Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

LOS PROBLEMAS DIOFÁNTICOS EN EL SUMARIO COMPENDIOSO DEL HERMANO JUAN DIEZ

ABREU Jhon

Universidad Nacional Experimental "Francisco de Miranda" – UNEFM - Venezuela

jabreu310@gmail.com

Palabras Clave: Historia de la Educación Matemática, Problemas Diofánticos, Aritmética.

INTRODUCCIÓN

El título Sumario Compendioso es una manera abreviada de referirse a la obra del Hermano Juan Diez (HJD), cuyo título completo original es:

> "Sumario Compendioso de las cuentas de oro y plata que en los reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y todo género de tratantes. Con algunas reglas tocantes a la Aritmética"

La obra fue publicada en México en el año de 1556 (Harrise, 1872) y es el primer trabajo matemático escrito e impreso en el Nuevo Mundo, adelantándose así, por más de cien años, a la primera publicación matemática en Norteamérica (Smith, 1921). También conocida como el Sumario, fue dada a conocer a la comunidad matemática por el matemático y coleccionista norteamericano David Eugene Smith, quien la editó y publicó, en idioma inglés, bajo el título The Sumario Compendioso of Brother Juan Diez. The Earsliest Mathematical Work of the New World.

Aunque no es el objetivo de este artículo, señalamos que, a falta de información sobre el personaje, actualmente existen dudas sobre el sacerdocio del señor Juan Diez. En nuestra opinión, esta controversia proviene del nombre del autor en la obra original ¨Juan Diez freyle¨; la traductora, Señorita Carolina Marcial Dorado (Smith, 1921), interpretó la tercera palabra, aparecida originalmente en minúscula, freyle, como fraile y no como un segundo apellido. Aún más, revisando la literatura escrita al respecto, tenemos la duda de si el libro se publicó en vida o posterior a su muerte, ya que algunos autores ubican su deceso en 1549 (Pickover, 2009). En este trabajo nos mantenemos al margen de la

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

controversia y, a falta de información contraria convincente, lo denominaremos Hermano, tal como aparece en la primera edición en inglés.

A juzgar por la primera parte de la obra, esta parece motivada por la creciente demanda de un breve tratado de Aritmética que sirviera a los aprendices de contabilidad al servicio de las empresas que comerciaban productos en el Nuevo Mundo a mediados del siglo XVI. Este objetivo es logrado por HJD en dieciocho páginas de explicaciones prácticas, abundantes ejemplos aplicados y problemas, además de complementar su exposición con un conjunto de tablas para conversiones entre distintas medidas e intercambios de dineros relacionados con las transacciones de la época.

Al final de la parte dedicada a la Aritmética Contable, el HJD dedica siete páginas al tema de las propiedades de los Cuadrados Perfectos. Las propiedades se introducen a través de problemas o quistiones; planteados con el estilo y contenido del matemático griego Diofanto (s. III), razón por la cual los denominamos: problemas diofánticos. Estos problemas aparecen en las obras de Diofanto (Heath, 1910) y/o Fibonacci (McClennon, 1919), y son presentados al lector en forma retórica, la manera como se transmitía la ciencia de la época. En realidad, no hay una conexión entre la Aritmética de la primera parte y la inclusión del tema sobre Cuadrados Perfectos; hay que tener en mente que la motivación de la obra es la necesidad de formar personas capaces de llevar las cuentas de oro y plata de los comerciantes de la época.

Sobre la inclusión de los Cuadrados Perfectos pensamos en una travesura del HJD, quien incluyó el tema para atraer hacia la Matemática a algunos de los aprendices de las cuentas contables. La expresión en el Título del libro: ¨Con algunas reglas tocantes a la Aritmética¨, se siente como un aditivo.

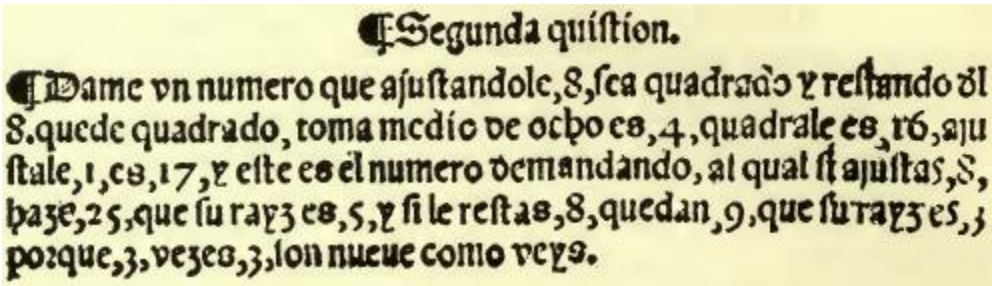
Por las razones explicadas en los dos últimos párrafos, consideramos que el Sumario Compendioso es también la primera obra de Educación Matemática en el Nuevo Mundo.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Para lectores de nuestra época, el Sumario Compendioso es de difícil lectura. La obra está escrita en un español antiguo, en evolución, todavía fuertemente influenciado por el latín, el lenguaje oficial de las ciencias en la época; además de lo anterior, utiliza palabras

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

ya en desuso. Adicionalmente, el tipo de diagramación e impresión son extrañas a las respectivas de hoy en día. Desde el punto de vista estructural, el planteamiento y la solución de los problemas aparecen en forma continua sin que haya una separación entre ellos; la profusión de comas y la concepción matemática del momento contribuyen a las dificultades que mencionamos al principio. Como muestra, obsérvese, en imagen directa del original, el planteamiento y solución del Segundo Problema:



¶Segunda quiſtion.

¶Dame vn numero que aſuſtandole,8,ſea quadrado y reſtando dl 8.quede quadrado, toma medio de ocho es,4,quadrale es,16,aju ſtale,1,es,17,y eſte es el numero demandando, al qual ſi ajuſtas,8, haze,25,que ſu rayz es,5,y ſi le reſtas,8,quedan,9,que ſu rayz es,3 porque,3,vezes,3,ſon nueue como veys.

Esta investigación tiene varios objetivos:

- Escribir los problemas utilizando las palabras, estilo y estructura con la que se escribe Matemática en nuestros días.
- Analizar aquellas soluciones dadas por HJD, que tienen valor desde el punto de vista de la matemática de la actualidad.
- Inferir cuál fue la motivación para las soluciones y conectarlas con el origen histórico de los procedimientos utilizados.
- Mencionar extensiones naturales a algunos de los problemas. En particular, presentamos el Método de Perturbaciones para resolver problemas pitagóricos sobre números racionales. Este método puede ser trabajado en educación secundaria.

Hemos excluido el análisis del Tercer Problema por considerar que está más relacionado la primera parte de Sumario, la que se refiere al material didáctico para los aprendices de contabilidad.

LOS PROBLEMAS

PROBLEMA 1. Hallar un número que, aumentado en 15, sea un cuadrado perfecto; y que, disminuido en 4, sea también un cuadrado perfecto.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

PROBLEMA 2. (a) Hallar un número tal que si se le suma 8 se obtiene un cuadrado perfecto y, si se le resta 8 se obtiene, también, un cuadrado perfecto. (b) Hallar un número tal que si se le suma 20 se obtiene un cuadrado perfecto y, si se le resta 20 se obtiene, también, un cuadrado perfecto

PROBLEMA 3. Una persona posee dos reatas muy buenas por la que le ofrecen 8 pesos, pero no acepta la oferta. Alguien le ofrece comprársela por varas, de manera que por cada vara le da tantos tomines como varas hay en la reata. Luego de realizar los cálculos, se da cuenta de que el dinero no supera los 8 pesos que le fuesen ofrecidos previamente. Cuán tas varas hay en cada reata.

PROBLEMA 4. Hallar un cuadrado perfecto tal que, si se le suma una cierta cantidad se obtiene un cuadrado perfecto y, si se le resta la misma cantidad se obtiene otro cuadrado perfecto.

PROBLEMA 5. Hallar tres o más cuadrados perfectos tales que si se suman consecutivamente se obtiene otro cuadrado perfecto.

PROBLEMA 6. Hallar un cuadrado perfecto tal que si se le suma o se le resta tres veces su raíz, en ambos casos, se obtienen cuadrados perfectos.

PROBLEMA 7. Halle dos números, además de 2 y 3, tales que las suma de sus cuadrados es 13.

PROBLEMA 8. Hallar dos números, además de 3 y 4, tales que la suma de sus cuadrados es 25.

SOBRE LAS PREGUNTAS EN LOS PROBLEMAS

Tal como lo titula el HJD en su Sumario, los ocho problemas propuestos corresponden exclusivamente al tema de las Quistiones por los numeros quadrados, (Smith, 1921). Antes de los planteamientos, el HJD da la siguiente definición de numeros quadrados:

> “Numeros quadrados se llaman y son aquellos que nacen de la multiplicacion o son produzidos de algun numero en otro semejante como, 4, 9, 16, 25. Que el 4, nace del, 2, multiplicado por si mesmo diziendo, 2, veces, 2, son, 4, y el, 9, nace del, 3,

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

por el mesmo consiguiente porque, 3, veces, 3, son, 9, delos quales números los lineales como el, 2, o el, 3, son las raizes”

Como se observa, esta definición corresponde a los cuadrados de los números enteros positivos. Sin embargo, como se verá más adelante, las soluciones de las preguntas 3, 4, 7 y 8 son números mixtos (fracciones impropias), de lo que se deduce que el HJD considera, tácitamente, la extensión del concepto de numeros quadrados y sus raizes a los números racionales.

El primer problema pide hallar un número entre dos cuadrados desconocidos. Se conoce la distancia entre los cuadrados.

El tema subyacente en los problemas segundo, cuarto y sexto, es el de hallar cuadrados perfectos en progresión aritmética:

- El problema 2, pide hallar tres números consecutivos en progresión aritmética, siendo los extremos de la progresión números cuadrados perfectos. Se conoce la diferencia d.
- El problema 4, pide hallar tres cuadrados en progresión aritmética. Se desconoce la diferencia d .
- El problema 6, pide hallar tres cuadrados perfectos en progresión aritmética. La diferencia d un múltiplo de la raíz del término medio.

El tercer problema es una aplicación que envuelve algunas unidades de medida de la época. El uso de algunas de estas está explicado en la primera parte del Sumario, la que se refiere al material didáctico para “comerciantes” de la época.

El quinto problema es una extensión del Teorema de Pitágoras. El HJD utiliza el Teorema de Pitágoras, como herramienta para definir un procedimiento recursivo mediante el cual se obtienen nuevos cuadrados perfectos.

Los problemas siete y ocho tratan el problema de descomponer un número entero positivo en la suma de dos cuadrados perfectos; solo en la pregunta ocho, el número a descomponer es un cuadrado perfecto.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

LAS SOLUCIONES DEL HJD – COMENTARIOS Y EXTENSIONES

PROBLEMA 1: Hallar un número que, aumentado en 15, sea un cuadrado perfecto; y que, disminuido en 4, sea también un cuadrado perfecto.

SOLUCIÓN DEL HJD:

Suma 15 y 4, para obtener 19; agrega 1 a este resultado para obtener 20. Ahora toma la mitad de este número 20, la cual es 10, y elévala al cuadrado para tener 100 (este es el cuadrado perfecto mayor). A 100 réstale 15 para obtener 85 (este es el número demandado). Si a este número 85 le restas 4, queda 81 (este es el cuadrado perfecto menor).

COMENTARIOS:

1. Justificación del Método de HJD:

   A juzgar por el método utilizado, el HJD estaba en conocimiento de que la distancia d entre dos cuadrados perfectos consecutivos $(n-1)^2$ y n^2, es el número impar $2n-1$:

   $$d = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

   Y, por lo tanto, dada d, el cuadrado mayor se obtiene así:

   $$n^2 = \left(\frac{d+1}{2}\right)^2$$

   En general, si x es un número entre los cuadrados consecutivos $(n-1)^2$ y n^2, que está a una distancia p de $(n-1)^2$ y a una distancia q de n^2, entonces

   $$x = \left(\frac{p+q+1}{2}\right)^2 - q$$

   Los cuadrados mayor y menor son

   $$n^2 = \left(\frac{p+q+1}{2}\right)^2 \;\; y \;\; (n-1)^2 = \left(\frac{p+q+1}{2}\right)^2 - (p+q) = \left(\frac{p+q-1}{2}\right)^2$$

   respectivamente.

   En el caso del Problema 1, de $p = 4$, $q = 15$, se obtiene $x = 85$, $(n-1)^2 = 81$ y $n^2 = 100$; siendo esta la solución de HJD.

2. Algunos problemas que envuelven cuadrados perfectos pequeños, se pueden resolver con solo sacar conclusiones a partir de Tablas de Cuadrados Perfectos.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Por ejemplo, en el problema que nos ocupa, luego de una "inspección" de una Tabla de Cuadrados, uno puede "concluir" que los únicos cuadrados perfectos que están a distancia 19, son 81 y 100. Así, restamos 15 de 100 y obtenemos el número solicitado 85.

Cuando los números involucrados son grandes, utilizar una Tabla tiene limitaciones. Por ejemplo, si el problema hubiese sido: "Hallar un número que, aumentado en 500.000, sea un cuadrado perfecto; y que, disminuido en 499.997, sea también un cuadrado perfecto", no pudiésemos concluir, "por inspección", que el número buscado es $249.998.500.001$ ya una tal tabla no existió en la época del HJD.

3. Del comentario anterior se deduce la validez teórica del método utilizado por el HJD; de hecho, en palabras del HJD, la solución sería: suma 500.000 y 499.997, para obtener 999.997; agrega 1 a este resultado para obtener 999.998. Ahora toma la mitad de este número 999.998, la cual es 499.999, y elévala al cuadrado para tener $249.999.000.001$ (el cuadrado perfecto mayor). A $249.999.000.001$ réstale 500.000 para obtener $249.998.500.001$, que es el número demandado. Si a este número $249.998.500.001$ le restas 499.99, queda $249.998.000.004$ (el cuadrado perfecto menor).

4. En notación moderna, el problema se modela como un sistema de ecuaciones $2x3$; por cierto, se trata de un lindo ejercicio para alumnos de Educación Media: Hallar tres números enteros positivos $x, a\ y\ b$ tales que:

$$x + 15 = b^2 \ \ y \ \ x - 4 = a^2$$

Una posible solución es como sigue: de ambas ecuaciones se tiene

$$19 = b^2 - a^2$$

o

$$(b + a)(b - a) = 19 \cdot 1$$

Como $b > a$ y la descomposición del lado derecho es única, entonces

$$b + a = 19 \ \ y \ \ b - a = 1$$

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Al resolver el sistema se obtiene

$$b = 10 \quad a = 9$$

Sustituyendo en las ecuaciones originales

$$x = 85$$

PROBLEMA 2: Dado en dos partes:

a. Hallar un número tal que si se le suma 8 se obtiene un cuadrado perfecto y, si se le resta 8 se obtiene, también, un cuadrado perfecto.
b. Hallar un número tal que si se le suma 20 se obtiene un cuadrado perfecto y, si se le resta 20 se obtiene, también, un cuadrado perfecto

SOLUCIONES DEL HJD:

a. Toma la mitad de 8, da 4. Eleva 4 al cuadrado y súmale 1, da 17. Este es el número demandado. (Comprobación) Si a este número (17) le sumas 8 obtienes 25 (el mayor cuadrado) cuya raíz es 5 y, si le restas 8 obtienes 9 (el cuadrado menor) cuya raíz es 3.
b. Toma la mitad de 20, da 10. Eleva 10 al cuadrado y súmale 1, da 101. Este es el número demandado. (Comprobación) Si a este número (101) le sumas 20 obtienes 121 (el mayor cuadrado) cuya raíz es 11 y, si le restas 20 obtienes 81 (el cuadrado menor) cuya raíz es 9.

COMENTARIOS:

1. JUSTIFICACIÓN DEL MÉTODO:

   El Problema pide hallar tres números a^2 , x , b^2 en progresión aritmética de diferencia d. En la parte (a) la diferencia es $d = 8$ y, en la parte (b) la diferencia es $d = 20$.

   Con $d = 8$, la diferencia entre los extremos es: $b^2 - a^2 = 2 \cdot 8 = 16$. Una Tabla de Cuadrados sugeriría que 16 es la diferencia $5^2 - 3^2$.

   Con $d = 20$, la diferencia entre los extremos es: $b^2 - a^2 = 2 \cdot 20 = 40$. Una Tabla de Cuadrados sugeriría que 40 es la diferencia $11^2 - 9^2$.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Obsérvese que, en ambos, casos los cuadrados son de la forma $(n-1)^2$ y $(n+1)^2$, respectivamente.

Entonces, lo siguiente justifica el método utilizado por HJD:

- el elemento medio x de la progresión aritmética (el número pedido en la pregunta) es la media aritmética de los extremos:

$$x = \frac{(n-1)^2 + (n+1)^2}{2} \to \cdots \to x = n^2 + 1$$

- Por otra parte, dado que los extremos están a distancia $2d$:

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 2d \to \cdots \to n = \frac{d}{2}$$

- Uniendo ambos resultados, tenemos finalmente

$$x = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 1$$

2. De nuevo, debido a las limitaciones de las Tablas de Cuadrados y por razones análogas a las expresadas en los Comentarios 2 y 3, del Problema 1, el método de HJD tiene gran relevancia.

3. Para alumnos de Secundaria, la pregunta original se puede proponer así: Hallar tres números enteros positivos x, a, b tales que:

$$x + 8 = b^2 \quad \text{y} \quad x - 8 = a^2$$

Una posible solución es como sigue: restando las ecuaciones se tiene

$$16 = b^2 - a^2$$

O sea, a y b son ambos pares o ambos impares.

La relación anterior se puede escribir así

$$(b+a)(b-a) = 16$$

De las posibles descomposiciones de 16 como producto de dos factores, la única descomposición que obedece la condición de paridad con $b > a$ es $16 = 8 \cdot 2$. Así:

$$(b+a)(b-a) = 8 \cdot 2$$

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Al resolver el sistema de ecuaciones,

$$b + a = 8 \ \ , \ \ b - a = 2$$

se obtiene

$$a = 3 \ \ , \ \ b = 5$$

y, de cualquiera de las ecuaciones originales

$$x = 17$$

4. En la dedicatoria de su obra Liber Quadratorum, 1225, Leonardo de Pisa, cuenta que Johannes de Palermo, Magister del Emperador Federico II Hohenstaufen, le propuso el siguiente problema para probar su experticia matemática: “Hallar un cuadrado perfecto que cuando se aumenta o disminuye en 5, se obtiene un cuadrado perfecto, en ambos casos” (McClennon, 1919).
   Obsérvese que, a pesar de que el problema está en la misma categoría de la Segunda Pregunta, el método utilizado por HJD no es aplicable en este caso; de hecho, no hay en la Tabla de Cuadrados, dos cuadrados perfectos que estén a distancia 10. Esto sugiere que la pregunta no tiene solución en los enteros positivos. Leonardo resolvió el problema y dio como solución el número racional $11\frac{97}{144}$.

5. Esta categoría de problemas es aún más antigua que Liber Quadratorum; de hecho, en III,9, Diofanto usa tres cuadrados perfectos en progresión aritmética: 961, 1681, 2401; además, en II, 20, propone hallar tres cuadrados perfectos x, y, z tales que $y^2 - x^2 = \frac{1}{3}$ y $z^2 - y^2 = \frac{1}{3}$ (Dickson, 1971).

6. En 1640, Fermat propuso, sin demostración, que no es posible hallar cuatro cuadrados perfectos en progresión aritmética. Este hecho fue demostrado luego por Euler y otros (Dickson, 1971).

7. El tema de tres cuadrados perfectos en progresión aritmética se ha utilizado en la presentación de problemas en Matemática Recreativa (Beiler, 1966).

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

PROBLEMA 4. Hallar un cuadrado perfecto tal que, si se le suma una cierta cantidad se obtiene un cuadrado perfecto y, si se le resta la misma cantidad se obtiene otro cuadrado perfecto.

SOLUCIÓN DEL HJD:

Para motivar la respuesta, el HJD utiliza las definiciones de número congruo y número congruente de Leonardo de Pisa:

> Un numero congruo se llama y es un tal numero que es abto de dar y recebir otro numero el cual se llama congruente en tal manera que dándole o recibiéndole siempre sea cuadrado, y para que mejor y mas claramente lo entiendes pondré aquí bajo los números congruo y congruentes que parecieran necesarios, y allí mesmo pondré un ejemplo, por el que si bien lo notas podras declarar todas las cuestiones que por esta via te fuesen demandadas …

Pero el HJD no utiliza la identidades que Leonardo deduce en su Liber Quadratorum; (McClennon, 1919); a cambio publica una Tabla de dos columnas (congruos y congruentes) y veinticuatro filas que finalmente utiliza para evitar el uso de las identidades de Leonardo. Visto retrospectivamente, se infiere que la tabla fue obtenida de las identidades para evitar el problema didáctico en la transferencia del método. Por ser de poco interés creativo no detallaremos el procedimiento del HJD, pero puede ser consultado en Smith (1921).

COMENTARIO

A lo largo del tiempo, este problema se resolvió con una técnica similar a la tradicional utilizada para encontrar la forma general de la ternas pitagóricas (Oystein, 1948). El resultado es: si el cuadrado perfecto buscado es x^2, y h es el número que sumado y restado produce nuevos cuadrados perfectos a^2 y b^2, entonces todas las soluciones posibles están dadas por las relaciones:

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

$$x = m^2 + n^2 \ \ , \ \ h = 4mn(m^2 - n^2)$$

$$a^2 = x^2 - h = (m^2 - 2mn - n^2)^2 \ \ , \ \ b^2 = x^2 + h = (m^2 + 2mn - n^2)^2$$

con m y n enteros positivos cualesquiera. Se demuestra que h es un múltiplo de 24.

PROBLEMA 5. Hallar tres o más cuadrados perfectos tales que si se suman consecutivamente se obtiene otro cuadrado perfecto.

SOLUCIÓN DEL HJD:

Comienza con el primer cuadrado impar, 9. Réstale 1 para obtener 8; ahora toma la mitad y elévala al cuadrado, obteniendo 16. Este es el segundo cuadrado. La suma de 9 y 16 es 25, otro cuadrado. Para obtener un tercer cuadrado, sustrae 1 de 25, da 24. Ahora toma la mitad y elévala al cuadrado, obteniendo 144. Este es el tercer cuadrado. Para probarlo, la suma de 9, 16 y 144 da 169, este es un cuadrado cuya raíz es 13. De esta manera puedes seguir obteniendo otros cuadrados.

COMENTARIOS:

1. JUSTIFICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO (HJD):
   Como se demuestra a continuación, el procedimiento utilizado por HJD puede iniciarse con cualquier cuadrado impar.
   Dado n, tomemos como número de partida el siguiente cuadrado impar
   $$x_0 = (2n+1)^2 \ , \qquad para\ n\ dado$$
   Siguiendo el procedimiento, el siguiente cuadrado es
   $$x_1 = \left(\frac{x_0 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)^2 - 1}{2}\right)^2 = \big(2n \cdot (n+1)\big)^2$$
   La suma $x_0 + x_1$ es un cuadrado perfecto:
   $$x_0 + x_1 = \cdots = (2n^2 + 2n + 1)^2$$
   El tercer cuadrado es obtenido por HJD así:
   $$x_2 = \left(\frac{(x_0 + x_1) - 1}{2}\right)^2 = \cdots = \big(2n(n+1)(n^2+n+1)\big)^2$$
   La suma $x_0 + x_1 + x_2$ es un cuadrado perfecto:

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

$$x_0 + x_1 + x_2 = (2n^2 + 2n + 1)^2 + \left(2n(n+1)(n^2 + n + 1)\right)^2 = \cdots$$
$$\cdots = (2n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 2n + 1)^2$$

Para $n = 1$ se tiene: $\{x_0, x_1, x_2\} = \{9, 16, 144\}$; la solución dada por HJD.
Para $n = 2$ se tiene: $\{x_0, x_1, x_2\} = \{25, 144, 7056\} = \{5^2, 12^2, 84^2\}$. Con $x_0 + x_1 = 169 = 13^2$ y $x_0 + x_1 + x_2 = 7225 = 85^2$

2. El método utilizado por HJD era ya conocido por los griegos antes de la era cristiana; de hecho, en sus Comentarios sobre el Primer Libro de los Elementos de Euclides, el filósofo griego Proclo (412–485 DC) atribuye el método a Pitágoras (Taylor, 1792).

3. Un aspecto interesante del método es que sugiere una metodología que, aplicada de manera recurrente, produce una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ de cuadrados perfectos cumpliendo la regla:

para cada $p \geq 0$, $\sum_{n=o}^{p} x_n$ es un cuadrado perfecto.

La validez de este proceso infinito puede demostrarse mediante Inducción:
Sea i un número impar, y definamos

$$x_1 = i^2 \ \ , \ S_1 = x_1 \ ; \ x_n = \left(\frac{S_{n-1}-1}{2}\right)^2 \ , \ S_n = S_{n-1} + x_n \ , \ \ n \geq 2$$

Proposición: S_n es un cuadrado perfecto, para $n \geq 2$.
Demostración:
Paso básico: Demostremos que para $n = 2$, S_2 es un cuadrado perfecto.
Tenemos $x_2 = \left(\frac{S_1-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{i^2-1}{2}\right)^2$ y

$$S_2 = S_1 + x_2 = i^2 + \left(\frac{i^2-1}{2}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{i^2+1}{2}\right)^2$$

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Así, S_2 es un cuadrado perfecto.

Hipótesis de Inducción: Asumamos que para un cierto m fijo, S_m es un cuadrado perfecto. ($S_m = x^2$, para algún entero positivo x)

Paso Inductivo:

Demostremos que S_{m+1} es un cuadrado perfecto.

$$S_{m+1} = S_m + x_{m+1} = S_m + \left(\frac{S_m - 1}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)^2$$

Así, S_{m+1} es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 6. Hallar un cuadrado perfecto tal que si se le suma o se le resta tres veces su raíz, en ambos casos, se obtienen cuadrados perfectos.

COMENTARIOS:

1. Análogamente a la solución que el HJD da al Problema 4 el HJD no describe un procedimiento matemático, solo usa de nuevo la tabla de números congruos y congruentes para obtener la solución $x = \frac{25}{8}$ a su ejemplo ilustrativo. Es decir,

$$x^2 - 3x = \cdots = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \text{ y } x^2 + 3x = \cdots = \left(\frac{35}{8}\right)^2$$

   Por ser de poco interés creativo no detallaremos el procedimiento utilizado por el HJD, este puede ser consultado en Smith (1921).

2. La solución general a este problema se puede obtener a partir de la solución del Problema 4, mostrada en el Comentario: primeramente observemos que si x es una solución, tomando $h = 3x$, tenemos la solución general del problema:

$$x^2 = \left[\frac{x^2}{x}\right]^2 = \left[\frac{(m^2+n^2)^2}{\frac{4}{3}mn(m^2n^2)}\right]^2 = \left[\frac{3(m^2+n^2)^2}{4mn(m^2n^2)}\right]^2$$

   Mediante manipulación algebraica se obtienen los cuadrados perfectos pedidos:

$$x^2 - 3x = \left[\frac{3(m^2+n^2)^2}{4mn(m^2n^2)}\right]^2 (m^2 - 2mn + n^2)^2$$

Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

$$x^2 + 3x = \left[\frac{3(m^2 + n^2)^2}{4mn(m^2n^2)}\right]^2 (m^2 + 2mn + n^2)^2$$

Así que el número buscado es de la forma racional

$$x = \frac{3(m^2 + n^2)^2}{4mn(m^2 - n^2)}$$

con m y n enteros cualesquiera.

3. Si en la expresión anterior hacemos $m = 2$ y $n = 1$ se obtiene la solución $x = \frac{25}{8}$, la que el HJD da en su ejemplo.

PROBLEMA 7. Halle dos números, además de 2 y 3, tales que las suma de sus cuadrados es 13.

PROBLEMA 8. Halle dos números, además de 3 y 4, tales que la suma de sus cuadrados es 25.

COMENTARIOS:

1. Los dos problemas tratan de la descomposición de un número entero positivo en la suma de dos cuadrados perfectos. Dado que los números 13 y 25 son pequeños, mediante inspección de una Tabla de Cuadrados se ve que no hay más descomposiciones enteras de ellos que las dadas en los problemas; por lo tanto, habrá que buscar soluciones racionales.

2. El HJD y otros autores clásicos obtienen soluciones a estos problemas partiendo de ternas pitagóricas conocidas. Su solución al problema 8 sigue el procedimiento que Leonardo de Pisa plantea y demuestra en su Liber Quadratorum (McClennon, 1919):
   Dados los enteros a, b y c satisfaciendo $a^2 + b^2 = c^2$ hallar dos enteros o dos fracciones x , y tales que $x^2 + y^2 = c^2$. La solución que muestra es como sigue: halla otros tres números enteros m, n y q tales que $m^2 + n^2 = q^2$. Si $q^2 \neq c^2$ multiplica la primera ecuación por c^2/q^2 , para obtener

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

$$\left(\frac{c}{q}\cdot m\right)^2+\left(\frac{c}{q}\cdot n\right)^2=c^2$$

Así, $x=\frac{c}{q}\cdot m$, $y=\frac{c}{q}\cdot n$ son los números buscados.

3. En lugar de utilizar el recurso de las ternas pitagóricas, la solución se puede obtener sin perder el contenido intrínseco del problema. Aquí proponemos un método que considera que las soluciones racionales no deberían estar muy lejos de las soluciones enteras dadas; este método lo llamamos método de las perturbaciones.

Comenzamos replanteando el problema en forma general:
Dados a, b y c con $a<b\ \ y\ \ a^2+b^2=c$, hallar $a_1\ \ y\ \ b_1$ racionales tales que

$$a_1<b_1\ \ y\ \ {a_1}^2+{b_1}^2=c$$

Aquí consideramos a a_1 y b_1 como "perturbaciones" de a y b, respectivamente; con x , y siendo las correspondientes magnitudes de las perturbaciones. Se presentan dos casos:

i. $a_1=a-x<a\ \ ,\ \ b_1=b+y\ \ ,\ \ (a-x)^2+(b+y)^2=c$

ii. $a_1=a+x>a\ \ ,\ \ b_1=b-y\ \ ,\ \ (a+x)^2+(b-y)^2=c$

Trabajamos solo el Caso i ya que el resultado está ligado a los problemas 7 y 8; el Caso ii se trabaja de manera análoga.

$$(a-x)^2+(b+y)^2=c\to\cdots\to x^2-2ax+y^2+2by=0\to$$

$$\to x(2a-x)=y(y+2b)\to\frac{x}{y}=\frac{y+2b}{2a-x}$$

Introducimos los parámetros enteros p y q:

$$\frac{x}{y}=\frac{y+2b}{2a-x}=\frac{p}{q}$$

Sustituyendo $y=x\cdot\frac{p}{q}$ en $\frac{y+2b}{2a-x}=\frac{p}{q}$ se tiene

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

$$x = \frac{2p(ap-bq)}{p^2+q^2} \quad , \quad y = \frac{2q(ap-bq)}{p^2+q^2}$$

Con p , q enteros positivos y $\frac{p}{q} > \frac{b}{a}$.

Finalmente,

$$a_1 = a - x = a - \frac{2p(ap-bq)}{p^2+q^2} \qquad b_1 = b - \frac{2q(ap-bq)}{p^2+q^2}$$

Se comprueba que la fórmulas para a_1 y b_1 dan la solución general al problema.

$$a_1 < b_1 \ \text{ y } \ {a_1}^2 + {b_1}^2 = c$$

4. Obsérvese que si $p = 2$ y $q = 1$, entonces $x = \frac{4}{5}$ y $y = \frac{2}{5}$. Así, $2 - x = \frac{6}{5}$ y $3 + y = \frac{17}{5}$. Finalmente $(2-x)^2 + (3+y)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{17}{5}\right)^2 = 13$, que es la solución del HJD al problema 7.

5. También, si $p = 7$ y $q = 4$, entonces $x = \frac{14}{13}$ y $y = \frac{8}{13}$. Así, $3 - x = \frac{25}{13}$ y $3 + y = \frac{60}{13}$. Finalmente $(3-x)^2 + (4+y)^2 = \left(\frac{25}{13}\right)^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2 = 25$, que es la solución del HJD al problema 8.

PALABRAS FINALES

Independientemente de las críticas estructurales y de procedimiento que puedan hacérsele, existen muchas razones por las que el Sumario Compendioso es considerado como una obra de gran valor. En una época donde la publicación de obras estaba confinada al tema religioso, en 1556 el Sumario logra interrumpir las líneas editoriales como la primera obra matemática y de educación matemática en el Nuevo Mundo; otras obras de temas científicos serían publicadas en los años siguientes.

No sabemos cuál fue la vida intelectual del Hermano Juan Diez, tampoco qué clase de información matemática trajo o recibió de España; cualquiera que haya sido, es admirable su empeño por escribir una obra con pertinencia para la sociedad mixta que comenzaba en el Nuevo Mundo. También lo es su sentido de oportunidad, y proponer el tema matemático para el estudio de quien se interesase; no sabemos cuántos lo hicieron, seguramente muchos de los usuarios del Sumario se quedarían en la primera parte, aquella que directamente le servía para su trabajo diario, pero uno solo que haya caído en la trampa de HDJ hubiese sido una ganancia para el estudio y divulgación del conocimiento matemático.

El Sumario es el perfecto ejemplo de una obra para la enseñanza de la Matemática que está planificada para que el conocimiento se adquiera a través de la Resolución de Problemas. El libro está todo lleno de problemas desde el principio hasta el final. ¿No es esto señal de que esa estrategia es antigua y útil? En su estilo, el HJD escribe las soluciones como si tuviese el alumno sentado frente a él; en sus escritos tutea al alumno, le da consejos y se muestra preocupado por la comprensión de las soluciones y sus aplicaciones.

La obra del HJD nos permite conectar tres épocas muy distantes de la Matemática, el siglo III de Diofanto, el siglo XIII de Fibonacci y la época actual, amén de las personas que, durante el transcurso de los siglos, siguieron trabajando en la tradición de crear y enseñar Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beiler, A.H. (1966). Recreation in the Theory of Numbers. The Queen of Mathematics Entertains. Second Edition. Dover Publications, Inc., New York.

Dickson, L.E. (1919). History of the Theory of Numbers, Volume II, Diophantine Analysis. Carnegie Institute of Washington, 256. Reprinted (1971) by Chelsea Publishing Company, New York.

Harrise, Henry (1872). Introducción de la Imprenta en América: con una bibliografía de las obras impresas en aquel hemisferio desde 1540 a 1600 por el autor de la Bibliotheca Americana Vetustissima. Madrid Imp. y Esterotipia de M. Rivadeneyra.

Heath, T.L. (1910). Diophantus of Alexandria. A study in the History of Greek Algebra. Cambridge University Press. England.

McClennon, R.B. (1919). Leonardo de Pisa and his Liber Quadratorum. The American Mathematical Monthly, XXVI, 1-8.

Oystein, O. (1948). Number Theory and its History. Second Edition. Dover Publications, Inc, New York.

Pickover, C.A. (2009). The Math Book. From Pythagoras to the 57th Dimension. 250 Milestones in the History of Mathematics. Sterling Publishing, New York.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Smith, D.E. (1921). The Sumario Compendioso of Brother Juan Diez. The Earliest Mathematical Work of the New World. Ginn and Company, Publishers. Boston and London.

Taylor, T. (1792). The Philosophical and Mathematical Commentaries of Proclus on The First Book of Euclid´s Elements, Volume II. London.