SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SÍMBOLOS Y SU ROL EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA

Lacués Apud, Eduardo Mario
elacues@ucu.edu.uy;
Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT); Universidad Católica del Uruguay (UCU)

Tema: I.7 - Los procesos de Comunicación en el aula de Matemática y su impacto sobre el Aprendizaje del Alumnado.
Modalidad: Conferencia
Nivel educativo:
Palabras clave: Sistemas Matemáticos de Símbolos, Enseñanza de la Matemática, Aprendizaje de la Matemática

Resumen

Los Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS) aparecen de manera ineludible en el desarrollo disciplinar, en el aprendizaje y en la enseñanza de Matemática, porque constituyen el marco en el que se representan los conceptos y el medio con el que se lleva a cabo la comunicación en el ámbito matemático.

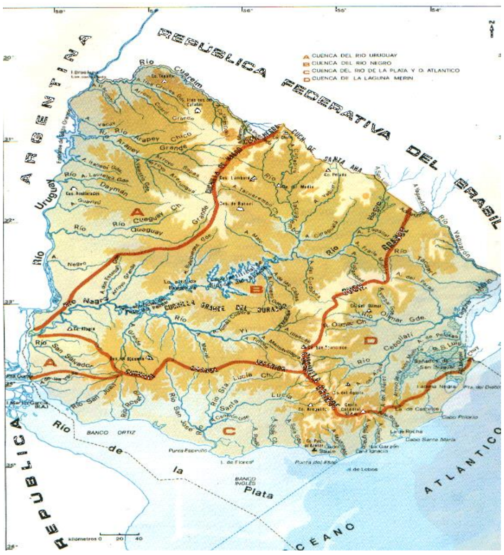
Pueden ser mirados tanto desde el punto de vista psicológico (como sistemas externos de representación) como didáctico (como objetos tanto de enseñanza como de aprendizaje)

Sin embargo, su presencia frecuentemente pasa inadvertida: en la medida que los profesores no diseñan actividades para enseñar su uso, los estudiantes no lo perciben como un contenido a aprender.

Esta presentación tiene la finalidad de llamar la atención sobre la necesidad de pensar en los SMS como un elemento presente en la actividad matemática cotidiana. Pretende no solamente brindar un panorama del trayecto histórico de estas ideas, sino además enfatizar la relevancia que el uso competente de los SMS tiene para contribuir a la formación de aprendices autónomos, y relatar resultados de investigaciones que permiten obtener conclusiones a partir de las cuales orientar la enseñanza de temas de Álgebra Lineal, Cálculo o Lógica.

1.1 Introducción

En los libros de Geografía en los que estudié en la escuela, solíamos ver un mapa como



el que acompaña a este texto. Leíamos que la frontera de Uruguay con Argentina la conformaban el río Uruguay (y el Río de la Plata, en el que aquel desembocaba), que tenía una longitud de 1500 km aproximadamente, de los cuales sólo los últimos 500 correspondían al límite entre ambos países.

Traigo esta anécdota como comienzo de esta exposición, porque en el párrafo anterior podemos ver los elementos constituyentes de un Sistema Matemático de Símbolos: hay un texto, una gráfica (un mapa), una tabla numérica (disimulada en el texto); la comprensión de la información presentada requiere, por un lado, de procesos de lectura en cada uno de estos registros y, por otro, de traducción entre ellos que permitan establecer las concordancias entre las entidades representadas y detectar las eventuales contradicciones.

Quiero ampliar la anécdota: al mirar el mapa, me parecía que no era coherente la afirmación del texto en relación con cuál era la longitud de la frontera con Argentina (sólo mucho tiempo después descubrí que era cierta, al ver en un mapa de América del Sur la extensión del Río Uruguay). En efecto, 500 es la mitad de 1000, y en el mapa la parte representada del río que no integra la frontera es más o menos la mitad de la del borde, así que mi conclusión fue “el texto está equivocado”. Recuerdo claramente no haber cuestionado si no podría ocurrir que en el mapa hubiera errores. Volveré luego sobre esto.

Cada vez que enseñamos Matemática, cada vez que aprendemos Matemática, lo hacemos con los SMS como mediadores, y de manera tan inadvertida que no se nos ocurre integrar a nuestra prácticas de enseñanza actividades para favorecer el aprendizaje de sus usos. Lo que voy a exponer a continuación tiene que ver con esto.

1.2 Los SMS como sistema externos de representación

Una forma de ver los SMS es como una clase especial de sistemas externos de representación.

Esta perspectiva se origina a fines de los años 80 en autores como Stephen Palmer (1978), y ha sido retomada por otros como James Kaput (1987), Raymond Duval (1998) o Bruce Sherin y Victor Lee (2005).

En esta mirada, se asume la existencia de dos mundos, uno representado y otro representante, y un sistema de operaciones que permite responder a las siguientes cuestiones:

a) Cuál es el mundo representado.

b) Cuál es el mundo representante.

c) Cuál aspectos del mundo representado van a ser modelados.

d) Cuál aspectos del mundo representante constituyen el modelo.

e) Cuáles son las correspondencias entre los dos mundos.

En este sentido, Kaput (1987) define a los SMS proponiendo que consisten en terna, constituida por:

a) un esquema de símbolos, es decir, una colección realizable concretamente de caracteres, junto con reglas más o menos explícitas para identificarlos y combinarlos;

b) un campo de referencia;

c) una ley que establece una correspondencia entre los dos anteriores.

Como peculiaridad de los SMS, destaca tanto el mundo representado como el representante son sistemas de símbolos.

Esta precisión no es para nada casual, porque sirve de base para pensar en que las cuestiones semánticas y sintácticas asociadas con los SMS guardan una relación de simetría como desarrollaré más adelante.

En una forma que guarda semejanzas muy profundas con la visión de Kaput, Duval (1998) desarrolla su teoría de los Registros Semióticos de Representación. Indica que para que un sistema semiótico sea un registro de representación debe permitir realizar tres operaciones:

a) la formación de una representación identificable (texto, gráfica, expresión algebraica, entre otros)

b) el tratamiento (transformación de una expresión en otra dentro del mismo registro)

c) la conversión (transformación de una expresión situada en un registro, en otra, de un registro diferente).

Para finalizar esta sección, vale la pena dar una mirada desde la Psicología Cognitiva. En esta perspectiva, Martí y Pozo (2000) destacan, al estudiar los procesos de adquisición de sistemas de representación externa, cuatro aspectos de los sistemas externos de representación:

a) Existen en forma independiente de quienes los hayan construido o creado.

b) Permanecen en el tiempo, porque son marcas hechas sobre algún soporte material.

c) Están desplegados en el espacio, en consonancia con su carácter material, no en el tiempo, a diferencia del lenguaje hablado o gestual.

c) Constituyen estructuras organizadas consensuadamente, en el seno de las comunidades que las utilizan.

1.3 Sistemas Matemáticos de Símbolos en el desarrollo de la Matemática

El desarrollo histórico de la Matemática va de la mano con SMS. Es imposible resumir este proceso de siglos, pero voy a mencionar tres hitos.

El primero es el trabajo de Diofanto, que algunos autores (Kieran, 1992, Kline, 1994) señalan como comienzo del Álgebra, inaugurando una época en la que se abandona la práctica anterior carente de todo tipo de formalismo. Los trabajos de Diofanto, llegados a Europa alrededor de los siglos XIII a XV a través de los matemáticos árabes, son el punto de partida de los desarrollos generales sobre la solución de ecuaciones.

Aunque menos conocido por su relación con este tema, el segundo hito lo constituye Leibnitz. En su desarrollo del Cálculo, Leibnitz se caracterizó por inventar notaciones con la característica de ser evocadoras de los procesos que representaban (la más difundida es $^{dy}/_{dx}$ para denotar la derivada, como un cociente de incrementos infinitesimales) Al referirse a esta aspecto de su producción, Kaput ha dicho que la suya es *“la historia del desarrollo de la notación en concierto con el desarrollo de conceptos”*.

Finalmente, en el siglo XX, los trabajos de Hilbert (fundador de la escuela formalista) y sus debates con Brouwer (intuicionismo) y Russel (logicismo) han terminado de situar a la Matemática como una ciencia formal. Hilbert ha afirmado que “...son los signos mismos los objetos de la teoría. Entendemos aquí por signo algo que es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce...” (Hilbert, 1993)

1.4 Los SMS como objetos de aprendizaje

Asociados con el uso de los SMS pueden señalarse al menos dos procesos cognitivos:

a) Lectura o codificación de la información.

b) Producción de nueva información

> i) Sintáctica, a partir de las reglas de transformación internas en el sistema.
>
> ii) Semántica, a partir de las interpretaciones que una cierta configuración simbólica tiene en el mundo representado.

Las relaciones entre los diferentes mundos representados sirven a Kaput para dar una nueva visión de la relación entre sintaxis y semántica. Para él, la sintaxis en un sistema de representación consiste en el conjunto de reglas que permiten transformaciones válidas en este sistema, en tanto que la semántica se define en relación con otro sistema de representación y está conformada por la colección de correspondencias entre estos dos sistemas. De esta forma, la relación entre dos mundos representantes se vuelve casi simétrica: lo que es sintaxis en uno de ellos es semántica en el otro.

Este marco permite analizar la noción de construcción del sentido en Matemática, situando la respuesta a la pregunta ¿qué significa saber Matemática? más allá de la simple capacidad de ejecutar algoritmos de cálculo y asociándola con la posibilidad de disponer simultáneamente de diferentes representaciones del objeto matemático.

La preocupación de Leibnitz sobre la notaciones ha sido destacada como una de las características que ayudan al aprendizaje de Matemática. En efecto, Romberg (1991) afirma:

> "(…) el poder de la Matemática reside realmente en que un pequeño número de símbolos y de afirmaciones simbólicas pueden ser utilizadas para representar un conjunto amplio de situaciones problema distintas. La identificación y la utilización de los símbolos puede organizarse en ámbitos como los enunciados simbólicos que caracterizan el ámbito, las tareas implicadas que deben llevarse a cabo, las reglas que deben seguirse para representar, transformar y realizar los procedimientos y el conjunto de situaciones que generalmente se han utilizado para crear los símbolos, las relaciones entre los mismos y las reglas significativas"(pág. 374).

Algunas dificultades asociadas con el aprendizaje de los SMS se refieren en la siguiente tabla:

Algunas características problemáticas de los SMS	
El mismo signo representa entidades diferentes	0 y 1 representan, respectivamente: a) los enteros cero y uno, b) el neutro de la suma y del producto en un campo, c) el neutro de la suma y del producto en un álgebra de Boole. (a,b) representa: a) un intervalo abierto en el conjunto de los números reales (**R**), b) un par ordenado, c) las coordenadas de un punto en el plano, d) un vector en el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.
Símbolos diferentes representan la misma entidad.	(a,b) representa el conjunto $\{x \in \mathbf{R} \ / \ a<x<b\}$. $(f \circ g)\ (x)$ y $f(g(x))$ representan la imagen de x por medio de la función compuesta $f \circ g$.
El mismo símbolo en una misma formulación tiene significados contextuales diferentes.	El primer par de paréntesis en $(f \circ g)(x)$ indica el resultado de una operación entre funciones (la composición) en tanto el segundo par señala que se está calculando la imagen de un elemento por medio de la composición indicada.

	La x en el denominador de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ indica que la variable respecto a la cual se deriva parcialmente es la primera, en tanto la x dentro del paréntesis señala la primera coordenada del punto donde se calcula esta derivada s
La verbalización de una formulación puede ser engorrosa	La fórmula para las raíces de la ecuación de segundo grado, $ax^2+bx+c=0$ es $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que se lee: “las soluciones son el cociente entre el doble del coeficiente del término de segundo grado, de la suma o la resta del opuesto del coeficiente del término de primer grado con la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de este coeficiente y el cuádruplo del producto del coeficiente de término de segundo grado con el término independiente”.
La lectura de ciertas formulaciones requiere de procesos de búsqueda hacia izquierda y derecha.	$\frac{(x+1)x}{2+x^2}(x+3)$ $\lim_{x\to a} f(x)=b$

Tabla 1

1.5 Tres experimentos

En el ámbito de la educación universitaria inicial he desarrollado tres investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de SMS, que voy a resumir a continuación.

La primera se denomina “Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo”.

Consistió en dos etapas, la primera de ellas destinada a evaluar dos diferentes intervenciones didácticas para enseñar el uso de SMS en Álgebra Lineal.

A partir de los resultados obtenidos, se diseñó la segunda etapa, estudiando no sólo el aprendizaje del uso de SMS en Álgebra, sino además la transferencia de estas habilidades al trabajo en Cálculo.

Como conclusiones principales de esta experiencia, resulta que los estudiantes que en el diagnóstico al ingreso a la universidad obtienen un rendimiento aceptable pueden aprovecharse de la enseñanza para mejorar en sus habilidades en el uso de los SMS y consiguen transferir esta habilidad a otros ámbitos diferentes de dónde las desarrollaron. En cambio, para los alumnos de bajo rendimiento en el diagnóstico, las intervenciones diseñadas no significan ninguna ventaja para sus aprendizajes, lo que destaca la necesidad de implementar trayectos diferenciados en los primeros años de la eduación superior.

El nombre del segundo experimento es “Proposiciones condicionales y sistemas matemáticos de símbolos en el aprendizaje del límite matemático”.
En esta experiencia se intentó asociar el grado de dificultad en ciertas tareas al registro de representación en el que estaba presentada. Las tareas se eligieron entre las que son habituales en la enseñanza de la definición de límite de una función en un punto, en particular, asociadas con la estructura condicional.

Se pudo constatar que en el registro gráfico las tareas resultaron más sencillas que en el algebraico (quiero recordar que yo creí que el mapa era correcto y el texto equivocado) Además, las tareas asociadas con la condición suficiente resultaron más difíciles que las de condición necesaria.

Esto nos conduce a considerar que en nuestras prácticas deberíamos privilegiar el manejo de registros gráficos, y enfatizar en los procesos de traducción a otros registros, sin limitarnos a trabajar en un único SMS.

La tercera investigación ha consistido en realizar el “Análisis Preliminar para una Ingeniería Didáctica sobre la Enseñanza del Condicional”.

De ella resulta que la noción de que una sentencia condicional es cierta cuando el antecedente es falso no es reconocida por los estudiantes. Esta cuestión desempeña un rol importante en la construcción de muchos conceptos matemáticos (por ejemplo, el de conjunto vacío)

Por otro lado, resulta que un curso de Lógica contribuye a que los estudiantes superen este error, pero no se nota mejora en quienes están expuestos a la enseñanza de otros cursos (por ejemplo Cálculo).

Una pregunta, entonces, en cuya respuesta vale la pena profundizar es si no debería incluirse en el currículo universitario inicial el estudio de Lógica.

1.6 Reflexiones finales

La primera cuestión que quisiera plantear en este cierre es el de la necesidad de incorporar en nuestras prácticas la enseñanza de los SMS. Teniendo en cuenta que son los mediadores de la actividad matemática, no podemos limitarnos a esperar que nuestros estudiantes adquieran pericia en su uso simplemente por verse expuestos a su uso.

Asociada con esta primera cuestión está la segunda, que es seguir investigando acerca de cuáles son las mejores maneras que tenemos para enseñar el uso de SMS. Necesitamos saber más acerca de cómo nuestros estudiantes usan los SMS cuanto están llevando adelante algoritmos, cuando están resolviendo problemas, cuando están dándole vueltas a conceptos complicados de aprehender.

Las dos cuestiones anteriores forman parte de una mayor, con la que concluyo: debemos hacer más profesional nuestra práctica, informándola de los resultados de las investigaciones y a partir de conceptualizaciones teóricas. Eso se lo debemos a nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1998) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en Hitt, F. (ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, México,Grupo Editorial Iberoamérica, p. 173-201.

Hilbert, D. (1993) Fundamentos de la Matemática, Colección Mathema, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México.

Kaput, J. (1987) Towards a Theory of Symbol use in Mathematics, en Janvier, C. (ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p.159-195.

Kieran, C. (1992) The learning and teaching of school algebra, en Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Kline, M. (1994) El Pensamiento Matemático de la antigüedad a nuestros días, Madrid, Alianza Editorial

Lacués, E. (2010) Enseñanza y aprendizaje de los Sistemas Matemáticos de Símbolos, *DIDAC*, México, nº 56-57, p. 30-36. Disponible en http://www.uia.mx/web/files/didac/56-57.pdf

Martí, E., Pozo, I. (2000) Más allá de las representaciones mentales, la adquisición de sistemas externos de representación**,** *Infancia y aprendizaje*, nº 90, p.11-30.

Palmer, S. (1977). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.), Cognition and categorization. Hillsdale, NJ: Erlbaum. Vol. 259-303, pp. 259-303.

Romberg, T. (1991) Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*, 294, 323-406.

Sherin, B.; Lee, V. On the interpretation of scientific representations, In Annual Meeting of the American Educational Research Association, 2005, Montreal.