IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO PARA EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Carmen Valdivé
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado
valfer16@yahoo.com

"La Matemática crece generalmente por acumulaciones sucesivas, en las que raramente se necesita desechar partes innecesarias, mientras que la Ciencia Natural crece casi siempre por medio de sustituciones, cuando se ha encontrado una teoría más satisfactoria que las anteriores."
(Boyer, 2003; pág. 425).

RESUMEN

La conferencia expone el resultado de una revisión teórica y ejecución empírica de la importancia del análisis epistemológico para el análisis didáctico en las investigaciones que se vienen haciendo en Educación Matemática. Son varios los investigadores que han señalado tal importancia afirmando, que los análisis epistemológicos permiten recuperar la complejidad de los objetos estudiados y ensanchan las concepciones epistemológicas, amplía la capacidad del investigador para interpretar las conductas y respuestas de los alumnos y por último provee insumos para pensar una problematización adaptada al aula. (Artigue, 1989, 1990; Sierpinska, 1985; Godino y otros, 2003; Bergé y Sessa, 2003). Se han realizado en los últimos años, análisis epistemológico, específicamente análisis histórico-epistemológico para tener una herramienta que posibilite acercarse a describir concepciones ligadas al desarrollo de ciertas nociones matemáticas, como lo son función, infinitesimal y polinomios entre otros y poder con ello elaborar elementos didácticos que permitan mejorar el proceso de adquisición de tales nociones.

Palabras clave: Análisis didáctico y epistemológico, nociones matemáticas.

INTRODUCCIÓN

El tema que presentamos en esta conferencia, es parte de mi trabajo de tesis doctoral que tiene como objetivo, el estudio de la conceptualización de los infinitesimales en el pensamiento de los estudiantes de la carrera Licenciatura en Ciencias Matemáticas y que cursan Análisis Matemático. Para ello, hubo la necesidad de estudiar, primeramente la noción *esquema conceptual* (Tall y Vinner, 1981) como herramienta teórica dentro de un modelo cognitivo que se utiliza en la investigación de los procesos implicados en el aprendizaje de conceptos complejos, modelo denominado Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus. En segundo lugar, la necesidad de realizar un análisis histórico-epistemológico de la noción matemática en estudio: Los infinitesimales.

Para delimitar el tema que se expone en el título de la conferencia, desarrollaremos tres puntos básicos:

1) Estudiar la evolución de la noción *esquema conceptual* como herramienta teórica: en este apartado haremos un recorrido por las investigaciones que han dado origen a la noción así como también como se ha ido matizando y ampliando. Analizar la especificidad del esquema conceptual evocado y su proximidad a la noción de concepción, esta última como otra herramienta teórica que se usa desde otros marcos teóricos cognitivos.

2) Resaltar la importancia del análisis histórico-epistemológico para el análisis didáctico: en este punto reseñaremos algunas investigaciones en donde se han realizado análisis epistemológico y señalaremos el uso que le han dado los investigadores.

3) Y finalmente mostrar un análisis histórico-epistemológico de la noción matemática en estudio (los infinitesimales) que nos permite ilustrar los hallazgos teóricos y su importancia.

Estudio de la evolución de la definición de la noción *esquema conceptual*

No vamos a presentar aquí una visión amplia de la teoría psicológica donde se encuentra inmerso mi trabajo de tesis, tarea que se puede encontrar en la literatura de las revistas especializadas. Pero sí resulta conveniente ofrecer una pequeña introducción del surgimiento de la misma como preámbulo al estudio de la noción que pretendo mostrar como primer punto, en el día de hoy.

Fundamentalmente en la pasada década de los 70 y 80 algunos miembros del PME (Psychology of Mathematics Education) fijaron su atención en la distinción entre cómo son los conceptos matemáticos y cómo son usados especialmente por los estudiantes; surge en 1985 un grupo de trabajo cuyo objetivo es profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal. Pero fueron Vinner y Hershkowitz (1980) en referencia a Geometría que introducen los términos definition e concept image en orden de distinguir entre el concepto formal, la definición general y la correspondiente estructura mental de un individuo consistente de todos los ejemplos asociados, contraejemplos, hechos y relaciones. Los autores, buscan los patrones cognitivos comunes y los esquemas conceptuales de cualquier concepto geométrico simple. El uso dado a los términos fue *concept image* y *definition,* traducidos como esquema conceptual y definición respectivamente.

Estos constructos fueron reelaborados posteriormente por Vinner y Tall en 1981, en relación a límite y continuidad. Estos autores a la definición del concepto personal y formal dada en 1980, incorporan las definiciones de esquema conceptual evocado y los factores potenciales de conflicto cognoscitivo, definidos de la siguiente manera:

Llamaremos *la parte del esquema conceptual* que es activado en un tiempo particular, el *esquema conceptual evocado*. Varias veces, aparentemente las imágenes contrarias pueden ser evocadas. Sólo cuando los aspectos contradictorios son evocados simultáneamente tiene que estar allí en un sentido real, un conflicto o una confusión. (Tall y Vinner, 1981; pag. 172)

Vamos a considerar la *definición del concepto*, una forma de palabras que suele especificar aquel concepto. Puede ser aprendida por un individuo en una manera, de memoria o más significativamente aprendido y relacionado con un menor o mayor grado al concepto total. También puede ser una reconstrucción personal del estudiante de una definición. Esto es entonces la forma de las palabras que el estudiante usa para su propia explicación de su esquema conceptual (evocado). Si le dan la definición del concepto, es dada por él o construida por él mismo, él puede variarla de tiempo en tiempo. De este modo una definición del concepto *personal* puede diferenciarse de una definición del concepto *formal*, ya que éste último es la definición del concepto que es aceptada por la comunidad matemática en general.

Para cada individuo una definición del concepto genera su propio esquema conceptual (que podría, ser llamado en un vuelo de imaginación "la imagen de la definición del concepto"). Esto es, desde luego, parte del esquema conceptual. (ibid).

Llamaremos una parte el esquema conceptual o la definición del concepto que puede estar en conflicto con otra parte del esquema conceptual o de la definición del concepto, un *factor potencial de conflicto.* Tales factores no tienen que ser nunca evocados en las circunstancias que causan el conflicto cognoscitivo real pero si ellos son evocados, los factores afectados van a ser llamados *factores de conflicto cognoscitivos* (ibid.)

Posteriormente algunos investigadores tales como Vinner (1983), Tall (1988, 1989), Vinner y Dreyfus (1989), Vinner (1991), Dahlberg y Housman (1997), Garbin y Azcárate (1998), Garbin (2000), Pinto y Tall (1999), Tall (2001), Przenioslo (2004) y Garbin (2005a, 2005b) aplican y profundizan dichos constructos.

En particular, refiriéndose a la definición del concepto de una función, Vinner (1983) distingue que: (a) para manejar conceptos se necesita de un esquema conceptual y no una definición del concepto y que (b) las definiciones del concepto (donde el concepto fue presentado mediante la definición) permanecerán inactivas o aún ser olvidadas. Igualmente señala: El nombre de un concepto cuando se ve o cuando se oye es un estímulo a nuestra memoria. Algo se evoca por el nombre del concepto. Normalmente, no es la definición del concepto; incluso en el caso de que el concepto tenga una definición. Es lo que nosotros llamamos el "esquema conceptual" (Tall y Vinner, 1981, Vinner, 1983).

Por otra parte, Tall (1988, 1989) al analizar el esquema conceptual y la definición de la pendiente de una recta tangente a una curva en estudiantes universitarios hace algunas reflexiones en torno a la herramienta teórica y al uso de las computadoras para resolver conflictos cognitivos. Infiere que cuando el individuo posee una variedad de esquemas conceptuales no se le hace simple o viable pasar a un conocimiento matemático de un modo formal. Propone que la alternativa es dar a los estudiantes experiencias más ricas de modo que ellos sean capaces de formar un concepto más coherente. Según Tall, esto no es tan fácil, pues implica un equilibrio entre la variedad de ejemplos y contraejemplos necesarios para ganar una imagen coherente.

Autores como Vinner y Dreyfus en 1989 al buscar las imágenes y las definiciones del concepto de función en estudiantes universitarios, agregan a la definición original dada del esquema conceptual, lo siguiente:

El esquema conceptual es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en caso de que el concepto tenga representaciones visuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Pueden traducirse las representaciones visuales, como los dibujos mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre de concepto. Pero es importante recordar que en las formulaciones verbales no es la definición la primera cosa evocada en nuestra memoria. Los estudiantes deciden sobre la base del esquema conceptual, el cual es, el conjunto de todos los dibujos mentales en la mente del estudiante, asociadas con el nombre del concepto, junto con todas las propiedades que lo caracterizan (por dibujo mental nosotros nos referimos a cualquier clase de representaciones-dibujos, formas simbólicas, diagramas, gráficas, etc.). La imagen del estudiante es un resultado de su experiencia con los ejemplos y contraejemplos del concepto. (Vinner y Dreyfus, 1989)

En 1991, Vinner estudia el rol de la definición en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Considera la definición del concepto y el esquema conceptual como dos "celdas" diferentes en la estructura cognoscitiva, pero no en el sentido biológico y analiza la introducción de una definición. Esta introducción puede ocurrir en tres situaciones posibles: (a) El esquema conceptual se cambia para acomodar la definición; (b) El esquema conceptual permanece como es, la definición es olvidada o deformada y (c) El esquema conceptual y la definición están ambas presentes, pero no unidas.

Señala Vinner que cuando se propone una tarea cognitiva a un estudiante se activan las celdas del esquema conceptual y la de definición del concepto, jugando un papel crucial las definiciones en las respuestas que se den, previniendo errores al evocar un concepto sin consultar la definición. El autor muestra (fig. 1) los procesos que pueden suceder en el pensamiento de un estudiante ante una un problema o tarea cognoscitiva.

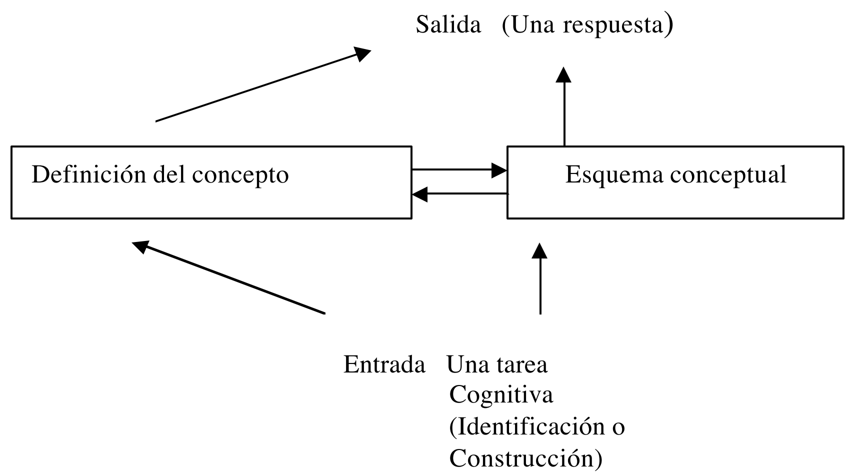


Figura 1: Interacción entre la definición del concepto y el esquema conceptual (Vinner, 1991; p. 71).

Las flechas en las figuras representan las diferentes maneras en que un sistema cognoscitivo podría funcionar. El rasgo común de todos los procesos ilustrado en la figura es el siguiente: no importa cómo su sistema de asociación reaccione cuando un problema se propone a un estudiante en un contexto técnico. No se supone que el alumno formule su solución antes de consultar la definición de concepto. Esto es, claro, el proceso deseable. Desgraciadamente, la práctica es diferente. Es difícil entrenar un sistema cognoscitivo para actuar contra su naturaleza y obligarle a que consulte las definiciones al formar un esquema conceptual o al trabajar en una tarea cognoscitiva. Lo que habría que evitar según Vinner sería la respuesta intuitiva que se muestra en la figura 2.

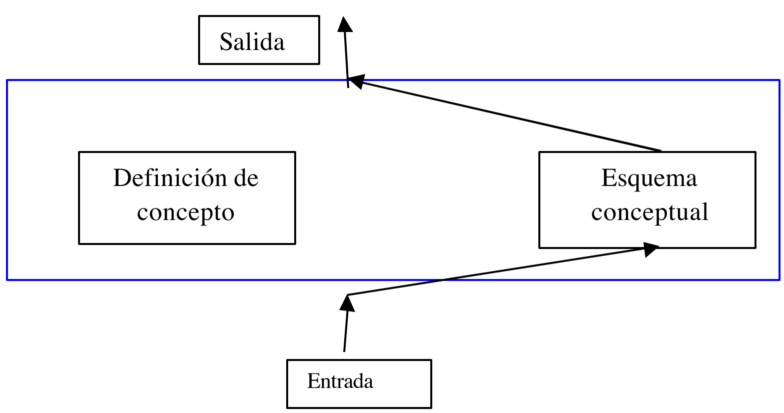


Fig. 2. La respuesta intuitiva
(Esto es lo que ocurre en los estudiantes pero es lo que se debe evitar)
(Vinner, 1991; p. 73)

Al intentar facilitar los eventos de que suceden en los aprendizajes a través de ejemplos, en 1997, Dahlberg y Housman determinan el desarrollo de los esquemas conceptuales de los estudiantes después de presentarles una definición. Argumentan que ese desarrollo natural e interno del esquema conceptual está interferido por las comunicaciones verbales y escritas de los estudiantes. Los autores centran el estudio en los cambios significativos de la imagen evocada del esquema conceptual. Para lograr esta aproximación, utilizan el constructo *concept usage* derivado de los trabajos de Moore (1994), quien encuentra ese tercer aspecto para la comprensión de un concepto. Los tres aspectos esquema conceptual, definición del concepto y *concept usage*, éste último traducido en este trabajo como esquema conceptual usado, es lo que Moore llamó *the concept understanding scheme*, "el cual se refiere a las maneras o vías operativas en la generación de un concepto o para hacer pruebas" (pag. 284)

Pinto en 1998, Pinto y Tall en 1999 identifican dos acercamientos fundamentalmente diferentes para construir sistemas axiomáticos, al manejar las situaciones posibles que usa Vinner (1991) para la clasificación de la formación de un concepto por un individuo en temas de matemáticas avanzadas como limite, derivada, continuidad. Identifican también las rutas de aprendizaje usadas para las construcciones de las definiciones de un concepto. Construcciones llamadas *natural/alien* por Duffin y Simpson (1993) y *natural/formal* por Tall (2001).

A través de un acercamiento natural, se construye un esquema conceptual para darle un significado personal a la definición formal. Esto significa que el sujeto puede construir ejemplos de la definición que sean suficientemente generativos para ser usados cuando realiza actividades cognitivas, para imaginar posibles teoremas y posibles estrategias para probarlos. *Un acercamiento formal*, se enfoca esencialmente en las definiciones usando deducciones formales para que el sujeto pueda construir teoremas de una manera que intente evitar y apelar a la intuición. Con esto, el individuo puede preferir una u otra aproximación o usar cada método apropiadamente (Tall, 2001, pág. 235).

Tall (2001), a raíz de los trabajos de Pinto, caracteriza el constructo esquema conceptual, especificando en éste, dos partes del esquema conceptual. Para Tall, dada una lista de axiomas o un concepto formal específico, define el ***esquema conceptual formal*** como aquel que consiste de la parte del esquema conceptual que está formalmente deducida de los axiomas. Ya que los esquemas tanto formales como informales están contenidos en el mismo cerebro biológico, las interconexiones están limitadas a crear confusiones. Similarmente la porción del esquema conceptual que es construido de la experiencia natural del día a día, con ejemplos, imágenes, procedimientos y procesos para darle significado a la definición formal, es llamado ***esquema conceptual informal.*** Bajo estas caracterizaciones, Pinto encontró rutas de aprendizajes, formal e informal que utilizan los estudiantes para construir teoría formal.

Przenioslo (2004) utiliza los esquemas conceptuales asociados al concepto de límite. Proporciona una caracterización específica a la noción de esquema conceptual asociado a tal concepto. Lo considera, como la estructura cognitiva que contiene toda clase de asociaciones y concepciones relacionadas al concepto (también relacionadas con sus propiedades y teoremas), incluyendo las intuiciones, elementos de comprensión formal, patrones establecidos, procedimientos aplicados en diferentes situaciones y estrategias operacionales. Agrega la autora que los esquemas conceptuales difieren en sus elementos por la forma de cómo esos elementos se interconectaron y por las relaciones dadas del esquema conceptual con la teoría formal.

Przenioslo define, según los resultados, algunas categorizaciones extraídas de las respuestas de los alumnos: (a) Esquema conceptual eficiente, si los estudiantes al resolver un problema usan elementos del esquema y llegan a la solución correctamente y (b) Esquema conceptual degenerado de la correspondiente definición, si es totalmente diferente a la definición y el estudiante no lo cambia a pesar de una intervención del profesor.

La base del origen de la herramienta teórica que estamos estudiando, unida al enriquecimiento a partir de los aportes de los trabajos que hemos mostrado constituye la plataforma para seguir avanzando desde la psicología en Didáctica de la Matemática.

Recientemente la noción esquema conceptual/definición del concepto es usada por Chin y Tall (2000, 2001); Chae y Tall (2005); Watson, Spyrou y Tall (2004), Watson y Tall (2002), en términos de la teoría de Lakoff y Núñez y de los enfoques natural y formal de Duffing y Simpson (1993). Definiendo con ello, rutas de aprendizajes modelos o enfoques de los estudiantes, y por ende categorizaciones de los ***esquemas conceptuales embodied*** y de los conceptos formales usados, en los términos de Moore, (1994). Los autores hacen referencia a que no todo concepto tiene una imagen visual, lo cual permite interpretar la no asociación de un esquema conceptual con el concepto, y que es por tanto un objeto metateórico en la forma de representación gráfica (Chae y Tal, 2005).

Actualmente se hace una distinción entre el ***esquema conceptual previo*** (Met-before) (Chin y Tall, 2001; Tall, 2004; Tall 2005) y un esquema conceptual. La primera está asociada a los conocimientos o experiencia previa que es evocada para darle sentido a una situación. Son esenciales en las construcciones de los currículos concebidos como secuencias lógicas. Esas experiencias previas proveen esquemas conceptuales construidos desde esas experiencias y con tareas cognitivas que pueden soportar pruebas formales.

En definitiva y como síntesis, ciertos autores al aproximarse a los esquemas conceptuales de los sujetos proponen tipologías en función de cómo se originaron y de su eficiencia. Así se distingue, en primer lugar, esquema conceptual formal, esquema conceptual informal, esquema conceptual embodied, met-before del mundo embodied y el simbolismo, esquema conceptual independiente. En función de la efectividad se distinguen esquema conceptual eficiente y esquema conceptual degenerado. (Tall, 2001; Pinto y Tall, 1999, 2001; Przenioslo, 2004; Chin y Tall, 2001; Watson, Spyrou & Tall, 2004 y Tall, 2005)

La noción de Concepción y su proximidad con la noción de Esquema Conceptual

La noción de concepción como otra herramienta teórica en trabajos cognitivos en Educación Matemática ha tenido mucho interés y la literatura es extensa. Ruiz (1998) realiza una revisión sistemática sobre este término y completa otros análisis realizados por Artigue (1989) y El Bouaizzaoui (1988). Resalta la visión del trabajo de Verganaud (1982) quien considera a la concepción como un estadio cognitivo global, logrando determinar una concepción partiendo de la definición de un concepto matemático. Por otra parte reseña el trabajo de Margolinas (1993) quien apunta que las concepciones aparecen porque el investigador construye la situación para que el sujeto pueda evocarla.

Nuestra opinión concuerda con la de Ruiz (1998) cuando cita a Artigue para afirmar la proximidad del constructo esquema conceptual con el de concepción: "la noción de ***concept image*** está muy próxima a la de ***concepción del sujeto*** en su sentido más global" Artigue (1989, p.15). Asumimos que aunque los dos términos tienen diferentes definiciones desde dos marcos teóricos distintos, comparten significados.

Para nuestro trabajo y en especial para el tema que estamos tratando en esta conferencia, interesa principalmente resaltar el sentido epistemológico de la noción de concepción y la diferenciación que se realiza entre la acepción cognitiva y epistemológica. El estudiar la evolución de una noción desde el punto de vista epistemológico-histórico tratando de identificar elementos que han determinado distintos momentos en su desarrollo aportará conocimiento relevante para *comprender* los factores determinantes del proceso enseñanza y aprendizaje de la noción que se quiere estudiar y *analizar* las concepciones o esquemas conceptuales que evocan los estudiantes ante una tarea cognitiva en matemática.

Ruiz (1998) en el análisis que produce sobre la noción de concepción aprecia dos sentidos complementarios para el término. El punto de vista cognitivo que está en conexión con los conocimientos y competencias del sujeto en relación a un objeto matemático y el punto de vista epistemológico, que en especial se detecta al estudiar la génesis histórica y evolución de un concepto; "para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados" (p.40).

Teniendo en cuenta el uso de la expresión de concepciones colectivas (El Bouaizzaoui), Ruiz finalmente diferencia la acepción cognitiva, concepciones del sujeto, con la acepción epistemológica de esta noción. A la primera se refiere a los conocimientos del sujeto sobre un objeto originado por el proceso de enseñanza y aprendizaje. A la segunda la refiere a la evolución histórica de los objetos del saber matemático, así como a los programas oficiales y libros de texto de los alumnos.

Nosotros ***la acepción cognitiva del esquema conceptual*** del sujeto la utilizamos para referirnos a los conocimientos que el sujeto evoca sobre un concepto; es decir, a la estructura cognitiva total que logra describir el investigador en un estudio específico y que son accesibles a la investigación didáctica para representar y describir cada concepto que la persona conoce.

Dado que la noción esquema conceptual en su acepción cognitiva requiere de tareas, situaciones, problemas que lo hacen emerger y de las representaciones, contextos, métodos, conceptos asociados a una noción y de los procedimientos que el sujeto usa para resolver dichas situaciones o tareas, caracterizamos en nuestro estudio al esquema conceptual evocado refiriéndonos a:

(1) Las ideas o proceptos que asocia el sujeto al concepto;
(2) Las representaciones asociadas a la noción que la hacen emerger y representaciones propias de la noción. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, palabras, gestos, símbolos) que el sujeto percibe del objeto o concepto y que evoca ante una situación problema o tarea;
(3) Los procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva;
(4) Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático;
(5) El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico) que el sujeto asocia ante la situación y
(6) Los métodos (matemáticos) que el sujeto implementa para resolver el problema.

El esquema conceptual evocado en su carácter epistemológico, lo consideramos como el que es activado en un tiempo particular. Este puede referirse a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto. Asumimos como caracterización los seis ítemes que propusimos en la acepción cognitiva del esquema conceptual.

Como segundo punto resaltaremos la importancia del análisis histórico epistemológico para el análisis didáctico.

¿Por qué hacer el análisis histórico de los conceptos matemáticos?. ¿Tiene algún interés de tipo didáctico el análisis de la génesis de un concepto matemático? Farfán y Hitt (1983) lo recogen de la manera siguiente: *"Existen elementos que permiten, e históricamente hicieron* *posible, la construcción de un concepto: todos estos son andamios de los que se vale el sujeto en su acción sobre el objeto, para acceder al concepto en sí, andamiajes con vida efímera que, circunstancialmente, son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto y donde el "error" y la sensibilidad a la contradicción desempeñan un papel importante*". Boyer (2003) expresa: *"La Matemática crece generalmente por acumulaciones sucesivas, en las que raramente se necesita desechar partes innecesarias, mientras que la Ciencia Natural crece casi siempre por medio de sustituciones, cuando se ha encontrado una teoría más satisfactoria que las anteriores."* Tales planteamientos arrojan algunas respuestas.

Sabemos que son varios los investigadores que han señalado la importancia de los análisis epistemológicos para el análisis didáctico. Por una parte Artigue (1989, 1990, 1992, 1995) ha señalado sus potencialidades y alcances, y la necesidad que el didacta tiene de realizar un estudio epistemológico. Sierpinska (1985, 1992) y Brousseau (1983) entre otros lo utilizan para determinar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática. Godino y otros (2003) lo utilizan para el análisis de Recursos Interactivos usando algunas herramientas de la "teoría de las funciones semióticas" (Godino, 2002a; 2002b).

Ruiz (1998) realiza desde un punto de vista epistemológico-histórico el estudio de la evolución de una noción matemática dándole tres usos didácticos. En este análisis, Ruiz trata de identificar las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios en su desarrollo, con el objeto de: 1) comprender los factores determinantes del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción en los distintos niveles de enseñanza; 2) comprender los fenómenos de transposición didáctica correspondientes y 3) analizar las concepciones que manifiestan los estudiantes.

Bergé y Sessa (2003) similar a Ruiz, identifican tres "modos de uso didáctico" del análisis histórico-epistemológico. Afirman, que permite recuperar la complejidad de los objetos estudiados y ensancha las concepciones epistemológicas, amplía la capacidad del investigador para interpretar las conductas y respuestas de los alumnos y por último provee insumos para pensar una problematización adaptada al aula.

González (2002) utilizan la perspectiva histórica para el análisis de los sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático.

Por otra parte, Sastre, Boubée, Rey, Maldonado y Villacampa (2006) analizan la evolución histórica de la génesis de un concepto, identificando en las etapas del proceso histórico las metáforas subyacentes, con el objetivo de obtener material de trabajo que permita posteriormente analizar el desarrollo de las explicaciones presentadas en los libros de texto, con la finalidad de reconocer en ellas la existencia, o no, de expresiones que hacen referencia a metáforas, y así poder posteriormente analizar las producciones de alumnos, que hayan utilizado determinados textos, a fin de determinar los efectos que dichas metáforas producen en la compresión evidenciada por los alumnos.

Crespo (2006) realiza un estudio histórico epistemológico donde presenta algunos problemas clásicos y no clásicos relacionados con una noción matemática. Estos problemas generan reflexiones acerca de las argumentaciones empleadas por los matemáticos en la historia y las dificultades que se podrían presentar en el aula de clases.

Para resaltar la importancia del análisis epistemológico, sólo basta con prestar atención a los diferentes usos didácticos que se le ha dado en las investigaciones reseñadas, teniendo presente que la enseñanza de un concepto presenta, sin lugar a dudas un reto a los docentes, ya que involucra obstáculos epistemológicos y didácticos. El estudio de la evolución histórica y epistemológica de un concepto puede, dar luz de cómo nace y se desarrolla, cómo se plantean y construyen los procedimientos relacionados y qué limitaciones conceptuales aparecen en el aprendizaje de la noción. El análisis histórico-epistemológico en nuestra investigación surge de la necesidad de poder tener una herramienta que nos posibilite acercarnos a describir concepciones ligadas al desarrollo de la noción de infinitesimal.

Finalmente quisiéramos ampliar lo expuesto en el punto dos y llevarlo al caso particular de mi trabajo a través del planteamiento de dos preguntas claves ¿Qué encontramos con el análisis histórico epistemológico de la noción, en mi caso particular, el infinitesimal? Y ¿cuál es su utilidad?. En un primer avance de mi trabajo, encontramos a partir de la reconstrucción histórica de la noción de Infinitesimal, siete *esquemas conceptuales epistemológicos evocados asociados* a la noción y 13 *subesquemas epistemológicos evocados*. Cinco esquemas están asociados a una diferencia, a una razón aritmética, a un incremento, a un símbolo y a una función. Dos son identificados como *esquemas epistemológicos previos*, considerados como "ideas nacientes" o experiencias previas que le dan sentido a la noción de Infinitesimal. Estas están asociadas a una razón y a un indivisible.

En respuesta a la utilidad que me brinda tal análisis, podríamos decir, que estos esquemas conceptuales evocados epistemológicos aportan un conocimiento relevante que serviría como marco de referencia para en primer lugar, interpretar factores determinantes de los procesos de construcción de los infinitesimales por parte de los sujetos, en una segunda etapa de la investigación. Y en segundo lugar, diseñar las actividades y preguntas de un cuestionario, pues tal diseño es una pieza importante de la investigación para detectar por ejemplo, esquemas conceptuales que tienen los estudiantes ante un concepto matemático (Oktac, García y Ramírez, 2007).

El análisis epistemológico en mi trabajo, lo hicimos siguiendo cuatro actividades como las que proponen Rodríguez, Gil y García (1999), y que aportaría a los investigadores, lineamientos seguros a la hora de enfrentarse a una tarea de análisis. Tareas que detallamos a continuación:

1) Fragmentamos la información. Reducimos la información haciendo una reconstrucción histórica provisoria de la noción. Consideramos siete períodos históricos resaltantes. Para ello separamos la información en unidades de análisis. Seguimos los criterios temporales, temáticos y sociales. Para el temporal, segmentamos la información tomando referencias por siglos y épocas desde la aparición intuitiva de la noción en la antigua Grecia hasta el siglo XIX, época donde se destierran los infinitesimales. Para el criterio temático, consideramos las situaciones, las actividades, los procedimientos, los métodos, los conceptos asociados, las ideas resaltantes que los matemáticos de cada época o siglos utilizaron y desarrollaron (en concordancia a la caracterización de las Págs. 2,3). Finalmente para el criterio social, cada segmento diferenciado en el texto lo hacemos corresponder con la información concerniente a los matemáticos que otorgaron un significado a la noción o aceptaron acuerdos sobre ésta.

La descripción de la evolución histórica construida en esta primera tarea de análisis, la separamos en siete épocas o períodos con matemáticos representativos y concepciones aceptadas y/o convenidas por ellos. Cada época la hemos identificado con un título caracterizador:

a) La Grecia antigua (500 años antes de Cristo): Hacía una búsqueda de medidas de figuras curvilíneas.

b) La edad medieval (529- 1436): La cuantificación de las magnitudes geométricas y el infinitesimal como un segmento que cuantifica.

c) Época posterior a la renacentista y de avance a la matemática moderna: Siglos XVI e inicios del XVII con una apertura a las técnicas infinitesimales.

d) Mitad del siglo XVII, época de Fermat, Wallis y Barrow: hacia una construcción de la geometría a través de la longitud de los segmentos.

e) Segunda mitad del siglo XVII hasta inicios del XVIII, las ideas de Newton, Leibniz y L´Hospital: hacia una sistematización de los infinitesimales como incrementos (aumentos o disminución) muy pequeños de una variable.
f) El Siglo XVIII e inicios del XIX. Del cálculo diferencial de Newton, Leibniz y L'Hospital al cálculo de funciones de Euler y D'Alembert. Los infinitesimales como símbolos, como cantidades variables.
g) El cálculo acordado de Cauchy y Weierstrass, un cálculo aritmético, y estático para el concepto de límite, sin referencia al movimiento ni a la geometría: el destierro de los infinitesimales del cálculo

2) Los siete períodos encontrados: Identificamos y clasificamos las unidades de análisis. Examinamos cada unidad de análisis (cada período histórico) para identificar en ellas, componentes temáticos que nos permitan clasificarlas en una u otra categoría temporal, temática o social. La categorización es una herramienta utilizada en esta tarea de análisis, pues se puede clasificar conceptualmente las unidades que son cubiertas por un mismo tópico, en este caso, la noción infinitesimal, los matemáticos que otorgan significado en esa época y las nociones, métodos, situaciones, contexto y conceptos asociados otorgados, siguiendo un procedimiento inductivo. Al examinar cada período, reflexionamos acerca del contenido de los mismos, nos preguntamos por el tópico capaz de cubrir cada uno. Proponemos categorías que en unos primeros momentos son provisionales, luego modificadas o suprimidas, a partir de la comparación entre las informaciones agrupadas bajo una misma categoría en cada período o a partir de la comparación con la información incluida en otros períodos.

Matriz, redes sistémicas y esquemas conceptuales epistemológicos evocados.

Los sistemas de categorías (lo que hace único cada período) lo caracterizamos por su corrección lógica, siguiendo los requisitos de exhaustividad de las categorías, exclusión mutua y el principio clasificatorio. Este último requisito nos permite elaborar cada período desde los criterios ya mencionados.

En esta actividad de análisis extraemos nueve esquemas conceptuales epistemológicos evocados (ECE) a partir de la evolución histórica:

Grecia Antigua	La edad medieval (529-1436)	Siglos XVI e inicios del XVII	A mitad del siglo XVII	Segunda mitad del siglo XVII hasta inicios del XVIII	El Siglo XVIII e inicios del XIX	Finales del Siglo XIX
(ECE_1): El infinitesimal asociado a una la razón	(ECE_2): Un infinitesimal asociado a un unidad indivisible ,	(ECE_3): El infinitesimal visto como los infinitamente pequeños (paralelogramos) de los infinitos elementos en que se compone una figura.	(ECE_5):El infinitesimal como una diferencia imperceptible	(ECE_7):El infinitesimal visto como incremento muy pequeño de una variable.	(ECE_8): El infinitesimal como símbolo.	ECE_9: El Infinitesimal como una función.
		(ECE_4): Un infinitesimal viene a ser un indivisible.	(ECE_6): El infinitesimal como una razón aritmética.			

3) Dispusimos y Organizamos la Información: Situamos y transformamos los períodos, en un conjunto organizado de información, presentándolos en forma de matriz. Ésta presenta procesos y productos, relaciones y agrupamientos conceptuales. La construimos para sintetizar los fragmentos en una misma categoría (los períodos históricos-columna) para diferentes ideas, representaciones, contextos, procedimientos, conceptos asociados y métodos (filas). Un ejemplo para el primer período lo podemos ver a continuación.

	Grecia Antigua
Ideas	Las razones geométrica y numérica, asociadas a la idea naciente de infinitesimal y a la definición de proporcionalidad.
Representaciones	*Representaciones asociadas al concepto que lo hacen emerger*. Gráficas de: Polígonos inscritos en figuras curvilíneas. Divisiones indefinidas de segmentos y lados de polígonos. Cuerpos geométricos descompuestos en partes indivisibles Cuerpos geométricos descompuestos en partes indivisibles, Polígonos inscritos y circunscritos en figuras curvilíneas.
Contexto	Geométrico y Físico.
Procedimientos	a) geométricos: comparar magnitudes e inscribir y circunscribir polígonos, fragmentar o descomponer un cuerpo en partes y encontrar razones geométricas. b) aritméticos: encontrar razones numéricas.
Conceptos Asociados	Teoría de la proporcionalidad entre razones de magnitudes de diferentes y del mismo tipo (números, longitudes, áreas y volúmenes), razones numéricas y geométricas.
Métodos	a) Método de exahuscion de Eudoxo y b) "el Método" de Arquímedes.
Esquema Conceptual Epistemológico Previo (Met-before)	($ECEM_1$): El infinitesimal como razón

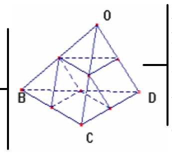
A partir del análisis de la información de la matriz, se pudo realizar siete redes sistémicas, como herramienta de organización y análisis de información (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) que permite abstraer de los nueve esquemas conceptuales epistemológicos evocados, siete esquemas con sus respectivos subesquemas. De los siete esquemas conceptuales epistemológicos, dos son identificados como esquemas conceptuales epistemológicos previos (Met-before).

4) Descripción estructurada: Los hallazgos. Ensamblamos los elementos diferenciados presentados en la matriz y organizados en la red sistémica detallada en la actividad anterior, para reconstruir un todo estructurado y significativo que intenta dar respuesta al objetivo del estudio: realizar un estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos evocados asociados históricamente a la noción de *infinitesimal*. Se trata de determinar la pluralidad de puntos de vista posibles que le han sido asociados (ideas, conceptos o preceptos asociados, contextos, procedimientos, métodos y representaciones) y poner en evidencia su mayor o menor adaptación a la resolución de diferentes problemas. *Se usa la estructura de Red Sistémica para ilustrar y ejemplificar la descripción de los resultados obtenidos* como se puede observar en la figura 3, donde detallamos la caracterización del primer esquema conceptual encontrado con el análisis en donde la noción de infinitesimal es una idea naciente asociada a una razón en el primer período histórico categorizado como la antigua Grecia.

Razón geométrica

Viene a ser un patrón común (secciones planas), patrón como unidad de medida y como parte de un todo (SECEM12)

Se llena el sólido o cuerpo geométrico con secciones que tienen espesor (Demócrito).



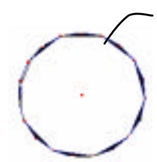
El volumen de la pirámide *v(P)* es la tercera parte de un prisma *V*

Es t an pequeña como se quiera (SECEM11)

Se comparan magnitudes entre objetos geométricos para calcular áreas.

Las áreas de los dos polígonos a(P) inscritos están a la “misma razón” que la de los cuadrados de los radios. Sucede igual para las áreas de los círculos a(C). (Hipócrates)

Diferencia tan pequeña como se quiera



Se incrementa indefinidamente el número de lados del polígono inscrito y se exhausta el círculo. (Hipócrates).

Razón numérica

Es menor que cualquier magnitud prefijada. (SECEM13)

Se toma una magnitud prefijada para comparar magnitudes entre objetos (Eudoxo y Arquímedes)

Se establece que: a(C)/r^2 está entre 223/71 y 22/2

V- v(P) es menor que una mangitud prefijada.

a (C) – a(P) es menor que una magnitud prefijada.

Fig. 3 Red Sistémica del Esquema Conceptual Evocado Epistemológico Previo

Para culminar, decíamos al comienzo de la conferencia que el trabajo que exponíamos planteaba la necesidad de realizar análisis epistemológico para luego darle un uso didáctico, tal como lo han reportado las investigaciones. Podemos afirmar que el análisis que hemos realizado nos permite entender los procesos de construcción de los Infinitesimales, así como los diversos estadios en la evolución de la noción y nos da luz para diseñar situaciones problemas, actividades y preguntas que servirán para interpretar las respuestas que afloran los alumnos al enfrentarse a esas situaciones. Esto nos aportaría razones que nos dirigen a una manera diferente de afrontar el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, pero esa sería otra historia.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1989). Epistemologie et Didactique. Cahier de DIDIRENT, 3. IREM. Université Paris VII.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10* (2/3), 241-286.

Artigue, M. (1992). The importance and limits of epistemological work in didactics. *Proceedings of the 16th Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education 16,* Durham, vol. 3, 195-216.

Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. *Planary Lecture,* CMESG, *Proceedings*, 7-21.

Bergé, A. y Sessa, C (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Relime.* Vol. 6. Num 3. Pp. 163-197.

Bliss, j., Monk, M. y Ogborn, j (1983). Qualitative Data Analysis for Educational Research. Londres: Coom Helm.

Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza: Madrid.

Brousseau, G. (1983). Les Obstacles épistémologiques et les problemas en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2),164-198.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Cantoral, R. y Farfan, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. Thomson Editores: México.

Chae, S. y Tall, D. (2005). Student´s Concept Images for Period Doublings as Embodied Objets in Chaos Theory. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 2000.

Chin, E. y Tall. D. (2000). Making, having and compressing formal mathematical concepts. In T. Nakara, & M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 177-184.

Chin, E. y Tall, D. (2001) Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. in Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Ed), in Marja nan den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* 4, 241-248. Utrecth, The Netherlands.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall *(Ed.), Advanced Mathematical Thinking*. 153-166. Kluwer Academic Prés Dordrecht: Boston/London.

Crespo, C. (2006). Un paseo por el paraíso de cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. (19)*. México: CLAME, 22-27.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag: New York.

El Bouaizzaui, H. (1988). *Conceptions des eleves et des professeurs á propos de la notion de continuité d´une fonction*. Thése Ph. D. Université Laval.

Euler, L. (2000). *Introducción al Análisis de los Infinitos*. SAEM "Thales": España.

Garbin, S. (2005) ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa Relime* 8 (2), 169-193.

Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3)

Godino, J. D. (2002b). Studying the median: a framework to analyse instructional processes in statistics education. En B. Phillips (Ed.), *ICOTS-6 papers for school teachers*. Cape Town: International Association for Statistics Education (CD Rom).

Godino; J.D. y otros (2003). Análisis Didáctico de Recursos Interactivos para la Enseñanza de la Estadística en la Escuela *.IASE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet*. Berlin, Germany, 11-12 August, 2003. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm.[Consulta 2006: Agosto 26]

González, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca

Harel, G.; Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectivas en Gutiérrez, A y Boero, P. (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 147-172. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kleiner, I. (2001). The Infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 137-174

Otakc, A. García, C y Ramírez, C (2007). Diseño de Actividades: Ejemplos de Álgebra Lineal. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López, C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Ediciones Díaz de Santos, 315-327.

Pinto, M. y Tall, D. (1999). *Students constructions of formal theory: living and extracting meaning*. Proceedings of the 23th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations, Haifa, Israel. 2, 41-48.

Pinto, M. y Tall, D. (2001).Following students' development in a traditional university classroom, in Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Ed), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* 4, 57-64. Utrecth, The Netherlands.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*. 55(1 y 3), 103-132.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary shoool. *Educational Studies in Mathematics*. 60(1), 71-93.

Rodríguez, G.; Gil, J. y García E. (1998). *Metodología de la Investigación Cualitativa.* Ediciones Aljibe: Málaga.

Ruiz, L., (1998). *La noción de función: Análisis Epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Universidad de Jaen. España.

Sastre, P., Boubée, C., Rey, G., Maldonado, S. y Villacampa, Y. (2006). Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. (19)*. México: CLAME, 22-27.

Sierpinska, A. (1985). La notion d'obstacle epistemologique dans la enseignement des Mathématiques. *Actes de la 37^{e} Rencontre CIAEAEM* (p.73-95). Leiden.

Sierpinska, A. (1992). Un understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept function. Aspect Eppistemology and pedagogy*. 25-58. USA: Mathematical Association of America.

Tall, D. (2005). The transition form embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. *Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-16. Frazer, Island, Australia.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-16. Bergen, Norway.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies en Mathematics,* 48(2 y 3), 200-238.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2007). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución Histórica de la Noción de Infinitesimal. (Relime, en prensa).

Watson, A. y Tall, D. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 369-376.Norwich, UK.

Watson, A., Spyrou, P. y Tall, D. (2004). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. 1-24.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa.* Barcelona: Paidós.