, de acuerdo a Franco (1964) el matemático Sriahara, inventó el "método hindú" para resolver la ecuación de la forma $ax^2 + bx = c$, este método consistía en multiplicar los dos miembros de la ecuación por 4 veces el coeficiente de x al cuadrado, luego se agrega el cuadrado del coeficiente de x a ambos miembros y finalmente se extraía la raíz cuadrada.

Otro árabe, Al-Tusi (s. XII d.C.) usó ecuaciones de grado menor o igual a tres, y hasta introdujo nociones de análisis local para hallar el máximo de una función a través de la solución de una ecuación (Malisani, 1999, pag. 11). En general, los árabes logran aportar mucho al álgebra por la correspondencia que establecen entre ésta y la geometría para la solución de ecuaciones, Llegaron a transformar las igualdades por los principios fundamentales de "al-jabr" y "wa'l-muqabala" que significan reducción y cancelación, dados por Al-Khwarismi (750-850 d.C) y quien según Cadenas (2004) pudo solucionar ecuaciones de segundo grado usando la completación de cuadrados, para casos como: cuadrados iguales a raíces; cuadrados iguales a números; raíces iguales a números; cuadrados y raíces iguales a números (según nuestra simbología de la forma $x^2 + bx = c$); cuadrados y números iguales a raíces (es decir, $x^2 + c = bx$) ; raíces y números iguales a cuadrados (en otras palabras de la forma $bx + c = x^2$).

Un ejemplo, es el caso de solucionar la ecuación $x^2 + 6x = 7$, para lo cual se realiza el siguiente procedimiento:

1.- Se comienza por construir el cuadrado de lado x, ABCD, cuya área es x^2.

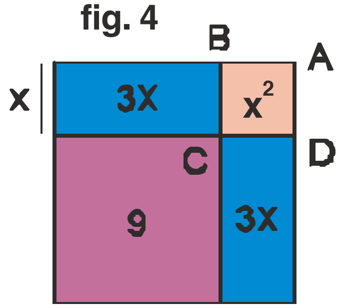
2.- Luego se prolongan los lados AB y AD en 3 unidades respectivamente (de este modo se obtienen dos rectángulos de área 6x, lo cual constituye el segundo término de la ecuación).

3.- Se completa el cuadrado construyendo un nuevo cuadrado de superficie 9 u^2.

4.- Puede verse que el área total del cuadrado es $x^2 + 6x + 9$ (*)

5.- Por esto, para resolver la ecuación $x^2 + 6x = 7$, se suma 9 a ambos miembros de la ecuación (*), teniendo: $x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 = 16$, es decir $(x + 3)^2 = 4^2$, de lo cual $x + 3 = 4$, y por lo tanto $x = 1$. Esto, puede ser visto a través de la construcción de la figura 4:

fig. 4



$x^2 + 6x = 7$

Mientras que para las otras ecuaciones, de la forma genérica $x^2 + bx = c$, $bx + c = x^2$ y $x^2 + c = bx$, Al-Khwarismi recurría a la completación de cuadrados siguiendo la construcción de formas geométricas que mostramos en las figuras 5, 6 y 7, respectivamente.

fig. 5

$x^2 + bx = c$

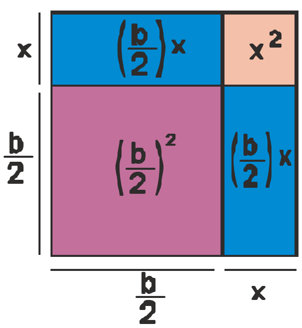


fig. 6

$bx + c = x^2$

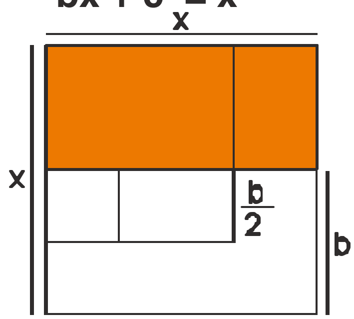
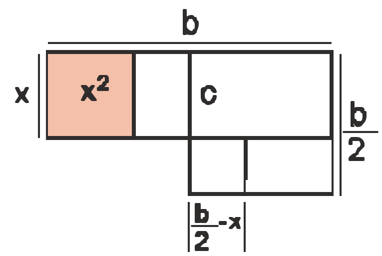


fig. 7

$x^2 + c = bx$



De los griegos y árabes, pasamos a otra etapa en el siglo XVI, tal como dice Sestier (1997), a través de Viète (1540-1603), se produce un cambio muy importante, en cuanto a la simbolización algebraica, pues gracias a él se construye el lenguaje simbólico. En su “Introducción al Arte Analítico” da por primera vez las herramientas para representar sistemáticamente a través de letras diversas cantidades, tanto incógnitas, sus potencias como los coeficientes genéricos y hasta los signos de operaciones; empleó un lenguaje simbólico tanto en los procedimientos resolutivos como en las demostraciones de las reglas generales. Viète llamaba a su álgebra simbólica “Logística Speciosa”, transformando el álgebra en el estudio de los tipos generales de formas y ecuaciones, ya que sus métodos se vuelven aplicables del caso general a los muchos particulares que se puedan pensar. Gracias a todo lo planteado por Viète, se puede decir que surgió el simbolismo algebraico en su forma actual.

Luego, durante el siglo XVII, surge la geometría analítica y esto gracias a dos grandes matemáticos de la época como fueron René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1655).

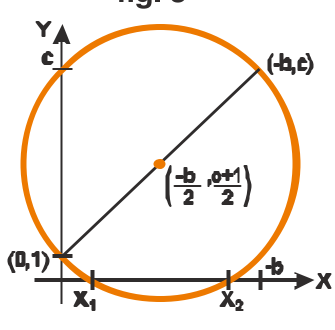
En la última parte de la famosa obra de Descartes "Discurso del Método", tal como señala Boyer (1999), denominada "La Géométrie", detalla instrucciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas, en forma similar a como lo hicieron los griegos en la antigüedad, dedicándose luego a la aplicación algebraica de ciertos problemas geométricos. Analiza también curvas de distintos órdenes, para terminar en el tercer y último libro que compone la obra, con la construcción de la teoría general de ecuaciones, por la que llega a la conclusión de que el número de raíces de una ecuación es igual al grado de la misma, aunque no pudo demostrarlo. Prácticamente su obra Géométrie, se dedicada a la interrelación entre el álgebra y la geometría con ayuda del sistema de coordenadas.

Por otra parte con Descartes, Pierre de Fermat desarrolló un sistema análogo, plasmado en su obra: "Introducción a la Teoría de los Lugares Planos y Espaciales". Fermat tomó el trabajo de reconstruir los "Lugares Planos" de Apolonio, y con la ayuda de la notación de Viète, representó en primer lugar la ecuación $Ax = B$, como una recta, y luego las expresiones $xy = k^2$; $a + x^2 = ky$; $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$; $a^2 - x^2 = ky^2$ con la hipérbola, parábola, circunferencia y elipse respectivamente. Para el caso de ecuaciones cuadráticas más generales, en las que aparecen varios términos de segundo grado, aplicó rotaciones de los ejes y así pudo reducirlas a los términos anteriores. (Sestier, 2007)

Fermat, además, estudió durante algún tiempo la Aritmética de Diofanto, traducida al latín del griego original, siendo quizá esta la razón por la cual llegó a la famosa regla conocida como el último teorema de Fermat o la conjetura de Fermat, la cual se puede expresar diciendo que la ecuación diofántica $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras positivas para cualquier n mayor que dos ($n > 2$).

Por último, encontramos en el siglo XIX, otra forma para solucionar la ecuación de segundo grado. Cadenas (2004) hace referencia a Thomas Carlyle (1795-1881), quien usó una solución geométrica para la ecuación de segundo grado, tomando como base definiciones de la geometría plana como distancia entre puntos, punto medio y ecuación de una circunferencia. Para esto se apoya en la construcción con regla y compás de una circunferencia cuyas características mostramos en la figura 8 y de la cual, por geometría analítica se desprende la ecuación (*):

fig. 8



donde $$\left(x + \frac{-b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[b^2 + (c-1)^2\right]^2 \quad (*)$$

correspondiente a la relación del centro con los valores allí mostrados, de donde se termina despejando X, y se llega a la solución que hoy conocemos como la fórmula de la resolverte para la ecuación de segundo grado.

Análisis de las Configuraciones Epistémicos

A través del anterior recorrido, donde se perciben aspectos históricos y epistemológicos, se pueden extraer conclusiones generales de cómo evolucionó la ecuación de segundo grado; pero más interesante resulta esbozar estas conclusiones partiendo del enfoque teórico en el cual se basa nuestro estudio. Según el enfoque onto-semiótico (EOS) de la cognición matemática, es de interés el análisis de la historia de las matemáticas, interpretada desde un punto de vista epistemológico, pues permite recabar información sobre los sistemas de prácticas puestas en juego para solucionar situaciones-problemas, en relación a marcos institucionales específicos; pero a su vez no sólo se interesa por tratar los problemas, sino también por las técnicas, los lenguajes, las notaciones, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, puestas en juego en cada momento y circunstancia, ya que según Godino y Font (2007) la forma como estos aspectos se relacionan originan las configuraciones epistémicas; entendidas, como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas institucionales. Gracias al estudio de estas configuraciones epistémicas y de las entidades primarias, se puede concretar el significado de un objeto o noción matemática estudiada y tomar decisiones de tipo instructivo o curricular eficaces para la selección de los sistemas de prácticas matemáticas que mejor se adapten a un proyecto educativo.

Por lo anterior, podemos hacer las siguientes observaciones relevantes, considerando las entidades primarias, que mostramos con ayuda del cuadro A.

Cuadro A. Configuraciones epistémicas (Red de Entidades Primarias vs. Períodos históricos)

Entid Primarias / Períod históricos	Lenguaje	Situa-prob.	Conceptos	Proposici.	Proced .	Argument.
Babilonia (2000 a.C.)	Retórico	Necesid construcción - comercio	largo, ancho, área	Nulas	Duplicación, extracción d raíz	Transmisión técnicas básicas
Grecia (600 aC-600 d)	Sincopad	Situaciones geométrica-necesidad	-Ecuaciones d ánticas -recta, rectan.	Proposición d Euclid	Relación con números coprimos y construcción geométrica	Ded Geométricas
Ind (S. VII d)	Retórico Sincopad	Situaciones geométrica-necesid	-números negativos -recta, rectan.	La ec. d $ax^2 + bx = c$ se multiplicar 4 veces por el coeficiente d	Introd ón abreviaturas y mét. Indú	Se transmite la técnica a caso particular
Arabia (S. VIII d)	Retórico Sincopad	Situaciones geométrica-necesid	-recta, rectan. cuad Insertar-red	Resuelvan $x^2 + bx = c$ $x^2 + c = bx$ $bx + c = x^2$ por completación d	Completación d Despeje d	Se transmite la técnica a casos generales Razonamiento ded
Ed (S. XIV dC)	Sincopad	Planteamiento d más abstractos	-plano cartesiano, polinomios, elipse, etc.	Logística especiosa, uso d $a + x^2 = ky$ como parábola	Trasnformación d a figuras planas. Aplican Regla Ruffini	Razonamiento d
Siglos XVIII-XIX	Símbolos Abstractos	Aplicaciones Mat., Física, Comercio, etc.	-números complejos, racionalización	Dada la forma $ax^2 - bx + c = 0$, con $a \neq 0$, se tiene $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac}$	Aplicación d fórmulas como la resolvente, factorización, etc.	La Geometría como forma d justificación

El anterior cuadro, no es más que la sinopsis de las configuraciones epistémicas, emergentes del recorrido histórico-epistemológico realizado, donde vislumbramos que en civilizaciones tan antiguas como la babilónica y egipcia, no se plateaban demostraciones para las técnicas empleadas en la solución de ecuaciones de segundo grado, aunque en algunos escritos hallados tanto en las tablillas de arcilla como en el Papiro de Rhind, se detalla que para esta época los procedimientos se clasificaban por casos particulares, argumentando las soluciones en forma retórica. También se sabe que se consideraban conceptos matemáticos, entre ellos: área, extracción de raíz cuadrada, operaciones básicas, y realizaron representaciones gráficas para dar explicación a la forma con la cual empleaban la técnica que allí enseñaban. Sin embargo, es claro que el concepto de ecuación cuadrática difiere a la que usamos hoy, pues no empleaban símbolos como el "=", entre otros. En los siguientes siglos, a partir de los árabes e hindúes, se va haciendo más genérica la solución de una ecuación de segundo grado, el lenguaje es de tipo retórico-sincopado, se tienen procedimientos como completación de cuadrados o el método hindú, mientras que los argumentos son tanto de tipo deductivo geométrico como de transmisión de técnicas a casos específicos. Hasta este momento las situaciones-problema generadoras del trabajo con ecuaciones de segundo grado, eran de tipo comercial o surgían por necesidades de construcción; mientras que a partir del siglo XIV su uso parte de abstracciones matemáticas, aunado los aportes de matemáticos italianos como Viète o Descartes, que encontraron técnicas más precisas, con un soporte demostrativo más riguroso y lenguaje más simbólico para resolver cualquier caso de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Es gracias, a estos últimos aportes como se llega a la fórmula general para solucionar ecuaciones cuadráticas, aunque no sea el único método, si se convierte en uno de los más prácticos.

Por otra parte, podemos señalar como aporte didáctico, que frente a una enseñanza del álgebra donde predomina la manipulación de símbolos de acuerdo a reglas preestablecidas, vemos que este recorrido nos muestra la existencia de diferentes alternativas para su enseñanza. Se puede hacer más uso del trabajo geométrico, lo cual favorece la apreciación visual que un alumno puede tener de un objeto matemático, como es nuestro caso la ecuación de segundo grado; y a su vez esto de algún modo puede facilitar la comprensión y adquisición de este concepto, dado que el alumno encuentra una nueva forma de resolver y representar estas ecuaciones.

Es más, aunque los contextos culturales y socioeconómicos, fueron diversos para cada civilización y aún para nuestro momento, se nota que hay situaciones comunes como las de tipo geométrico para formular situaciones con ecuaciones de segundo grado; es decir, que los problemas a formular en nuestras clases para generar ecuaciones de segundo grado pueden ser también de tipo geométrico.

Finalmente, tal como sucedió en la historia y basándonos en la solución de problemas, se podrían considerar ciertas etapas para superar los grados de dificultad en el aprendizaje de la ecuación de segundo grado, así se podría pasar:

1º De lo sencillo, formulando problemas que involucren ecuaciones de segundo grado incompletas con sus múltiples variantes y con coeficiente 1 para la variable al cuadrado.

2º Luego, formular situaciones en las que el alumno agregue términos para que un binomio se convierta en trinomio cuadrado perfecto.

3º Planteando problemas con ecuaciones de segundo grado completas que requieran el uso de los métodos de Al-Kwarizmi, los cuales en el fondo pretenden analizar como convertir la ecuación emergente en trinomio cuadrado perfecto (o hacer variantes con el método de Diofanto o el de Sriahara).

4º Pasar, luego a realizar la construcción gráfica de los anteriores problemas, para darles conexión entre el álgebra y la geometría.

5º Solucionar ecuaciones de segundo grado por factorización y así profundizar en la descomposición en factores de la ecuación dada.

6º Llegar, a los casos donde la ecuación de segundo grado contenga un número distinto de 1 en la variable al cuadrado, lo cual llevará a su resolución con la fórmula general.

7º Por último, llegar a la enseñanza de las manipulaciones operativas de carácter literal, para solucionar las ecuaciones de segundo grado completas, donde se disponga de ejercicios llenos de interés para el alumno, con aplicaciones hacia la geometría, comercio, ciencia, industria, etc.

REFERENCIAS

Arrieche, M. (2002). La Teoría de Conjuntos en la Formación de Maestros. Facetas y factores condicionantes del estudio de una Teoría Matemática. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Boyer, C. (1999). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Universitaria.

Cadenas, R. (2004, Noviembre). La ecuación de segundo grado. Un estudio Histórico - Didáctico. V COVEM. Barquisimeto.

Capace, L. (2005). Significados elementales y sistémicos de una ecuación de segundo grado. Revista Trazos. 12, 7-8

Franco, R., (1964). Didáctica del álgebra, la geometría y la trigonometría. 2do. Tomo. Ed. Bedout. Medellín.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos matemáticos. Recherches en didactique des Mathématiques, 14(3): 325-355

Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. (Documento en línea). Disponible: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm (Consulta: 2007, Marzo 5).

Godino, J. D., Batanero C. y Font V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. (Documento en línea). Disponible: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm (Consulta: 2007, Abril 10).

Godino, J. D., y Font V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. (Documento en línea) Disponible: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm (Consulta: 2007, Abril 10).

Luque A., Carlos J., Mora M., Lyda C., y Torres D., Johann A. (2003). Factorización algebraica. (Documento en línea). Ponencia presentada en el XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética. Colombia. Disponible: http://www.encuentrogeometria.org/ (Consulta: 2007, Febrero 16).

Luque A., Carlos J., Montes F., Carlos, y Sánchez S., Diana. (2004). Solución de ecuaciones cuadráticas a partir de los elementos de Euclides. (Documento en línea). Ponencia presentada en el XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética. Colombia. Disponible: http://www.encuentrogeometria.org/ (Consulta: 2007, Febrero 8).

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico, visión histórica. Revista IRICE. 13, 105-132

Masini, G. (1980). El romance de los números. Barcelona: Círculo de Lectores.

Martínez, A. (2007). Significados Personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemática. Proyecto de trabajo de Grado para optar al Título de Magíster en Educación. Mención Enseñanza de la Matemática. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay.

Maza G., Carlos (2000). Las Matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico. Sevilla: Universidad de Sevilla.

Ochoviet, C. (2007). De la resolución de ecuaciones polinómicas al álgebra abstracta: un paseo a través de la historia. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 8(1). (Revista en línea). Disponible: http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ (Consulta: 2007, Julio 6).

Perero, M. (1994). Historia e Historias de Matemáticas. México: Iberoamericana.

Porras, O. (2004). Tercera Etapa: una propuesta. Escuela venezolana para la enseñanza de la matemática. Mérida.

Sestier, A. (1997). Historia de las matemáticas. México: Limusa.