

## GRAFOS: UNA MISMA SITUACIÓN PARA LA CONSTRUCCIÓN DE DISTINTOS MODELOS EXTRAMATEMÁTICOS

Teresa Claudia Braicovich  
teresabraicovich@gmail.com  
Universidad Nacional del Comahue. Argentina.

Tema: Formación y actualización del Profesorado  
Modalidad: Taller  
Nivel educativo: Formación de docentes  
Tema: Teoría de grafos  
Palabras clave: eulerianos, hamiltonianos, árboles, coloreo.

### Resumen

*La teoría de grafos es una rama de la matemática que forma parte de la Matemática Discreta y es un tema que ha tenido un gran auge en las últimas décadas asociado, sobre todo, al desarrollo informático. En general se encuentra ausente en la enseñanza primaria, enseñanza secundaria e incluso en la formación del Profesorado en Matemática. A partir de numerosas investigaciones realizadas en el marco de distintos proyectos de investigación se concluye que sería positivo incluirlo en las currículas de distintos niveles educativos. Motivo por el que, en este taller se busca introducir a los asistentes, ya sean docentes en formación como en ejercicio, en la temática grafos. Para esto se partirá de una situación concreta, estaciones y recorridos en una red de subtes, a partir de la cual se propondrán actividades sobre recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, coloreo y árboles, que son las cuatro grandes motivaciones históricas de esta teoría. Luego de este trabajo se buscará que ellos formulen problemas cuya resolución pueda ser realizada utilizando los conceptos con anterioridad trabajados.*

### 1. Introducción

La matemática discreta es una rama de la matemática que se desarrolló rápidamente adquiriendo gran importancia durante las últimas cuatro décadas. El tema de matemática discreta con el cual se trabajaría en este taller es la teoría de grafos, los mismos tienen muchas aplicaciones a cuestiones de carácter práctico: emparejamientos, problemas de transporte, flujo en redes, programación, entre otros y además está presente en campos tan dispares como la economía, la psicología y la biología. Los avances recientes en la matemática y especialmente en sus aplicaciones la han impulsado en gran medida, siendo actualmente una rama de la matemática que se encuentra en pleno auge.

Por otro lado, puede establecerse que los grafos tienen un gran potencial educativo. A modo de síntesis, existen distintos argumentos para pensar que sería positivo introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los programas escolares. En el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997) se detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: En los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando distintos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: Para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: Existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: A aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina, también es apropiada porque les da la posibilidad de un nuevo comienzo.

## **2. Pertinencia de la propuesta: Modelos y Modelos Matemáticos.**

Dentro de las distintas acepciones del término *modelo*, tomaremos la idea de Aduriz Bravo, quién considera modelos no sólo de situaciones concretas, ni de construcciones teóricas, es una concepción amplia: *“Sin lugar a dudas, la concepción de Giere de un modelo es a la vez sencilla y potente; cualquier representación que permite pensar, hablar y actuar con rigor y profundidad sobre el sistema estudiado califica como modelo teórico: no solo los modelos altamente abstractos, sino también las maquetas, las imágenes, las tablas, las redes, las analogías...siempre que habiliten a describir, explicar, predecir e intervenir.* (Adúriz-Bravo, A. 2010).

Dentro de los modelos en términos generales consideramos los modelos matemáticos, también citaremos algunas concepciones:

- *"Desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas puesto que la actividad de modelización se considera como sinónimo de actividad matemática funcional en contraposición a la actividad matemática formal".* (Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J. 2010, p. 239).

- *"Es necesario destacar la existencia de diversas visiones vinculadas a la modelización matemática en el ámbito educativo. En general se entiende que la modelización vincula la matemática y el mundo real. Las aplicaciones de la matemática también manifiestan este vínculo. Sin embargo, la modelización se focaliza en la dirección que va de la realidad hacia la matemática, mientras que la aplicación se focaliza en la dirección opuesta".* (Villarreal, M.; Esteley, C. 2010).

- *"Un modelo matemático es una representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas"* (Mochón 2000, p. 19)

Se pueden diferenciar dos tipos de modelos matemáticos, los extra-matemáticos y los intra-matemáticos. Los modelos extra-matemáticos están relacionados con la modelización de situaciones no matemáticas, en cambio los intra-matemáticos si son modelizaciones de contenidos matemáticos.

Luego de varias investigaciones realizadas respecto a la introducción de algunos conceptos de grafos en distintos niveles educativos, pude concluir que *"El trabajo con grafos permite que los alumnos modelicen matemáticamente distintas situaciones de la vida real. la modelización es un proceso clave que, en general, está muy poco trabajado en el aula. Se pudo comprobar que los grafos permitieron modelizar matemáticamente muchas situaciones de la vida real, dando a la información una forma sencilla e incluso, muchas veces, intuitiva. esto quedó de manifiesto durante las distintas experiencias áulicas realizadas, cuando lograron modelizar las situaciones propuestas y cuando fueron capaces de proponer diferentes situaciones que podrían ser modelizadas utilizando grafos y grafos bipartitos en particular"* (Braicovich, T. 2005).

En este taller se busca que los asistentes trabajen con los grafos a modo de modelos extramatemáticos.

### **3. Desarrollo del taller**

#### **3.1. Contenidos a desarrollar**

A continuación se mencionan los temas con los cuáles se trabajará en el taller y se darán las definiciones que se consideren pertinentes:

Grafos Eulerianos: El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) escribió el primer artículo científico relativo a grafos, el que apareció en San Petersburgo, donde a partir de un problema concreto se hace la pregunta *¿en cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez?* Esta pregunta termina dando origen a los dos siguientes teoremas:

- *Un grafo conexo con todos sus vértices de grado par contiene un recorrido cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas. Todo grafo que admite tal recorrido es llamado euleriano.*
- *Un grafo conexo contiene un recorrido  $S_{ab}$  que pasa una sola vez por cada arista si y sólo si  $a$  y  $b$  son los únicos vértices de grado impar. Todo grafo que admite tal recorrido es llamado semieuleriano*

Grafos hamiltonianos: Son los grafos que admiten un recorrido que pase exactamente una vez por cada uno de los vértices del grafo, los mismos son llamados así en honor al físico-matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865), que fue uno de los primeros en estudiar el tema. Produjo un juego de ingenio llamado “la vuelta al mundo”, que consistía en buscar un recorrido especial sobre un dodecaedro regular construido en madera. Los vértices de dicho poliedro representaban ciudades importantes del planeta y las aristas eran conexiones entre ellas, el recorrido consistía en pasar exactamente una vez por cada una de las ciudades. Tales recorridos se llaman cerrados o abiertos, según se regrese o no al punto de partida, respectivamente.

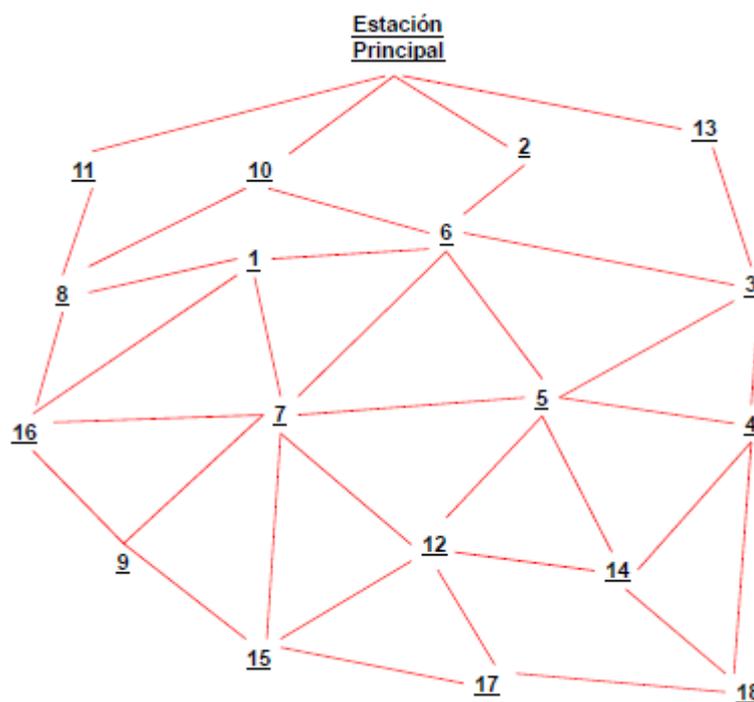
Árbol: son grafos conexos que no tienen ciclos. En todos los árboles de  $n$  vértices hay  $(n-1)$  aristas. Si el árbol tiene asignados valores en las aristas se dice que es un árbol valuado.

Coloreo de grafos: un grafo es coloreado de manera tal que a vértices adyacentes correspondan colores diferentes.

### 3.2. Presentación del problema

En un primer momento se les entregará el enunciado del siguiente problema:

El siguiente grafo representa una red de subtes, cada uno de los vértices es una estación, las aristas indican los tramos de recorrido entre ellas:



- a) ¿Es posible que un encargado de mantenimiento controle si la iluminación de todos los tramos está en buenas condiciones pasando exactamente una vez por cada uno de ellos?
- b) ¿Es posible que un inspector controle el funcionamiento de las cabinas automáticas de todas las estaciones sin repetir las y bajando cada vez que llegue a una estación y luego deje el informe en la estación de la que partió?
- c) Todas las vías deben ser refaccionadas, ¿cuál es la cantidad máxima de tramos que se podrán arreglar el fin de semana de manera que todas las estaciones queden comunicadas?

En el primer inciso se debe analizar la existencia de recorrido euleriano, al no aclarar si el encargado de mantenimiento debe terminar su recorrido en el mismo lugar del cuál partió el grafo puede ser euleriano o semieuleriano para responder afirmativamente a la pregunta.

En el siguiente inciso se debe buscar un recorrido hamiltoniano cerrado, ya que se pide que el inspector finalice en el punto de partida.

En el último es necesario hallar un árbol cubriente del grafo dado, para concluir que todas las aristas que no forman parte de dicho árbol pueden ser arregladas durante el fin de semana de manera que las estaciones queden todas comunicadas.

Se mostrarán algunas situaciones que puedan ser modelizadas y resueltas utilizando el concepto de coloreo, incluso alguno de los problemas pueden presentarse para la situación de la red de subtes.

### **3.3. Formulación y corrección de problemas**

Luego de analizado, trabajado y discutido el problema mencionado en el apartado anterior se buscará que los asistentes, en grupos, planteen una situación problemática que pueda ser resuelta utilizando los conceptos de grafos presentados.

Una vez que hayan presentado dichas situaciones cada uno de los grupos y se hayan realizado los planteos correspondientes, se compartirán algunos de los problemas propuestos por alumnos para la evaluación de un curso de grafos que dicté a estudiantes del profesorado durante este cuatrimestre. La idea de esta actividad es que entre todos analicemos si dichos problemas pueden ser modelizados y resueltos a partir del concepto de grafos que debe ser puesto en juego.

### **4. Reflexión**

La finalidad del dictado de este taller, por supuesto, es transferir algunos conceptos del tema grafos a docentes, tanto en formación como en ejercicio. Como el tiempo de

desarrollo del mismo no es demasiado extenso, se buscará generar en los asistentes la inquietud de investigar y estudiar el tema, por lo que se prepararon actividades que los motiven a continuar en esa dirección. Para que esto sea efectivamente provechoso se ofrecerá ayuda a futuro.

Como docentes, pienso, debemos estar siempre atentos a la posibilidad de innovar, es decir enseñar a nuestros alumnos temas nuevos, mostrarles una matemática distinta, concluyo citando a Paenza (2007, pág. 21), quién dice:

*“La mayoría de la gente piensa (con razón, porque éstos son los elementos con los que cuenta) que la matemática “está toda inventada” o que es algo “cuadrado” que uno va, estudia, y no aplica, salvo en contadísimas ocasiones (suma, resta, división y multiplicación incluidas)”. Sin embargo, no sólo no es así, sino que la matemática anda por la vida como la mayoría de las ciencias: sabiendo algunas cosas (pocas) e ignorando otras (muchas).... Se trata de una historia que quiero empezar así: “Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aún aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a los que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía hace ya cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan aburridas e inexplicables. Peor aún: de difícil aplicación”... Todo un detalle de lo que se trabaja en la actualidad...y en los últimos 2 ó 3 siglos.... ¿Quién dijo que se sabía “todo”? el solo hecho de que “aceptemos” esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la “matemática real”, la que investiga porque no sabe, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que mostrar, la que hay que sugerir. Y creo que ya es hora de empezar.”*

### **Referencias bibliográficas**

- Adúriz Bravo, A. (2010). *Hacia una didáctica de las ciencias experimentales basada en modelos*. II Congreso Internacional de Didácticas 2010.
- Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. *Investigación en Educación Matemática XIV* (p. 235-244) Lleida: SEIEM.
- Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz Higuera, L. (2006). La modelización matemática el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la TAD. *Educación Matemática*. Vol. 18. México: Santillana.
- Braicovich, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.
- Chiappa, R. (1989). Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos. *Revista de Educación Matemática*. Vol 1. Nº 4. Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.

- Foure, G. (1995) *A construação das ciências. Introdução a la Filosofia y a la Ética de las Ciencias*. San Pablo: Editorial UNESP.
- García, F. (2007) El álgebra como instrumento de modelización. *Investigación en Educación Matemática XI*. Universidad de Jaén. p. 71-90.
- Japiassu, H. y Marcondes, D. (1989). *Diccionario básico de Filosofía*. Río de Janeiro: Jorge Zahar Editor.
- Mochón, S. (2000) *Modelos matemáticos para todos los niveles*. México: Grupo Editorial Iberoamericana
- Paenza, A. (2007). “*Matemática...¿estás ahí? episodio 3*”. Siglo XXI. Editores Argentina. Buenos Aires.
- Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997). *Discrete Mathematics in the Schools. Dimacs. Volumen 36*. American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.
- Villarreal, M.; Esteley, C. (2010). *Modelización matemática como estrategia pedagógica. III Reunión Pampeana de Educación Matemática*.
- Wilson, R. (1979). *Introduction of Graph Theory*. Longman. New York.