UMA ANALOGIA ENTRE EXPERIMENTOS MENTAIS E PROVAS MATEMÁTICAS

Willian José da Cruz
lukinha@barbacena.com.br
Uniban - Brasil

Tema: Pensamento Matemático Avançado
Modalidad: Comunicação breve
Nivel educativo: Não especificado
Palabras clave: Provas matemáticas, objetos abstratos, conceitos

Resumo

Este trabalho faz parte da pesquisa em desenvolvimento, denominada "Semelhanças e diferenças entre experimentos mentais e provas matemáticas". A intenção é mostrar o momento atual desta pesquisa, confluindo aspectos para compreensão de quais concepções podemos inferir, na dinâmica da experimentação mental e das provas matemáticas. O objetivo deste trabalho é apresentar de forma parcial, os primeiros resultados dessa pesquisa cujo foco é aprofundar conhecimentos sobre como funciona o pensamento e a comunicação matemática. Na matemática, há necessidade da generalização da perspectiva, mesmo dentro de uma prova, pois se os argumentos da prova fossem totalmente reducionistas, poderíamos questionar: como ganhar novos conhecimentos através da prova? Surge então a hipótese dos experimentos mentais que são conceituados como experimentos realizados no laboratório da mente, apresentando-se como raciocínio lógico, partindo de algumas hipóteses, teorias ou princípios. Faremos um mergulho em algumas noções sobre como se configuram os experimentos mentais e as provas matemáticas, para podermos identificar algumas convergências e/ou divergências entre esses dois conceitos.

1. Introdução

Lecionando há mais de uma década, busco compreender como se deu o conhecimento matemático ao longo dos tempos. Esta motivação foi se aflorando pelos enfrentamentos, muitas vezes complicados, na relação entre matemática, aluno e professor de matemática. Alguns questionamentos sobre o que pode ser a matemática e como foram desenvolvidos os atuais contextos em que esta ciência se apresenta, também fazem parte dessa inquietação a qual me encontro.

O objetivo deste trabalho é apresentar de forma parcial, os primeiros resultados de estudos da pesquisa intitulada "Semelhanças e diferenças entre experimentos mentais e provas matemáticas, para a obtenção do grau de Doutor em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante Anhanguera (UNIBAN), cujo foco é aprofundar conhecimentos sobre como funciona o pensamento e a comunicação matemática. Buscaremos nesta tese, responder à seguinte questão: Como produzir e aprofundar conhecimentos e discussões acerca das características dos experimentos mentais e das provas e/ou demonstrações matemáticas? Para esse propósito serão adotados os seis eixos seguintes?

a) **FORMA**: Experimentos mentais são baseados, como o próprio nome sugere, num sistema de atividades (supostas), enquanto provas matemáticas consistem de proposições conectadas ou encadeadas logicamente.

b) **ESTRUTURA**: Em cada experimento mental, muitas coisas são apenas implicitamente assumidas. Os matemáticos, no entanto, sempre procura fazer tudo explícito e não só isso, eles estão à procura de condições necessárias e suficientes para um fato ser provado.

c) **COMPREENSÃO**: Experimentos mentais combinam em si experiências e conhecimentos que seguem uma lógica de considerações heurísticas com deduções estritamente lógicas e cálculos formais.

d) **REVELAÇÃO**: Experimentos mentais têm inicialmente apenas uma função negativa e crítica. Revelam contradições no sistema de nosso conhecimento. Muitas vezes, porém, novas leis são descobertas desta maneira. Se existem apenas duas possibilidades e uma delas é falsa, a outra deve ser verdadeira. É claro, a nova teoria também é apenas uma teoria e não a verdade absoluta. O que vemos é que a nossa comparação entre experimentos mentais e provas matemáticas depende da relação entre a teoria e a realidade.

e) **COMPARAÇÃO**: Nós muitas vezes ganhamos novos conhecimentos quando algo que já foi dito uma vez é dito mais de uma vez de um modo novo. Isso se aplica tanto às provas matemáticas como aos experimentos mentais.

f) **DEPENDÊNCIA**: Os experimentos mentais dependem obviamente do conhecimento comum e de argumentos que a comunidade aceita mesmo não sendo argumentos estritamente lógicos.

Nossos estudos se encaminham através de uma pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico, pertencente à linha de pesquisa que estuda a relação entre a matemática e a linguagem.

2. Uma função para os experimentos mentais

A função do experimento mental é auxiliar na eliminação de uma confusão prévia, obrigando aos cientistas reconhecerem contradições inerentes desde o inicio de seu modo de pensar. A eliminação da confusão existente não parece exigir dados empíricos adicionais e não é necessário que a situação imaginada exista de fato na natureza. Para Kuhn (2011) o experimento mental cujo único propósito é eliminar a confusão está sujeito a apenas uma condição de verossimilhança: “a situação imaginada deve ser tal que o cientista possa aplicar seus conceitos do mesmo modo como normalmente empregava antes” (KUHN, 2011, p. 259).

Outra consideração é dizer que os experimentos mentais auxiliam os cientistas a chegarem às leis e teorias diferentes daquelas que sustentavam anteriormente, nesse caso, o conhecimento anterior só poderia ter sido confuso e contraditório no sentido especificamente e completamente a-histórico, que contribui para contradição e confusão a todas as leis e teorias que o progresso científico nos obrigou a descartar. A experimentação mental, ainda que esta não apresente novos dados, é mais próxima da experimentação efetiva do que se supõem no geral.

Em suma, Kuhn (2011), classifica os experimentos mentais como uma forma de colocar os cientistas diante de uma contradição ou conflito, implícito em seu modo de pensar; em seguida, o reconhecimento da contradição apresenta-se como a propedêutica essencial à sua eliminação. Como resultado do experimento mental, conceitos claros são desenvolvidos para substituir os conceitos confusos que foram utilizados anteriormente. Outra situação é que a natureza e não a lógica por si só era responsável pela confusão aparente. Essa situação levou Kuhn (2011) a sugerir que o tipo de experimento mental examinado, pode tanto ensinar ao cientista sobre seus conceitos quanto sobre o mundo.

3. Uma analogia entre a matemática e a física

Brown (2005) aponta que uma das objeções ao platonismo, presentes mais em conversas do que em escritas é a irrelevância da existência de objetos abstratos. Esse mesmo autor questiona se as coisas seriam diferentes se objetos abstratos não existissem. A resposta poderia parecer óbvia de um ponto de vista retórico, ou seja, seria a mesma coisa se entidades abstratas existissem ou não, mas para Brown (2005), esta resposta estaria errada, pois essas coisas seriam muito diferentes. Se não houvesse objetos abstratos, então não teríamos intuições relativamente a esses objetos, logo, 2 + 2 = 4, não pareceria intuitivamente óbvio (BROWN, 2005, 64).

Segundo Brown (2005), o argumento da existência ou não de objetos abstratos, seria o mesmo com xícaras de chá, se elas não existissem, nós não as veríamos e haveria uma grande confusão sobre a mesa todas as vezes que se servisse o chá. Talvez a questão natural a ser feita é: como as coisas seriam diferentes se não houvesse objetos abstratos? Todo o resto, inclusive nossas intuições seriam as mesmas?

Brown (2005) fala que a marca moderna do platonismo cognitivo não é a mesma da Teoria de Platão, mas tem muito em comum com ela, tendo que enfrentar objeções bem semelhantes. Mas o desafio não é saber se os objetos abstratos existem ou não. Aristóteles por exemplo, reivindica que as formas de Platão são duplicações desnecessárias do mundo físico, mas Aristóteles deixa de considerar que as formas fazem muito mais do que apenas contar o mundo físico, elas são também uma fonte de conhecimento desse mundo físico e da base do valor moral. Os objetos matemáticos da mesma forma, não são meramente fabricantes de sentenças verdadeiras, mas são responsáveis por nossas crenças matemáticas. Talvez a existência de objetos abstratos fizesse alguma diferença para nossos estados mentais, mas como? Como os objetos abstratos são responsáveis por nossas intuições?

Brown (2005) diz que a intuição matemática é misteriosa, pois não sabemos nada a não ser um pouco sobre a percepção dos conjuntos de Gödel, Hardy e outros platônicos. Termos como "*agarrar, apreender* e *uma espécie de percepção*" são usados regularmente, mas têm sido contestados na matemática. Porém na física é muito diferente quando se trata dos cinco sentidos ordinários aos quais sabemos algo. Mas o quanto mais nós sabemos sobre percepção física do que intuição matemática? No caso da percepção visual normal de uma xícara de chá, por exemplo, acreditamos que os fótons vêm da física, pois a xícara de chá entra em nossos olhos, interage com receptores da retina e uma cadeia de conexões neurais através do visual caminha para o córtex visual. O que nós podemos julgar neste caso é que não sabemos nada sobre como as crenças são formadas. A conexão entre mente e cérebro é um dos grandes problemas da filosofia. De forma natural, o que há são algumas conjecturas esboçadas, mas seria enganoso sugerir que isso é de alguma forma entendimento (BROWN, 2005).

O processo de conhecimento é bem compreendido, mas continuam a existir elementos que são tão misteriosos do mesmo modo como os elementos platônicos nada têm para nos oferecer. Brown (2005) defende que não sabemos como a cadeia de eventos físicos culmina na crença de que, por exemplo, a xícara de chá está cheia, o que o autor sugere, para não nos vangloriarmos diante deste estado de ignorância é que a intuição matemática não é mais misteriosa do que o elo final na percepção física.

A proposta de Brown (2005) que estabelece uma analogia entre a física e a matemática com base na premissa do platonismo mostra que a matemática trata tanto de objetos como a física, ou seja, a fertilidade desta analogia está no fato de podermos usar a intuição.

4. Diferença entre provas que provam e provas que explicam

A matemática não é um jogo mecânico ou um jogo de xadrez, pois sempre temos que generalizar, ou seja, ir de uma proposição particular, como, por exemplo, esta pedra cai. Se x é uma pedra então para cair, nós temos que acreditar na realidade das relações, nas leis da natureza, nos universais, nas ideias, etc., tem que haver uma certa crença no platonismo cognitivo. Para generalizar é necessário representar o impossível, o imaginário ou o irracional (no sentido de não existir na razão imediata), ou seja, é preciso ver o impossível, o insolúvel e o irracional como apenas relativo.

Por este motivo há a necessidade da generalização da perspectiva, mesmo dentro de uma prova, pois se os argumentos da prova fossem totalmente reducionistas, como poderíamos ganhar novos conhecimentos através da prova? Surge então a hipótese dos experimentos mentais tão frequentemente usados nas áreas empíricas que poderiam ter um papel importante na matemática.

Outro fenômeno que aponta nesta mesma direção é que desde o Renascimento existe uma discussão se a ciência e a matemática têm um valor instrumental, ou se elas realmente contem verdades sobre o nosso mundo. Na matemática pura este problema se mostra na distinção entre provas que provam, ou seja, que trazem certezas e convicções subjetivas e provas que explicam. Alguns filósofos como Aristóteles e Bolzano, por exemplo, consideravam as primeiras meras verificações, enquanto as segundas mostrariam os fundamentos objetivos de tais verdades. Esta distinção resulta da diferenciação entre as coisas que aparecem antes no processo do pensamento em contraste com outras que tem prioridade no sentido da estrutura objetiva do conhecimento. Aristóteles foi o primeiro a nos alertar para o fato de que o que aparece primeiro, ou seja, em primeiro lugar na percepção e no pensamento, não necessariamente, é o mais fundamental de um ponto de vista objetivo. Se fosse diferente, e se tudo fosse tal como aparece diante de nós, então todo e qualquer ensino seria supérfluo e desnecessário.

Otte (2012) considera que a teoria matemática e a sua linguagem se misturam, substituindo todos os seus objetos por algumas de suas descrições. Para Otte (2012) compreendemos somente aquilo que significa algo para nós e que esse significado depende da língua e geralmente da conexão, ou seja, continuidade. A explicação de um fato significa primeiramente relacionar esse fato com outros equivalentes.

A questão que se apresenta é verificar se a matemática essencialmente é uma lógica ou uma língua, um sistema de proposições ou um produto sintético, ou seja, uma construção. Talvez a resposta mais comum seja dizer que são ambas, mas, segundo Otte (2012), a perspectiva da prova nos leva na direção da língua. O desequilíbrio entre diferentes orientações básicas da cognição matemática e a integração com a realidade é resultante da ênfase dada à compreensão da prova como verdade absoluta.

A visão que se tem hoje da matemática a caracteriza como um determinado tipo de raciocínio, expressando-a como um amontoado de fórmulas sendo a matemática consistida de afirmações. A atividade matemática se configura tipicamente como uma atividade de demonstração de provas. Para Otte (2012), essa convicção corresponde a outra, a qual indica que não é a referência aos objetos especificamente matemáticos que diferencia a matemática das demais ciências.

5. Buscando uma analogia entre experimentos mentais e provas matemáticas

Por mais dois mil anos, o livro “Elementos de Euclides” foi considerado um paradigma de raciocínio matemático rigoroso. Somente quando foram estabelecidos os modernos métodos axiomáticos, no final do século XIX, é que o livro perdeu sua preeminência quanto a este respeito. Estudiosos mais recentes interessados no argumento matemático grego tentam minimizar o caráter intuitivo nos Elementos, alguns tentando reverter para tipos anteriores ao raciocínio de Euclides.

Talvez a mais evidente característica moderna dos Elementos seja a utilização do método axiomático que é a essência da matemática moderna (MUELLER, 1969). Tanto nos Elementos como em uma obra moderna representativa, *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria) de Hilbert, se encontra algumas palavras como: postulados e derivados. A profunda semelhança parece depender do significado dessas palavras. No caso de *Grundlagen*, os significados são claros: derivado significa “meio”, ou pode ser entendido sem afetar o teor da obra, como “deduzir”. Utilizando os princípios da lógica moderna a definição aproximada de postulado, tem a intenção de trazer o personagem chamado “hipotético” da moderna matemática axiomática. Muitos estudiosos têm apontado que para os gregos a matemática não era uma ciência hipotética, eles consideravam as afirmações matemáticas verdadeiras e de interesse apenas porque eram verdadeiras. Para o formalista moderno a questão de verdade tal como concebida pelos gregos é matematicamente irrelevante. No entanto, dizer que o significado de postulado para os gregos era “assumir como verdadeiro”, ignora uma característica muito importante dos Elementos, a saber, três dos cinco postulados não são ainda capazes de serem verdadeiros:

Estes postulados, gramaticalmente não são afirmações de existência como os seus homólogos modernos, também não são descrições de possibilidades que poderiam de fato ser irrealizáveis ou falsas. Eles são o que poderia ser chamados de licenças para realizar determinadas operações geométricas.

Pode-se dizer que derivações euclidianas são, não de forma significativa, as modernas derivações formais, porém isto não é verdade, pois as derivações precedentes da argumentação de Euclides são realizadas de determinadas operações que previamente já foram vistas que eram possíveis de serem realizadas.

Mueller (1996) afirma que a caracterização de uma derivação euclidiana como um experimento mental que envolve um objeto físico idealizado, que pode ser representado em um diagrama é claramente justificada. Muitas vezes, o diagrama não é essencial para o argumento, uma vez que as palavras por si só já justificam a prova, no caso do diagrama ser o objeto da prova. Muller (1996) diz que muitas vezes tem sido apontado que os diagramas desempenham um papel importante nos argumentos de Euclides. Esses casos não podem ser considerados como meros lapsos do método axiomático, mas como um indicativo do caráter experimental da geometria Euclidiana. Neste ponto de vista, o diagrama é muito mais próximo da prova do que as palavras que o acompanha.

De acordo com Muller (1969) pode se pensar nas provas de Euclides como versões padronizadas do tipo de um discurso que Sócrates tem com o menino escravo no *Mênon*, mostrando que o argumento verbal é apenas um acompanhamento à manipulação diagramática, sendo o diagrama considerado a fonte de convicção de um tribunal de última instância para decidir a verdade ou falsidade de uma afirmação geométrica.

Após investigar com o Escravo o que é um quadrado e quais suas principais características, Sócrates propôs o problema de encontrar o lado de um quadrado cuja área fosse o dobra da área de um quadrado de lado 2 (ver: ROQUE, 2011 p. 144). Para Sócrates conhecer a resposta não era saber fazer cálculos e sim saber sobre que linha deve ser construída o lado do quadrado. Esta é a análise no entendimento grego, ou seja, é um experimento mental de mostrar as possibilidades de se fazer um problema ou uma prova.

Contrastando as provas de Euclides à discussão no *Mênon*, vimos que esta representa um tipo primitivo de argumento matemático. O contraste pode ser considerado como um formalismo estilístico na matemática, motivado por uma concepção filosófica da matemática.

Uma derivação euclidiana, então, é um experimento mental de certo tipo de experiência com a intenção de mostrar, quer seja que uma determinada operação possa ser realizada ou que um certo tipo de objeto tenha uma determinada propriedade. As derivações euclidianas são bastante diferentes das Hilbertianas, pois estas últimas não envolvem o uso da intuição.

6. Conclusão

A analogia entre experimentos mentais e provas matemáticas formais, funciona apenas se acreditamos numa relação entre descoberta e fundamentação do conhecimento. A pergunta que fica é: A prova deveria produzir insight e conhecimento, ou teria a tarefa de exibir a estrutura lógica do mesmo? Bolzano diferenciou entre as provas que sevem para certeza subjetiva, ou seja, provas que provam, e outras representando causas verdadeiras da conclusão, ou seja, provas que explicam. Então estamos num dilema: de um lado queremos descobrir se alguma coisa é verdadeira e do outro lado queremos saber por que é verdadeira. O fundamentalismo da matemática a partir do século XIX mudou a ênfase da primeira para a segunda questão.

Referencias bibliográficas

Brown, J. R. (Ed.).(2005). *The Laboratory of the mind: Thought experiments in the natural sciences*. London:Taylor & Francis e- Library.

Mueller, I. (1969). *Euclid's Elements and the Axiomatic Method*. Brit. F, Phil. Sci.20 (1969), 289 - 309. Printed in Great Britain.

Kuhn, T. S. (Ed.).(2011). *A tensão essencial*. São Paulo: Editora UNESP.

Otte, M. (2012). *A realidade das Idéias: Uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá: EDUFMT.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.