PROMOVIENDO LA LECTURA DE TEXTOS MATEMÁTICOS

Cerizola, Patricia; Delgado, Richard, Lacués Apud, Eduardo; Vilar del Valle, Sara
pcerizol@ucu.edu.uy ; ridelgad@ucu.edu.uy ; elacues@ucu.edu.uy ;
sara.vilardelvalle@correo.ucu.edu.uy
Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT); Universidad Católica del Uruguay (UCU)

Tema: I.7 - Los procesos de Comunicación en el aula de Matemática y su impacto sobre el Aprendizaje del Alumnado.
Modalidad: Mini Curso (MC)
Nivel educativo: Secundario, Terciario
Palabras clave: Competencias de lectura de textos matemáticos, Comunicación en Matemática, Aprendizaje de Matemática, Sistemas Matemáticos de Símbolos.

Resumen

La competencia para la lectura de textos técnicos es central en el desarrollo de un aprendiz autónomo.
En el caso de Matemática, la lectura presenta una dificultad adicional que proviene del hecho que el texto está presentado a través de Sistemas Matemáticos de Símbolos, cuyo uso requiere de aprendizajes específicos.
Este minicurso aborda los siguientes objetivos:
1) Sensibilizar a los participantes acerca de la necesidad de contribuir al desarrollo de competencias de lectura de textos Matemáticos.
2) Analizar materiales elaborados especialmente para esta finalidad, explicando los criterios con los que fueron construidos.
3) Presentar ejemplos que muestran la posibilidad de adaptar textos de uso habitual para estimular la lectura de los estudiantes.
4) Mostrar cómo pueden incorporarse actividades de lectura en las prácticas de enseñanza usuales.
5) Discutir acerca de la evaluación de las competencias de lectura.

Organización del minicurso

Día1
1) Competencias de lectura que detectamos y que queremos estimular en nuestros estudiantes.
2) Ejemplos de materiales de lectura.
3) Trabajo en grupos.

Día 2
1) Un ejemplo de lectura tomado de un texto.
2) Trabajo en grupos.
3) Evaluación de competencias de lectura.
4) Cierre.

INTRODUCCIÓN

La preocupación acerca de las competencias de lectura de los estudiantes universitarios no ha hecho más que crecer en los últimos años, al divulgarse resultados de pruebas diagnósticas al ingreso de las universidades, como las difundidas por la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (Unidad de enseñanza, 2012, 2013).

A estos indicadores se suman otros, provenientes de asociaciones profesionales u organismos del Estado (TEMA DEL DÍA: FORMACIÓN UNIVERSITARIA, 2013)

En este contexto, ¿qué peculiaridades tiene la lectura de textos matemáticos? ¿Cuál es la relevancia de trabajar competencias de lectura de este tipo de textos?

En cuanto a la primera interrogante, no es posible soslayar que cualquier texto matemático está redactado usando Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS). Los SMS son sistemas que combinan una lengua vernácula con signos especiales, en los que se establecen reglas sintácticas que permiten, por un lado, reconocer las expresiones correctamente construidas en el sistema, y por otro, transformarlas. Además, esos signos refieren a entidades y las expresiones representan relaciones entre ellas, lo que constituye el aspecto semántico de los SMS.

Hay al menos dos posibles respuestas a la segunda cuestión.

Por un lado, una de las características de la Matemática es su función comunicacional, por lo que el desarrollo de competencias en esta área resulta crucial en la formación profesional.

Por otro lado, el propio trabajo interno a la disciplina requiere habilidades de uso de SMS entre las cuales se cuentan la lectura y la producción de textos.

Estos aspectos son algunos de los que presentan investigaciones como las de Österholm, (Österholm, M., 2005). En ésta se informa de dos resultados significativos para justificar adicionalmente la necesidad de enseñar a leer textos matemáticos. Por otro lado, Weist (Weist, L., 2003) se refiere a los usos de la lectura y la forma de evaluar habilidades de lectura.

La primera conclusión a la que nos referimos es que la experiencia realizada aporta evidencia en el sentido de señalar que la presencia de SMS en un texto es responsable del aumento de dificultad para aprender el contenido tratado.

La segunda, teniendo en cuenta la similitud de desempeño en las tareas propuestas que tuvieron estudiantes de la enseñanza secundaria superior y de la terciaria inicial, es que no hay motivo para suponer que se aprende a leer textos elaborados en torno a SMS simplemente como subproducto de otros aprendizajes, por lo que la enseñanza intencional parece un requisito para el desarrollo de estas competencias.

A continuación, exponemos las actividades a desarrollar en este minicurso. En los Anexos se presentan dos lecturas como ejemplo de los materiales que se usarán.

DESARROLLO DEL MINICURSO

Primera sesión

1) Reconocer la necesidad de la enseñanza de la lectura de textos matemáticos:
    a. Entrega de un texto a los participantes para lectura individual.
    b. Respuesta al siguiente cuestionario
        i. ¿Qué elementos destacaría como necesarios a tener en cuenta para entender el texto?
        ii. ¿Realiza en su práctica docente habitual actividades para destacar estos elementos?
    c. Entrega de un texto preparado para enseñar la lectura
        i. ¿Dónde identifica señales que ayuden a la lectura?
        ii. ¿Cuáles agregaría y cuáles quitaría?
    d. Una demostración práctica de uso de la estrategia.
2) Trabajo con materiales de lectura
    a. Un ejemplo tomado de un libro de texto.
    b. Trabajo en grupo: Generación de un texto de a lo sumo dos carillas.
    c. Cierre
        i. Resumen
        ii. Traer un texto de los usuales para la siguiente sesión.
3) Ejemplo de implementación de una tarea de lectura.
    a. La tarea de lectura se realiza fuera del minicurso.
    b. Los participantes realizan una lectura que se encontrará en un recurso informático (blog o moodle)

Segunda sesión

4) Retomando el final de la primera sesión.
    a. Comentarios sobre la lectura y sobre la participación en el foro.
5) Adaptación de materiales de lectura
    a. Trabajo en grupo
        i. Selección de un fragmento de alguno de los textos aportados por los participantes.
        ii. Generación de una guía de lectura de ese texto.
6) Cuándo y cómo enseñamos a leer

a. Una descripción de Just in Time Teaching.
b. Relato de las experiencias desarrolladas.

7) Pensando en cómo evaluar competencias de lectura

Referencias bibliográficas

Unidad de Enseñanza, Facultad de Ingeniería (FING), Universidad de la República (UDELAR). (2012) *Informe Herramienta Diagnóstica al Ingreso Generación 2011*. Montevideo.

Unidad de Enseñanza, Facultad de Ingeniería (FING), Universidad de la República (UDELAR). (2013) *Informe Herramienta Diagnóstica al Ingreso Generación 2012*. Montevideo.

Lacués, E., Peña, J. (2006) *La lectura de textos matemáticos como tarea para promover la inserción del estudiante en el medio universitario*. Actas de la V EMCI Internacional, ISBN: 978-950-766-050-4

Lacués, E., Vilar del Valle, S. (2012) Una experiencia preliminar de enseñanza de Álgebra Lineal usando la estrategia “Just in Time Teaching”, Actas de la XVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática, SOCHIEM.

Österholm, M., (2005) *Characterizing reading comprehension of Mathematical texts*. Educational Studies in Mathematics 63: 325–346 doi: 10.1007/s10649-005-9016-y.

TEMA DEL DÍA: FORMACIÓN UNIVERSITARIA (2013, 8 de junio). El Observador, pág. 2-6.

Weist,L. (2003) Comprehension of Mathematical Text. PHILOSOPHY OF MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL 17. Obtenido el 08 de julio de2013, desde http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome17/pdf/lwiest.pdf

ANEXO I

Teorema de las raíces conjugadas

Sugerencias para la lectura:

1) Haga una lectura inicial del documento, señalando los conceptos involucrados que se utilizan en el desarrollo del mismo.
2) Asegúrese de que comprende el significado de todos estos conceptos. En caso de existir conceptos que no comprende, busque definiciones y ejemplos que le posibiliten comprenderlos.
3) Haga una lectura detenida del documento, analizando cada afirmación que se hace en el mismo: analice si se conoce o no las propiedades en las que se fundamentan las aseveraciones.
4) Señale aquellas afirmaciones que no comprende adecuadamente o de las que no conoce las propiedades que permiten asegurar su verdad.

Teorema de las raíces conjugadas

Sea $P(z) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio de coeficientes reales. Entonces si z_0 es raíz de P(x) , entonces $\overline{z_0}$ también lo es.

Dem:

Se debe probar que $P(\overline{z_0}) = 0$

$$\begin{aligned} P(\overline{z_0}) &= a_n(\overline{z_0})^n + a_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + \cdots + a_1(\overline{z_0}) + a_0 \\ &= a_n\,\overline{z_0{}^n} + a_{n-1}\,\overline{z_0{}^{n-1}} + \cdots + a_1\,\overline{z_0} + a_0 \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z_0{}^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0{}^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z_0{}^n + a_{n-1} z_0{}^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la propiedad.

Explicite qué propiedad de los complejos conjugados permite escribir cada una de las igualdades anteriores.

Consecuencia

Si $z_0 = a+bi$ (donde b no es nulo) es raíz de un polinomio $P(z)$ de coeficientes reales, entonces éste es divisible entre $D(z)=z^2-2az+a^2+b^2$.

Dem: si el polinomio tiene coeficientes reales y raíz $z_0=a+bi$, entonces también tiene raíz $a-bi$ y por lo tanto es divisible entre $(z-a-bi)(z-a+bi)$ que desarrollado es $D(z)$.

Para trabajar en el foro:

1) En la hipótesis de la propiedad trabajada figura que los coeficientes del polinomio mencionado en la misma son números reales. ¿Sería válida la

propiedad si los coeficientes no fueran todos reales? Proponga una demostración o un contraejemplo.

2) En caso de que la respuesta a lo planteado en (1) sea negativa, ¿cuál de las igualdades escritas no sería válida?

ANEXO 2

Teorema de Rouché-Frobenius

Lea con detenimiento el teorema que se da a continuación.

Considere un sistema de ecuaciones lineales **A**.**X**=**B**, donde **A** es una matriz nxp.

Entonces:

a) El sistema es compatible si y sólo si el rango de **A** es igual al rango de (**A**|**B**).

b) En caso de que el sistema sea compatible, resulta que es determinado si y sólo si el rango de **A** es igual a p.

c) En caso de que el sistema sea compatible pero no determinado, tiene un número de grados de libertad igual a la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz del sistema.

Una vez completada la lectura, trate de realizar las siguientes tareas:

1) Exprese el enunciado de a) en términos verbales.

2) En no más de seis renglones, explique por qué el párrafo en cursiva que se da a continuación expresa un enunciado cierto, justificándolo a partir de las partes a) y b).

> *Un sistema es compatible determinado si y sólo si el rango de la matriz del sistema, el rango de la matriz ampliada del sistema y el número de incógnitas son iguales.*

3) Efectúe una lista de las definiciones y notaciones que a su juicio se necesitan para comprender el enunciado.

4) Una vez confeccionada la lista compárela con la que se da al final de este documento. Indique algún elemento de la lista dada que usted no incluyó en la suya o alguno que usted crea que es necesario incluir en la lista dada.

EJEMPLO 1

Considere el sistema
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & x_4 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & b \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & c \\ 2x_1 & & & & & + & 2x_4 & = & d \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_2 & = & e \end{array}$$
donde a, b, c, d y e representan número reales cualesquiera y se llaman parámetros del sistema.

La matriz ampliada del sistema es $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 2 & 0 & 0 & 2 & d \\ 1 & 1 & 1 & 3 & e \end{array}\right)$.

Mediante operaciones por filas puede llevarse esta matriz a

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2a-b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a+c+e \end{array}\right).$$

De aquí puede deducirse que el rango de la matriz del sistema es 3 y por lo tanto el sistema, en caso de que sea compatible, será indeterminado, con un grado de libertad.

(Explique por qué ocurre esto)

Siguiendo en este caso, inspeccionando la matriz **C**, podría elegirse arbitrariamente x_4, y con el valor elegido determinar x_1 y x_3; sin embargo, el valor de x_2 está determinado independientemente del que se elija para x_4.

(Dé fórmulas para x_1 y x_3 *que dependan de* x_4 *y de los parámetros del sistema; vea por qué el valor de* x_2 *es independiente del de* x_4*)*

-2a+d=0

Si ocurre que -2a+d = 0 y -2a+c+e = 0, entonces efectivamente se está en el caso de un sistema compatible. Si, en cambio, resultara que -2a+d ≠ 0 o -2a+c+e ≠ 0, entonces el sistema es incompatible.

(Explique por qué ocurre lo afirmado)

PARA DEBATIR

En el texto se decidió elegir x_4 y en función de esta incógnita expresar los valores de las restante.

¿Es posible elegir alguna de las otras incógnitas para dar la solución? En caso afirmativo, ¿cualquiera de las otras sirve para este fin?

¿Qué cambios quedarían establecidos en la forma de expresar la solución?

LISTA SUGERIDA DE DEFINICIONES O NOTACIONES NECESARIAS PARA LA LECTURA

En esta lectura necesitará tener claras, las definiciones y notaciones siguientes:

a) Rango de una matriz.

b) Matriz de un sistema de ecuaciones lineales.

c) Matriz de incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales.

d) Matriz de términos independientes de un sistema de ecuaciones lineales.

e) Matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.

f) $\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_{1n} & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \ldots & + & a_{pn}x_1 & = & b_p \end{array}$ sistema de ecuaciones lineales.

g) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}$ matriz del sistema dado en e).

h) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ matriz de las incógnitas del sistema dado en e).

i) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ matriz de los términos independientes del sistema dado en e).

j) **A**.**X**=**B** expresión matricial del sistema dado en e)

k) $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} & b_p \end{pmatrix}$ matriz ampliada del sistema del sistema dado en e).

ANEXO III

Definición de independencia lineal

Definición 1

Sea A={ v_1, v_2,…, v_n } un subconjunto de un espacio vectorial V sobre el campo F. Decimos que A es linealmente independiente (LI) si y sólo si dados α_1, α_2,…, α_n en F tales que $\alpha_1.v_1+ \alpha_2.v_2+\ldots+ \alpha_n.v_n=o$ resulta $\alpha_1= \alpha_2 = \ldots = \alpha_n=0$. A se llama linealmente dependiente (LD) si y sólo si A no es LI.

Comentarios

1) Esta definición suele parafrasearse diciendo que A es LI si y solo si cualquier combinación lineal de vectores de A que dé como resultado el vector nulo debe ser la combinación lineal trivial.

2) Es claro que si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ resulta $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n = o$. Por lo tanto, en la aplicación de la definición, importa sólo probar el recíproco:

$\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n = o$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Ejemplo 1

Averigüe si el conjunto A={(1,1,0), (0,1,1), (-1,0,1)} es LI.

Desarrollo

En primer lugar, en relación con la Definición 1, n=3

(¿por qué? ¿tiene eso que ver con que A es un subconjunto de $\boldsymbol{R}^3$*)*

y podemos escribir $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,1,1)$ y $v_3=(-1,0,1)$, por lo que la combinación lineal queda $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \alpha_3.v_3 = (\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)$

(efectúe estos cálculos)

Así que la pregunta responder es ¿$(\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

Esta pregunta se traduce en ¿ $\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & & - & \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = 0 \end{array}$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{13} = 0$?

Teniendo en cuenta que el sistema de ecuaciones considerado es homogéneo, la pregunta se traduce en averiguar si el sistema dado es determinado. Resulta que no lo es, por lo que el conjunto A no es LI.

(verifique que este sistema es indeterminado)

Ejemplo 2

Averigüe si el conjunto A={M, N, P } donde $M(x)=x^2+x$, $N(x)=x+1$ y $P(x)=-x^2+1$ es LI.

Desarrollo

En primer lugar, en relación con la Definición 1, n=3 y podemos escribir $v_1=M$, $v_2=N$ y $v_3=P$,

(vea cuál es el espacio vectorial V en este caso)

por lo que la combinación lineal queda $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \alpha_3.v_3 = Q$ donde el polinomio Q viene dado por $Q(x) = (\alpha_1 - \alpha_3).x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2).x + (\alpha_2 + \alpha_3)$

(efectúe estos cálculos)

Así que la pregunta responder es ¿$Q(x) = (\alpha_1 - \alpha_3).x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2).x + (\alpha_2 + \alpha_3) \equiv 0$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$? La condición para que Q sea el polinomio idénticamente nulo es que todos sus coeficientes sean cero, lo que conduce al mismo sistema de ecuaciones que en el ejemplo 1.

Comentarios

Aun cuando en los dos ejemplos anteriores la respuesta se obtuvo a partir del mismo sistema de ecuaciones, los procesos por los cuales se llegó a este sistema fueron diferentes, basados principalmente en la naturaleza del espacio vectorial en el que se está trabajando, lo que establece significados específicos a la noción de combinación lineal, vector nulo, campo de escalares y otros elementos.

Es esencial tener en cuenta estos aspectos en el uso de la definición.

A continuación se amplía la Definición 1.

Definición 2

Sea A un subconjunto de un espacio vectorial V sobre el campo F. Decimos que A es linealmente independiente (LI) si y sólo si dados $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en A y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ en F tales que $\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \ldots + \alpha_n.v_n = o$ resulta $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. A se llama linealmente dependiente (LD) si y sólo si A no es LI.

Comentarios

Note que la diferencia, aparentemente sutil, es que no se está pidiendo que los vectores implicados en la combinación lineal sean todos los vectores del conjunto A (es más, se está permitiendo en esta definición que A sea un conjunto infinito)

Pero esta diferencia es crucial, porque implica que para averiguar si un conjunto es LI, se debe considerar cualquier subconjunto finito suyo, y para cada uno, verificar que es LI.

Tema a debatir

En el caso en que A sea un conjunto finito, es decir, $A=\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, ¿alcanza con llevar adelante el procedimiento de los ejemplos 1 y 2 para verificar que el conjunto es LI? Es decir, en lugar de considerar todos los subconjuntos de A y aplicar a cada uno la definición 2, ¿es suficiente estudiar qué pasa con los escalares cuando se toman todos los vectores de A en la combinación lineal?