CONSTRUCCION DE LOS CONCEPTOS DE PROBABILIDAD Y ESPERANZA MATEMÁTICA A TRAVÉS DE JUEGOS

Vosahlo, Guillermina Emilia
Facultad de Ciencias Económicas, UNT, Argentina
gvosahlo@yahoo.com.ar
Niveles Medio, terciario, universitario

Resumen

La mayoría de las personas tienen nociones intuitivas acerca de la probabilidad. Muchas veces estas ideas son parciales, incompletas o erróneas. Para que tomen conciencia de sus ideas, con el objeto de que puedan cambiarlas es necesario que se hagan explícitas en un contexto donde sean útiles, y luego deben ser confrontadas con otras situaciones donde la noción no tiene validez, para que perciban la necesidad de cambiarla.

Por ejemplo, una noción común es que cuanto mayor sea la cantidad de casos favorables a un suceso, mayor es la probabilidad de que ocurra. Esta noción es verdadera cuando los sucesos son finitos y están referidos al mismo espacio o a espacios muestrales con el mismo cardinal. Sin embargo, cuando los cardinales de los espacios muestrales son distintos, esta noción no siempre resulta verdadera.

El objetivo del trabajo es presentar actividades lúdicas que permiten explorar las ideas previas, y confrontarlas con otras situaciones para lograr un cambio conceptual.

Con respecto al concepto de esperanza matemática, se analizará en distintos juegos cuál es su significado y cómo se pueden cambiar los montos de las apuestas para que el juego sea o no equitativo.

<u>Palabras clave:</u> Probabilidad, Esperanza, juegos

Marco teórico

Los obstáculos que surgieron a través de la historia en la formación de los conceptos se reproducen frecuentemente en los alumnos (Batanero y Serrano, 1995). El concepto de probabilidad es uno de los que presenta controversia en su interpretación, debido a su propia naturaleza, motivo por el cual fue seleccionado para su tratamiento en este trabajo.

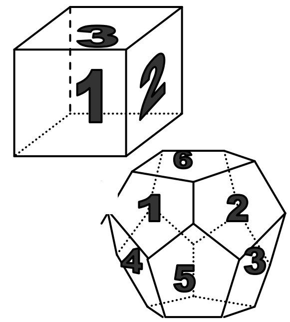
Sabemos que para abordar un nuevo conocimiento, apelamos a conocimientos previos que nos permiten organizar la nueva situación y darle sentido. Pero estos conocimientos previos pueden ser incoherentes con el conocimiento científico, incompletos, desorganizados o parcialmente correctos; generalmente son implícitos y además resistentes al cambio (Pozo, 1994). Por tal motivo se diseñó una secuencia de actividades que active las ideas previas de los alumnos sobre probabilidad, los haga tomar conciencia de las mismas, y puedan confrontarlas con otra situación donde sus concepciones no tengan validez para poder cambiarlas, completarlas, o reorganizarlas.

Finalmente, es necesario que los alumnos puedan transferir los conocimientos adquiridos a un nuevo contexto o a la resolución de otros problemas donde puedan ser útiles, usándolos de modo relativamente autónomo. Esta transferencia resulta difícil cuando son conocimientos adquiridos en el aula, que deben llevarse a un contexto más cotidiano o informal (Pozo, 1994). Los problemas usados en clase para que el alumno utilice el conocimiento deben pertenecer a contextos variados y especialmente vinculados con el contexto en el que viven, dado que cuando sea mayor la similitud entre el contexto de aprendizaje y de recuperación, más fácil resultará la transferencia a problemas de la realidad.

Propuesta de actividades

Actividad 1

a) Un dado tiene un 1 en tres de sus caras, un 2 en una cara y un 3 en las restantes. Si juegas con este dado, ¿qué número tiene más probabilidad de salir? ¿Por qué?



b)Te proponen jugar a alguno de los siguientes juegos:

Juego 1: Lanzas un dado legal con sus caras numeradas del 1 al 6 y ganas si ocurre el suceso A: “obtienes un número mayor que 4”.

Juego 2: Lanzas un dodecaedro legal con sus caras numeradas del 1 al 12 y ganas si ocurre el suceso B: “obtienes un número mayor que 9”.

¿En cuál de los juegos tienes más probabilidad de ganar? ¿Por qué?

Sugerencia: completa la siguiente tabla

	Nº de casos favorables	Nº de casos posibles
Dado		
Dodecaedro		

c) Si no puedes justificar en el ítem anterior en qué juego tienes más probabilidad de ganar, lanza 100 veces el dado y el dodecaedro, determina la frecuencia relativa de los sucesos A y B, ¿cuál es tu conclusión? ¿Hay alguna relación con el número de casos favorables y posibles? Explica.

En el ítem a) el alumno con facilidad puede decidir que el 1 es el que tiene más probabilidad de ocurrir porque hay más casos favorables. Esta idea se debe explicitar para poderla confrontar con la siguiente actividad.

En el ítem b), al comparar el juego del dado con el del dodecaedro, ve que en el dado hay menos casos favorables que en el dodecaedro, pero que también hay menos casos posibles. Con frecuencia surge en los alumnos la idea de considerar el porcentaje de casos favorables en relación al total (donde aparecen vinculados los casos favorables con los posibles). Esta primera idea es adecuada para luego analizar la equivalencia entre el porcentaje y la proporción de casos favorables con respecto a los posibles, para tomar esta última como la definición de probabilidad clásica. Luego hay que explicar cuando se deben multiplicar probabilidades, en las reglas multiplicativas o en la independencia, porqué se prefiere trabajar con proporciones y no con porcentajes, aunque sean ideas equivalentes.

Cuando los alumnos tienen una buena comprensión de proporciones pueden introducir por sí mismos la idea. Por ejemplo, un alumno del último año de secundario respondió “es más probable ganar en el dado porque tiene 2 casos favorables de 6, y si jugara con el dodecaedro, que tiene el doble de casos posibles, debería tener 4 favorables para tener la misma proporción, pero tenemos sólo 3”.

Si no surge ninguna idea, se resuelve c), pero el docente debe verificar que el dodecaedro que se usa sea equilibrado. A partir de la experiencia los alumnos pueden tabular la frecuencia relativa de ocurrencia de los sucesos A y B para luego vincularlas con el cociente entre el número de casos favorables y posibles.

Actividad 2

En el juego Carrera de Caballos, estos están numerados del 0 al 12 y deben avanzar 10 casilleros para llegar a la meta (ver tablero en la siguiente página). El juego consiste en lanzar dos dados, y tiene dos variantes (Grupo Alquerque, 2007):

Variante 1: Con sumas:

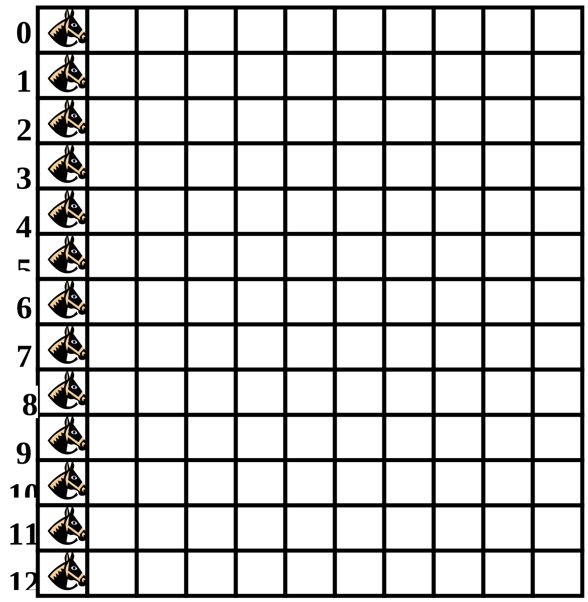
1. Cada jugador elige un caballo distinto y allí coloca su ficha.

2. Se lanza por turnos los dados y se suman los resultados obtenidos. El caballo cuyo número coincide con la suma avanza un lugar, aunque no sea el caballo de quien arrojó los dados.

3. Gana el jugador cuyo caballo llega primero a la meta.

Variante 2: Con restas: Ídem al anterior, pero avanza el caballo cuyo número coincide con la diferencia (número mayor menos el menor) de los resultados en el dado.

¿Qué caballo te conviene elegir en cada variante (suma o resta)? ¿Qué caballo nunca ganará en cada una de las variantes? ¿Qué probabilidad de ganar tiene cada caballo?



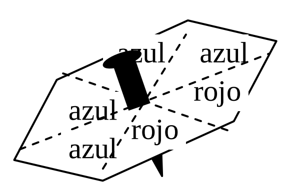
Es común que los alumnos digan que como en los dados los resultados tienen la misma probabilidad, entonces todos los caballos tienen también la misma probabilidad de ganar, lo cual no es cierto, hay que contar en cuántos casos gana cada caballo e incluso hay caballos que no pueden ganar.

Se puede pedir a los alumnos que realicen el conteo de casos favorables y posibles. Luego, para mejorar la comprensión sobre la aleatoriedad, se puede solicitar que lleven a cabo el lanzamiento de los dados. Se pueden dividir los alumnos en grupos de 2 o 3, que arrojen los dados y vayan haciendo cruces en el tablero a medida que avanza cada caballo, luego pueden tabular cuánto avanzó cada uno. Es posible que no en todos los grupos gane el caballo que tiene más probabilidad, pero si se reúnen los resultados de todos los grupos y se suma cuántos lugares avanzó cada caballo se verá que generalmente el que más avanzó es el que tiene más probabilidad. Estos resultados se pueden usar para discutir que la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica es válida cuando el número de repeticiones es muy grande, no basta analizar unos pocos casos y por eso juntamos los resultados de los grupos.

Con respecto a la noción de valor esperado, se puede formar su noción a partir de la idea de ganancia promedio en un juego de azar.

Actividad 3

Una perinola fue construida con un hexágono regular de cartón dividido en sectores triangulares de distintos colores, atravesado en el centro con un clavo. Cuatro de esos sectores son azules, y los restantes



son rojos. Se hace girar esta perinola y se considera ganador al color que queda apoyado en la mesa (en el dibujo sería el azul). Una persona te propone jugar al siguiente juego: haces girar la perinola, si sale azul le pagas $2, y si sale rojo te paga $3.

a) ¿Cuánto esperas ganar en promedio por cada vez que participes en este juego? ¿Te conviene jugar?
b) ¿Cómo cambiarías el monto de los pagos a realizar para que en promedio nadie gane ni pierda?

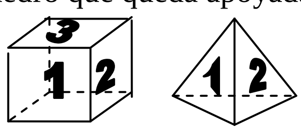
La propuesta es que los alumnos se organicen en grupos de dos, cada uno de ellos cumple el rol de cada participante del juego anterior (el que propone jugar y el que acepta). Deben registrar la pérdida o ganancia en cada mano, y el número de manos jugadas, para poder calcular la ganancia o pérdida promedio en el juego. En base a este registro deben elaborar conclusiones. Se les puede pedir completar la siguiente tabla:

Color	"ganancia" en una mano	Frecuencia	Frecuencia relativa Frecuencia /Nº lanzamientos
Azul			
Rojo			

Del registro realizado surge la noción de ganancia o pérdida promedio como la suma de los productos de cada "ganancia" por su frecuencia, la que se debe dividir en el número de manos jugadas. Si se distribuye el denominador, quedaría expresado en términos de las frecuencias relativas. Esta idea se puede reformular al pensar que cuando se repite muchas veces la experiencia, se puede cambiar la frecuencia relativa por la probabilidad, al usar la convergencia de la primera a la segunda, obteniéndose el concepto de esperanza.
Para que el juego sea justo, es decir, en promedio nadie gane ni pierda, el valor esperado debe ser cero, y en base a esta condición pueden elegir el monto de los pagos a realizar.
Nota: Escribimos ganancia entre comillas porque algunas veces es pérdida.

Actividad 4

Se arrojan un dado, con sus caras numeradas del 1 al 6, y un tetraedro, con sus caras numeradas del 1 al 4, y se observan los números que aparecen en la cara superior del dado y en la cara del tetraedro que queda apoyada en la mesa.



Supongamos que una persona te propone participar en el siguiente juego: Si la suma obtenida es mayor que 6, debes pagarle $7 y en caso contrario, te paga $5. ¿Cuál es tu ganancia esperada? ¿Es justo el juego?
Pueden completar las siguientes tablas, la primera con la suma de los resultados del dado y el tetraedro, y la otra con cada ganancia o pérdida y sus probabilidades:

+	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				
5				
6				

En la tabla anterior pueden contar cuántos resultados favorables hay para cada suma.

"Ganancia"	Probabilidad
-7	
5	

Se puede realizar la experiencia y también se puede preguntar cuál debería ser el monto de las apuestas para que el juego sea justo. La resolución es similar a la actividad anterior.

Actividad 5:

Cuando se juega \$1 a dos cifras en primera a la Quiniela se puede obtener un premio de \$70. Completa la tabla con las "ganancias" posibles y sus probabilidades. ¿Es un juego justo? Interpreta el resultado obtenido.

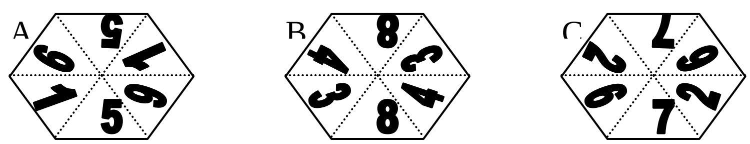
"ganancia"	probabilidad
69	
-1	

Nota**:** la ganancia es 69 y no 70 porque se paga \$1 para participar. Las probabilidades son 0,01 y 0,99 respectivamente, dado que son 100 los resultados posibles y sólo uno, el apostado, el favorable. El valor esperado que se obtiene es -\$0,30. Es decir, que en promedio, hay una pérdida de 30 centavos por cada peso apostado, entre todos los números posibles del 00 al 99.

Esta actividad está orientada a que el alumno pueda realizar una transferencia de lo aprendido a un contexto cotidiano.

Actividad 6:

Tres personas participan de un juego con tres perinolas construidas con los siguientes hexágonos (Rouncefield y Green, 1994):



a) Se sortea una perinola para cada jugador. Si los participantes compiten de a dos, ¿quién tiene más probabilidad de ganar el juego en cada caso?

b) Si juegan A con B, y el perdedor le paga al ganador \$1 por rueda, ¿cuál es la ganancia esperada para B?, ¿es un juego justo?

c) Si juegan A con B, y el perdedor le paga al ganador la diferencia entre el mayor y el menor de los resultados obtenidos, ¿cuál es la ganancia esperada para B?, ¿es un juego justo?

d) ¿En qué consiste la Paradoja de Condorcet? Indique por qué lo observado en este ejercicio es una ilustración de esa paradoja.

En el ítem a) se puede ver, escribiendo todos los resultados posibles, que A tiene más probabilidad de ganar a B (hay cinco casos favorables a A y cuatro a B) y que es más probable que B gane a C (hay cinco casos favorables a B y cuatro a C). En este punto se les pregunta a los alumnos si es más probable que A gane a C o al revés. Seguramente responderán que si A "es mejor" que B, y B "es mejor" que C, entonces A "es mejor" que C. Sin embargo, no es cierto que A tenga más probabilidad de ganar a C, sino al revés (hay cinco casos favorables a C y cuatro a A). Es decir, no hay transitividad. En esto consiste la paradoja de Condorcet.

El ítem b) sirve para ver que para montos de apuestas fijos, en promedio gana el que tiene más probabilidad de ganar en un tiro. Sin embargo, en c) se puede ver que cuando el pago es variable, porque depende del resultado obtenido, no necesariamente gana quien tiene más probabilidad de ganar en un tiro. En este juego, en promedio nadie gana ni pierde. Es decir, pueden notar que la ganancia promedio no sólo depende de la probabilidad de ganar de cada jugador, sino también del monto de la apuesta.

Finalmente, para que el alumno pueda recuperar el concepto de valor esperado en otros contextos, se resuelven otros problemas donde debe transferir el concepto a otras situaciones.

Actividad 7

a) Un productor de papa ha llevado registro de lo que sucedió con la cosecha en la región donde siembra durante muchos años. Sabe que el 10% de las veces se pudrió por exceso de lluvia y perdió toda la producción y por lo tanto su inversión de $50.000, el 25% de las veces el precio estuvo bajo y no ganó ni perdió y el resto de las veces, tuvo una ganancia de $200.000. ¿En promedio, qué ganancia tiene con este cultivo?

b) Una persona desea asegurar su auto, cuyo valor es de $50.000. La compañía aseguradora estima que una pérdida total puede ocurrir con una probabilidad de 0,002, un 50% de pérdida con una probabilidad de 0,01 y un 25% de pérdida con una probabilidad de 0,1. ¿Qué prima deberá cobrar anualmente la compañía aseguradora para tener una utilidad promedio de $500? (Berenson, Levine y Krehbiel, 2001).

El ítem a) no presenta mayores dificultades, ya que sólo es necesario tabular cada "ganancia" con su probabilidad y calcular el valor esperado.

El ítem b) suele presentar más dificultad, dado que es necesario descontar a la prima cobrada p, lo que la compañía debe pagar en caso de siniestro. Por ejemplo, si se produjo una pérdida total, la compañía de seguro pierde lo que cobró de prima menos lo que debe pagar por el siniestro, es decir, p–50.000. Luego se calcula el valor esperado, que se iguala a $500, y se resuelve la ecuación en p resultante, para determinar la prima que se debe cobrar.

Conclusión

Se puede lograr la construcción del concepto de probabilidad a partir de las ideas previas de los alumnos. Aunque estas ideas generalmente son limitadas, incompletas e implícitas, a través del diseño de actividades adecuadas se pueden hacer explícitas, para luego poder confrontarlas con otras situaciones, tomando conciencia de las limitaciones de las mismas, para poder completarlas, corregirlas o reorganizarlas.

El concepto de esperanza matemática se puede construir a partir del análisis de la ganancia en un juego de azar.

Finalmente, se transfieren los conocimientos a nuevas situaciones, pertenecientes a diversos contextos, en especial al contexto del alumno, para facilitarle la recuperación del concepto en diversas situaciones reales.

Referencias Bibliográficas

Batanero C. y Serrano L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, II (5), 15-28.

Berenson M., Levine D. y Krehbiel T. (2001). *Estadística para administración.* México: Prentice Hall.

Grupo Alquerque (2007). La Carrera de Caballos. Recuperado el 20 de abril de 2012 de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RecursosInternet/Juegos/CarreraCaballos.asp

Pozo J., Pérez M., Domínguez J., Gómez M. y Postigo Y. (1994). La solución de problemas. Madrid: Santillana.

Rouncefield, M. y Green, D. (1994). Condorcet´s Paradox. *Teaching Statistics at its Best*. Recuperado el 20 de abril de 2012 de http://www.rsscse-edu.org.uk/tsj/?page_id=422