CONJECTURAS SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

José Querginaldo Bezerra
quergi@ccet.ufrn.br
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Tema: Pensamento geométrico
Modalidade: Comunicação breve
Nível educativo: Formação e atualização docente
Palavras-chave: Visualização. Figura. Pitágoras

Resumo

O Teorema de Pitágoras é, sem dúvida, um dos resultados mais importantes da matemática, quer pela sua simplicidade e beleza, quer por suas inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento. Por essas razões sua exploração em sala de aula sempre desperta interesse e motivação, criando um ambiente favorável para o processo ensino-aprendizagem. Nosso objetivo nessa comunicação não é apresentar nem discutir as várias demonstrações do Teorema de Pitágoras, mas, fazer conjecturas sobre possíveis percepções de Pitágoras para chegar a sua extraordinária descoberta. O fato que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo isóscele é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre seus catetos já era conhecido bem antes de sua divulgação pela escola de Pitágoras, embora não se conheça demonstrações ou provas desse resultado. Nesse trabalho conjecturamos que algumas sequências de figuras geométricas, por uma simples visualização "cuidadosa", pode ter levado a conclusão desse caso particular do Teorema de Pitágoras. Por último, apresentamos uma demonstração geométrica do caso geral do Teorema de Pitágoras, de nossa autoria, utilizando a demonstração do caso particular, que pode ter sido a prova dos Pitagóricos.

.

O teorema de pitágoras

Teorema de Pitágoras – Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Assim, se num triângulo retângulo ABC (Fig.1) a hipotenusa mede *a* e os catetos medem *b* e *c*, vale a igualdade, $a^2 = b^2 + c^2$.

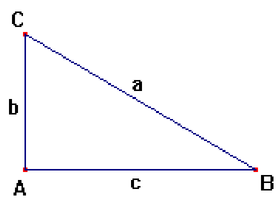

Fig.1

Em termos de áreas, como é apresentado na proposição 47 dos *Elementos*, o Teorema de

Pitágoras tem uma representação geométrica equivalente a sua expressão algébrica muito interessante e elucidativa, como ilustra a figura 2 abaixo.

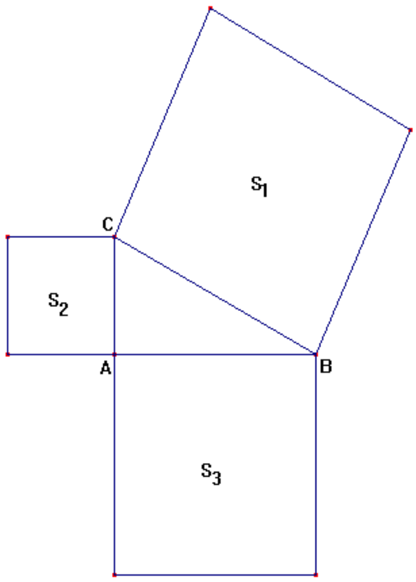

Fig.2

$S_1 = S_2 + S_3$, onde S_1, S_2 e S_3 são as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC.

No livro *The Pythagorean Proposition*, Loomis (1940), existem mais de 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras, umas algébricas, outras geométricas e até com outras argumentações.

Começamos nossos questionamentos pelo caso particular, ou seja, quando o triângulo retângulo é isósceles. Na nossa compreensão, a figura 3 a seguir, ou outra equivalente, pode perfeitamente ter convencido os antecessores de Pitágoras da veracidade da expressão $a^2 = b^2 + b^2$.

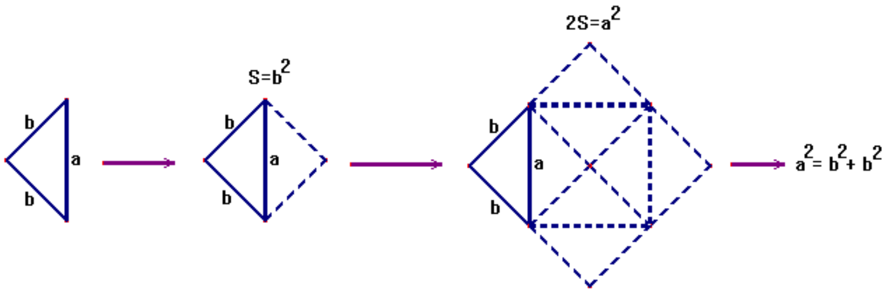

Fig.3

Uma alternativa equivalente seria a figura 4, a seguir:

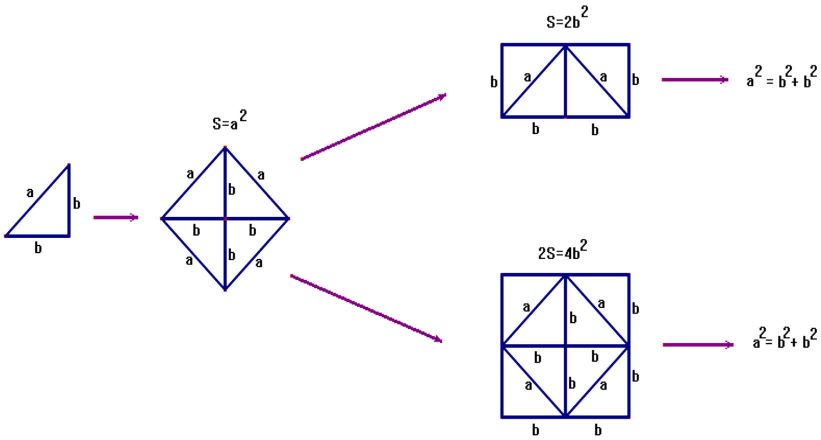

Fig.4

Outra possibilidade seria a sequência exibida na figura 5, a seguir:

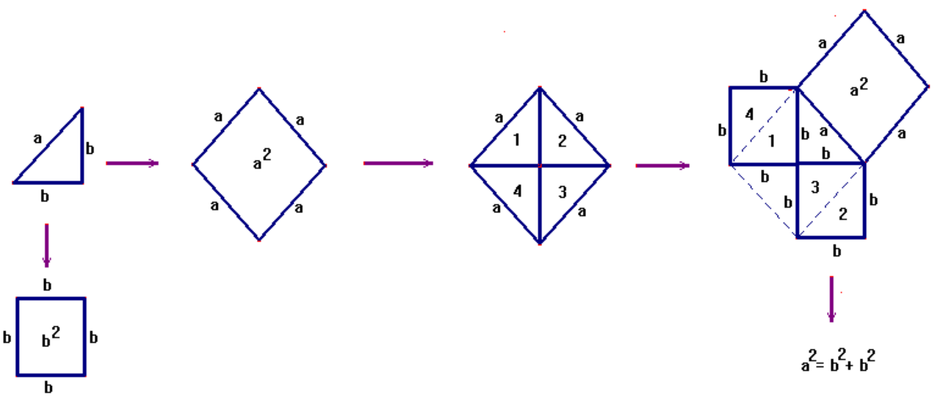

Fig.5

Como afirmamos no resumo, uma observação cuidadosa dessas figuras pode levar uma pessoa que faz uma leitura visual criteriosa a perceber as relações entre as partes de cada figura, chegando à conclusão desejada. *Essa é nossa primeira conjectura!* Essa conjectura é fundamentada em trabalhos de historiadores da cultura matemática, como Paulus Gerdes [02], que mostra a possibilidade de se “perceber” esse resultado em padrões e decorações de artesões africanos, por exemplo.

Hoje se perceberia, com certa facilidade, que a terceira parte da figura 3 ou a parte inferior da figura 4 podem ser visualizadas olhando para uma mesa quadrada coberta com uma toalha quadrada, como ilustra a figura 6 a seguir:

www.americanas.com.br/

Fig.6

Da mesma forma, a parte superior da figura 4 pode ser obtida manipulando as peças do TANGRAM, como mostra a figura 7 a seguir:

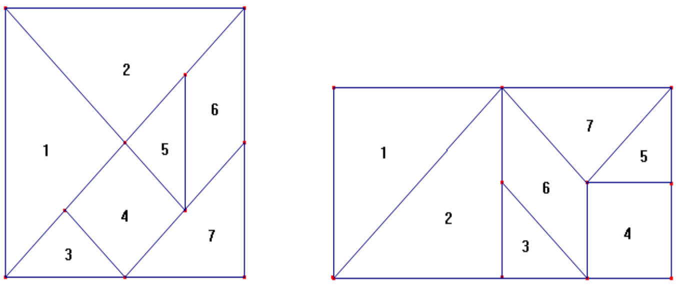

Fig.7

Nos *Elementos*, Euclides apresenta uma demonstração para um triângulo retângulo qualquer, cuja argumentação usa apenas fatos básicos sobre áreas de triângulos e paralelogramos, dividindo o quadrado da hipotenusa em dois retângulos com metade das áreas iguais à metade das áreas dos quadrados de cada cateto, como sugere a figura 8 desse texto.

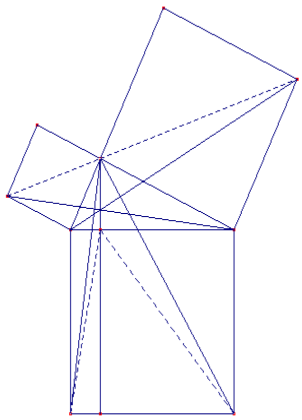

Fig.8

A demonstração seguinte, usando praticamente a mesma figura e semelhança de triângulos, não seria mais simples? Euclides não a apresentou apenas porque o conceito de semelhança só aparece após o Livro IV, enquanto o Teorema de Pitágoras está no Livro I?

Vejamos a demonstração: considere os triângulos ABC, ACD e CBD da figura 9 a seguir, semelhantes dois a dois.

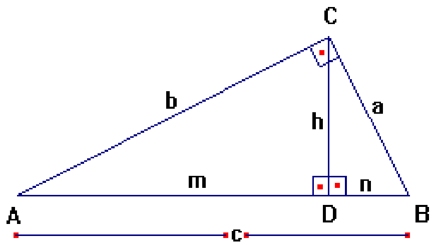

Fig.9

Como conseqüência dessas semelhanças, obtemos entre outros resultados:

$$b^2 = c.m \ \text{ e } \ a^2 = c.n$$

Minha intuição diz que o Teorema, e consequentemente sua demonstração, foi “percebido” visualmente, observando as áreas das regiões que “afloram” da figura 10 a seguir.

Para que o leitor perceba essa possibilidade utilizo os seguintes argumentos:

1. Os Gregos sabiam que um número real positivo *b* correspondia ao comprimento de um segmento de reta e que o número b^2 estava associado à área de um quadrado de lado *b*. O mesmo se aplica aos números *a* e a^2.
2. Também era do conhecimento dos Gregos que dados dois números positivos *c* e *m*, seu produto *c.m* correspondia a área de um retângulo cujos lados mediam *c* e *m*. O mesmo se aplica ao produto *c.n*.

Com essas informações em mente é muito provável que Pitágoras ou algum antecessor tenha construído a figura 10 abaixo ou idealizado-a mentalmente. *Essa é nossa segunda conjectura!*

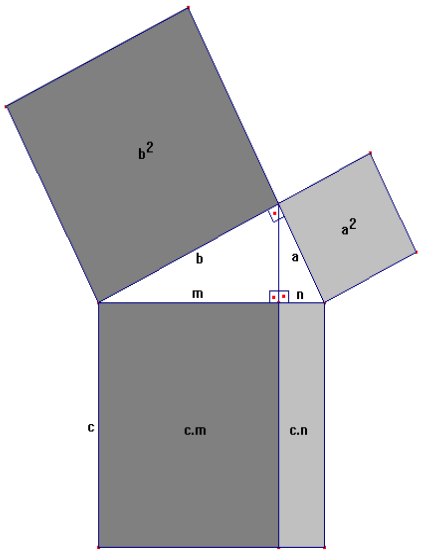

Fig.10

Mas, o que essa figura diz, considerando os resultados $b^2 = c.m$ e $a^2 = c.n$ já obtidos, é que "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa"! Ou seja,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Para finalizar, faremos uma demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras, deduzida a partir do caso particular para triângulos retângulos isósceles.

Observemos a figura 10 a seguir.

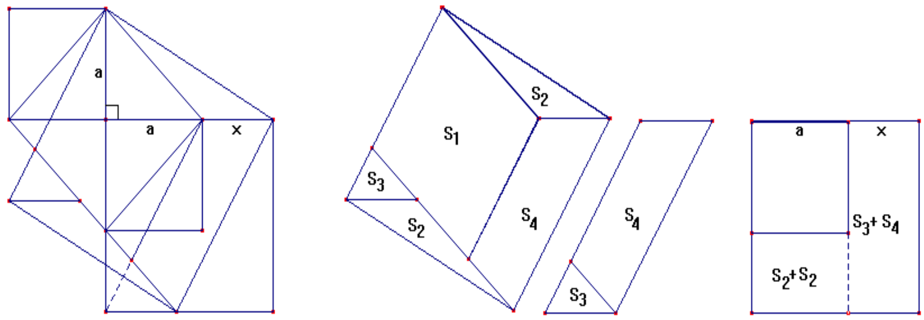

Fig.10

Temos um triângulo retângulo isósceles de catetos com medidas iguais a *a* e um triângulo retângulo de catetos com medidas *a* e *a* + *x*.

Se S é a área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo de lados *a* e *a*+*x*, então, $S = S_1 + S_2 + S_2 + S_3 + S_4$.

Como $S_1 = a^2 + a^2$, segue que,

$S = a^2 + a^2 + S_2 + S_2 + S_3 + S_4 = a^2 + (a^2 + S_2 + S_2 + S_3 + S_4)$

Portanto, no triangulo retângulo de catetos *a* e *a*+*x*, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. *Isso é o Teorema de Pitágoras!*

Nossa última conjectura é: *essa demonstração não poderia ser feita pelos Pitagóricos ou seus antecessores?* Note que os argumentos são puramente geométricos e as figuras envolvidas relativamente fáceis de se enxergar!

Referência

Loomis, E. S.(1940). *The Pythagorean Proposition*. Ann Arbor, Michigan, SA:NCTM.
Gerdes, Paulus.(1999). *Geomtry from Afrrica: Mathematical and Educational Explorations. Mathematical Association of America, Washington, DC.*