CONSTRUCCIÓN DE LA DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN. RESULTADOS DE UNA EVALUACIÓN

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral - Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar; aengler@fca.unl.edu.ar; dmuller@fca.unl.edu.ar
Nivel Medio, Terciario y Universitario (ciclo básico)

Resumen

El estudio del cálculo resulta muy abstracto para el alumno y desemboca en problemas para su enseñanza. En relación a la derivada, muchos pueden calcularlas a partir de fórmulas, pero difícilmente comprenden el para qué de los algoritmos que realizan y el significado de los conceptos.

Esta situación plantea la necesidad de la búsqueda de elementos que puedan hacer significativo el aprendizaje de manera que permitan al alumno la construcción de conocimiento.

A partir de una serie de estudios preliminares diseñamos y pusimos en práctica una secuencia didáctica para la introducción de la derivada. No se pretendió un estudio teórico riguroso sino una presentación simple e intuitiva que tenga en cuenta las nociones fundamentales. Tomamos como hipótesis básica que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión.

Con la finalidad de obtener datos que aporten a la valoración de la experiencia, preparamos una serie de actividades que fueron incluidas en el examen parcial con el que debían evaluarse, entre otros, los contenidos desarrollados con la secuencia. Se diseñaron de manera que permitan explorar los avances y obstáculos en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos.

En este trabajo presentamos algunas de estas actividades, un breve análisis de las mismas y un estudio, esencialmente cualitativo, de las respuestas dadas por algunos estudiantes.

Haciendo una revisión general de las respuestas notamos que, a pesar de las dificultades, un buen porcentaje de alumnos mostró manejar diferentes ideas variacionales, otorgando un significado amplio a la derivada.

<u>Palabras clave</u>**:** enseñanza, pensamiento variacional, derivada

Introducción

A pesar de que la determinación de razones de cambio, idea fundamental del cálculo, está presente de una u otra manera en la vida diaria, todo lo relacionado con su estudio resulta muy abstracto para el alumno y genera problemas para su enseñanza. Se observa que, si bien el estudiante logra resolver ejercicios y problemas sencillos, surgen grandes dificultades al momento de ingresar en el campo disciplinar y alcanzar a comprender los conceptos y métodos de pensamiento que rigen este campo de la matemática.

En una investigación sobre la didáctica de la derivada, Dolores (2000) indica que muchos estudiantes pueden obtener derivadas de funciones algebraicas a partir de fórmulas, pero difícilmente comprenden el para qué de los algoritmos que realizan y el significado de los conceptos. En general, la enseñanza del cálculo diferencial no tiene en cuenta el desarrollo de ideas y significados de sus conceptos básicos, imponiendo el predominio del trabajo algorítmico. Discute también el papel que le es conferido a la interpretación geométrica de

la derivada, la cual es abordada como complemento o como una aplicación. Esto no ayuda a revelar la naturaleza del concepto ligada a fenómenos de la rapidez de la variación.
Al privilegiar el contexto algebraico se deja de lado la posibilidad de construir conocimiento a partir de la movilidad entre las diferentes representaciones del concepto. Es conocido que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas pero, muchas veces, no se tiene en cuenta la necesidad de coordinar distintos sistemas de representación como condición imprescindible para que haya aprendizaje (Duval, 2008). Esto produce limitaciones en el desarrollo de uno de los estilos de pensamiento, el visual.

Diversas investigaciones en Educación Matemática nos proporcionan ejemplos sobre problemas de aprendizaje y el papel de la visualización en la comprensión del cálculo (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003). Si bien se reconoce su importancia a fin de favorecer la comprensión matemática, existe una gran resistencia de los alumnos a visualizar. Eisenberg y Dreyfus (1991) opinan que las causas por las que los estudiantes evitan la visualización están relacionadas con distintos aspectos. Por un lado la visualización demanda actividades cognitivas superiores a las que exige pensar algorítmicamente. Por otro, los aspectos visuales no son utilizados para comunicar las ideas matemáticas ya que éstos suelen ser considerados como secundarios al concepto mismo. Estos autores opinan que muchas de las dificultades del cálculo se superarían si se enseñara a los estudiantes a interiorizar las connotaciones visuales de los distintos conceptos.

La situación descrita plantea la necesidad de la búsqueda de elementos que puedan hacer significativo el aprendizaje de manera que permitan al alumno la construcción de conocimiento. Enmarcados en este contexto nos propusimos tomar uno de las nociones básicas del cálculo diferencial, la derivada. Indagamos la construcción de este concepto cuando se formulan actividades articuladas en torno a la idea de variación y cambio, que promueven el manejo y la utilización de diversos sistemas de representación.
La base teórica en la que se fundamenta nuestro trabajo es la del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Como parte del pensamiento matemático avanzado, el pensamiento variacional comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio y los procesos de pensamiento. Tiene en cuenta además, la necesidad de analizar la relación de los saberes con prácticas socialmente compartidas y con sentidos y significados extra matemáticos.

> El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral y cols., 2003, p. 185).

A partir de una serie de estudios preliminares diseñamos y pusimos en práctica una secuencia didáctica para la introducción de la derivada.

La secuencia didáctica

Con la propuesta no se pretendió un estudio teórico riguroso de la derivada sino una presentación simple e intuitiva que tenga en cuenta las nociones fundamentales. Tomamos como hipótesis básica que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión. La idea es, siguiendo a Dolores (2007, p. 198):

> ...ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.

Se decidió partir de las concepciones previas que tienen los alumnos acerca de la velocidad, utilizar las representaciones gráficas de las funciones para visualizar ideas, en especial la de razón de cambio media como pendiente de una recta.

La interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente a una curva en un punto constituye un aspecto fundamental en su construcción. Sin embargo, su presentación como un proceso de aproximación de una secante a la tangente, resulta de gran dificultad didáctica (Dolores, 2007). Se pretende resaltar la manera en la que la pendiente de una curva está relacionada con la razón de cambio.

Las actividades se presentan en registros diferentes y requieren las traducciones entre los mismos. La noción de pendiente es tratada en un primer momento desde un punto de vista gráfico. La de razón permite el cálculo numérico y su relación con la pendiente. La secuencia considera, en un camino a la abstracción, la generalización mediante las expresiones algebraicas. Con su resolución se pretende que los alumnos:

- Realicen un acercamiento a las nociones de velocidad media e instantánea.
- Calculen razones de cambio medias.
- Reconozcan la necesidad de emplear intervalos cada vez más pequeños para hallar la velocidad instantánea.
- Identifiquen la razón de cambio media como la pendiente de la recta que une dos puntos.
- Descubran la necesidad de realizar el paso al límite para calcular la velocidad instantánea y que la asocien a la pendiente de la recta tangente.

La secuencia se desarrolló en tres clases consecutivas. Dado el carácter social del conocimiento matemático escolar y el reconocimiento de la importancia del papel de las interacciones sociales en la construcción del conocimiento, se decidió privilegiar las prácticas compartidas, de manera de proporcionar a los alumnos el ámbito para contrastar significados, ya sea en grupos pequeños como en la discusión de la clase completa. Al finalizar cada clase, se revisaron las distintas actividades aprovechándolas para formalizar.

El cuestionario de contenidos

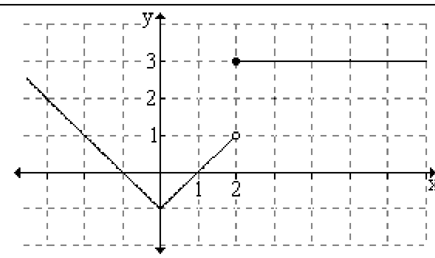
Con la finalidad de obtener datos que aporten a la valoración de la experiencia, preparamos una serie de actividades que fueron incluidas en el examen parcial con el que debían evaluarse, entre otros, los contenidos desarrollados con la secuencia. Esta evaluación forma parte de la currícula y es condición obligatoria para regularizar la asignatura.

Las actividades se diseñaron para explorar los avances y obstáculos en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos. Específicamente indagamos sobre el comportamiento variacional de las funciones relacionado a la noción de derivada. Pretendemos además identificar el tratamiento en los registros de representación verbal, numérico, gráfico y analítico, así como si existen rasgos de conversión entre ellos.

A continuación presentamos algunas de las actividades, un breve análisis de las mismas y un estudio, esencialmente cualitativo, de las respuestas dadas por 16 alumnos.

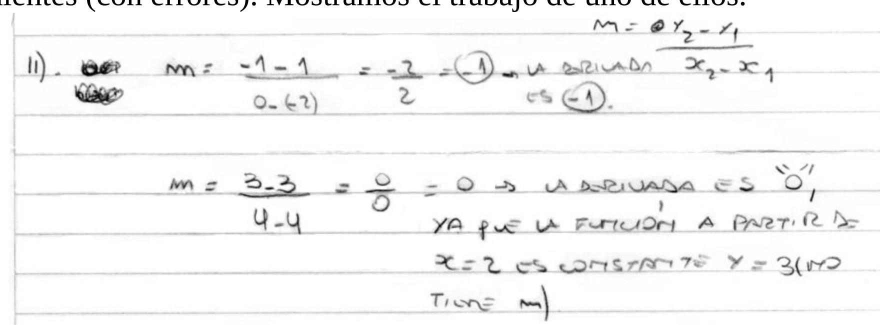
Pregunta

Dada la función y = f(x) definida gráficamente, determine la derivada en x = –2 y x = 4. Explique cómo la obtiene.



Se presenta una función por tramos y se pide el cálculo de la derivada en dos valores del dominio. Los mismos se pueden deducir fácilmente, sin ningún cálculo, a partir del análisis gráfico del comportamiento variacional de la función. Esto exige que los alumnos hagan la correlación entre la recta que representa una situación de cambio constante, la pendiente de la recta como la medida de la razón de cambio constante y la derivada (razón de cambio instantánea) coincidiendo con ese valor. Por los temas desarrollados hasta el momento del parcial, pueden también convertir al registro analítico, determinando la ley de la función y calcular la derivada en cada punto, aplicando definición o reglas prácticas.

Analizando las respuestas, notamos que sólo dos alumnos parecen recurrir al comportamiento variacional de la función. Determinan la pendiente de la ecuación de la recta correspondiente a cada tramo y la asocian al valor de la derivada. Observamos que, aunque no era necesario porque los datos estaban dados gráficamente, realizan los cálculos de las pendientes (con errores). Mostramos el trabajo de uno de ellos.



La mayoría (11 alumnos, o sea el 68, 75%), recurre al registro algebraico para trabajar. Obtienen la ley de la función y calculan la derivada en cada punto aplicando definición y/o reglas prácticas. Cuatro de ellos cometieron errores diversos (signos, mal la ley de la función, cálculo del límite, incoherencias en la explicación).

Un alumno da otra respuesta pero equivocada. Dos alumnos no contestaron esta pregunta.

No consideramos que no conozcan (por lo menos todos los alumnos) la relación con el comportamiento variacional de este tipo de función, sino que les resulta más sencillo trabajar analíticamente o bien se sienten más seguros justificando en este contexto.

Pregunta

Una epidemia azota a los habitantes de una ciudad y los médicos estiman que la cantidad de personas enfermas t días después del principio de la epidemia está dada por e(t).

i) Explique el significado de e(30) = 2700 y e' (30) = 90 en la situación planteada.

ii) ¿Por qué es significativo el signo de e' (30)?

A partir de una situación de cambio presentada en los registros verbal y analítico se pide a los alumnos el significado del valor numérico de la función que la modela en un punto y del valor de la derivada de la función en el mismo punto. Esto permite analizar qué conocen respecto de la información que proporciona la derivada acerca de la función, además del significado del signo de la derivada. Esperamos que los alumnos recurran a la interpretación física de la derivada, para explicar su significado en el problema.

Analizamos las dos últimas cuestiones que son las que ocasionaron más dificultades.

Con respecto a e'(30) = 90, el 50% de los alumnos da una respuesta aproximada. Uno de ellos escribió: *"A los 30 días de iniciada la epidemia la enfermedad se está propagando a razón de 90 personas por día"*.

Seis alumnos (37,5%) responden incorrectamente. Cinco de ellos confunden el valor de la derivada con la imagen de la función en dicho punto. Uno expresó: "*La cantidad de personas enfermas a los 30 días es 90"*.

Dos alumnos no respondieron.

Para el significado del signo de la derivada, seis alumnos (37,5%) se acercan a la respuesta. Uno escribió: *"El signo muestra que la cantidad de personas enfermas está aumentando ya que es positivo"*.

Ocho alumnos (50%) dieron respuestas incorrectas.

Tres de ellos confunden la interpretación del signo de la derivada con el crecimiento de la velocidad, o sea de la función derivada. Una de las respuestas fue: *"La derivada es positiva porque la velocidad con que se están enfermando las personas está creciendo"*.

Otros tres fueron coherentes con la respuesta del punto anterior (dado que la derivada representa cantidad de personas enfermas, no puede dar un número negativo). Un alumno no respondió este inciso.

Destacamos que, a pesar de las dificultades observadas y si bien algunos en sus explicaciones se refieren en primer lugar a la derivada como la razón de cambio instantánea y relacionan el signo de la misma con una función creciente, la mayoría intenta referirse al enunciado del problema, utilizando términos variacionales que describen el fenómeno.

En relación a los registros, todos los alumnos explicaron verbalmente, utilizando algunos la misma simbología presentada en el enunciado de la pregunta.

Pregunta

Se le suministra suero a un paciente, inyectándole un medicamento para combatir cierta deficiencia en la sangre. La cantidad de medicamento inyectado (en miligramos) está dado por $s(t) = 0{,}01t^{\frac{2}{3}}$ donde t está expresado en segundos.

i) ¿Cuánto medicamento se inyectó entre los 60 y los 120 segundos?

ii) ¿Cuál es la razón de cambio media de la cantidad de medicamento inyectado con respecto al tiempo durante el segundo minuto?

iii) Para que el medicamento tenga efecto, al cabo de 64 segundos se debe estar suministrando al paciente un mínimo de 0,0015 miligramos por segundo. ¿Se cubre este requerimiento? ¿Por qué?

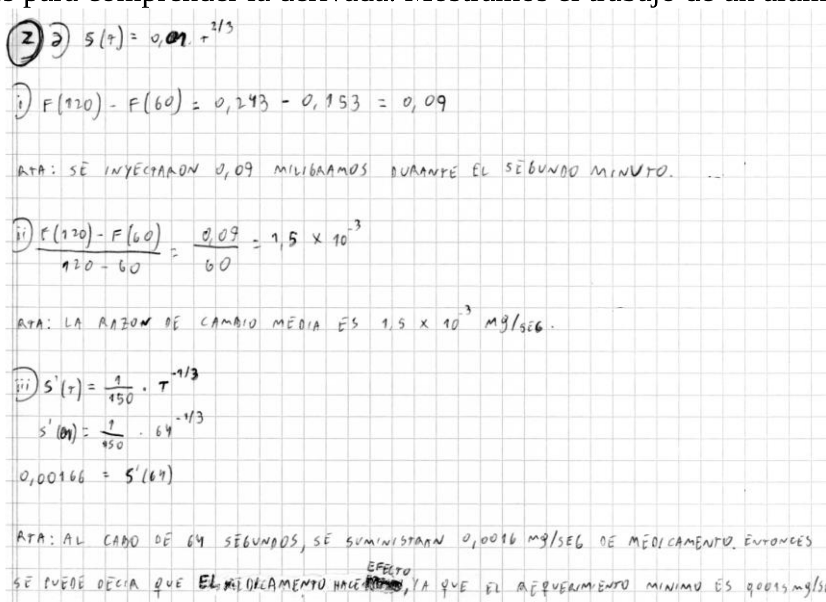
Esta actividad explora, a partir de la expresión algebraica de una función, la interpretación de una situación específica de cambio. Se trata de identificar el tratamiento en los registros verbal y analítico así como la conversión de uno a otro y también al registro numérico.

En el primer inciso, 12 alumnos (75%) logran interpretar la situación e identificar que necesitan determinar el cambio de la variable dependiente en el intervalo [60, 120].

En el segundo punto se indaga sobre la determinación numérica de la razón de cambio media en el intervalo [60, 120]. Catorce alumnos (87,5%) escriben correctamente la fórmula necesaria. De ellos, dos no interpretan los datos del problema y plantean mal.

El tercer inciso requiere identificar en el enunciado la necesidad de calcular la derivada para obtener a qué ritmo está cambiando la función en determinado instante. Fue razonado correctamente por 11 alumnos (68,75%). Uno no respondió y los cuatro restantes cometieron diversos errores.

Revisando todas las evaluaciones encontramos que interpretaron en mayor o menor medida lo requerido en los distintos incisos. En un fenómeno de cambio en el que se plantea la expresión algebraica de una función, realizan un tratamiento adecuado en los registros verbal y analítico, así como la conversión de uno a otro y al numérico, de distintos aspectos fundamentales para comprender la derivada. Mostramos el trabajo de un alumno.


2) a) $S(t) = 0{,}01 \cdot t^{2/3}$

i) $F(120) - F(60) = 0{,}243 - 0{,}153 = 0{,}09$

RTA: SE INYECTARON 0,09 MILIGRAMOS DURANTE EL SEGUNDO MINUTO.

ii) $\frac{F(120) - F(60)}{120 - 60} = \frac{0{,}09}{60} = 1{,}5 \times 10^{-3}$

RTA: LA RAZON DE CAMBIO MEDIA ES $1{,}5 \times 10^{-3}$ mg/SEG.

iii) $S'(T) = \frac{1}{150} \cdot T^{-1/3}$

$S'(64) = \frac{1}{150} \cdot 64^{-1/3}$

$0{,}00166 = S'(64)$

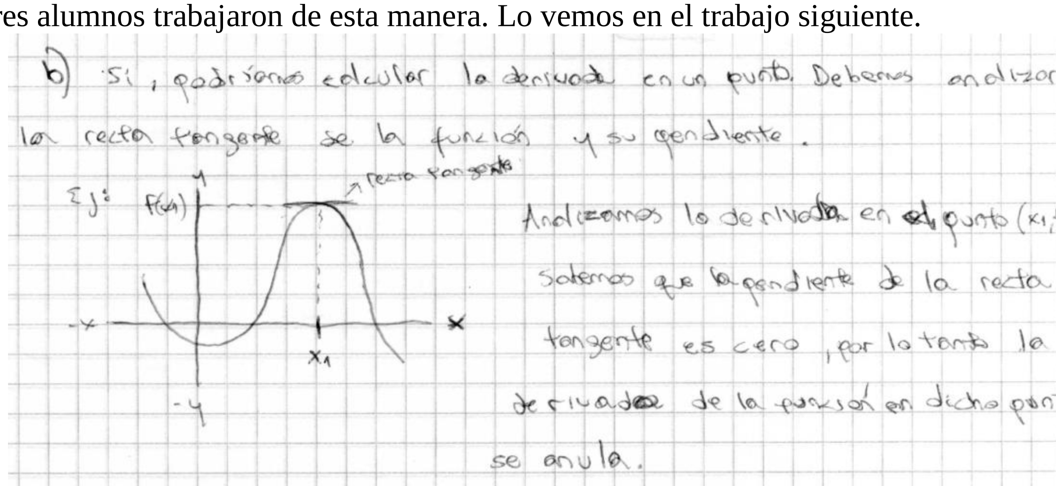
RTA: AL CABO DE 64 SEGUNDOS, SE SUMINISTRAN 0,0016 mg/SEG DE MEDICAMENTO. ENTONCES SE PUEDE DECIR QUE EL MEDICAMENTO HACE EFECTO, YA QUE EL REQUERIMIENTO MINIMO ES 0,0015 mg/SE

Pregunta

Disponemos de la representación gráfica de una función f y nos piden que calculemos la derivada de f en un punto, ¿podríamos hacerlo? En caso afirmativo, explique cómo lo haría y muestre con un ejemplo.

La pregunta planteada en el registro verbal, indaga acerca de la interpretación geométrica de la derivada en un punto como la pendiente de la tangente a la gráfica en dicho punto. Esperábamos que los alumnos expliquen verbalmente, apoyándose en el registro gráfico.

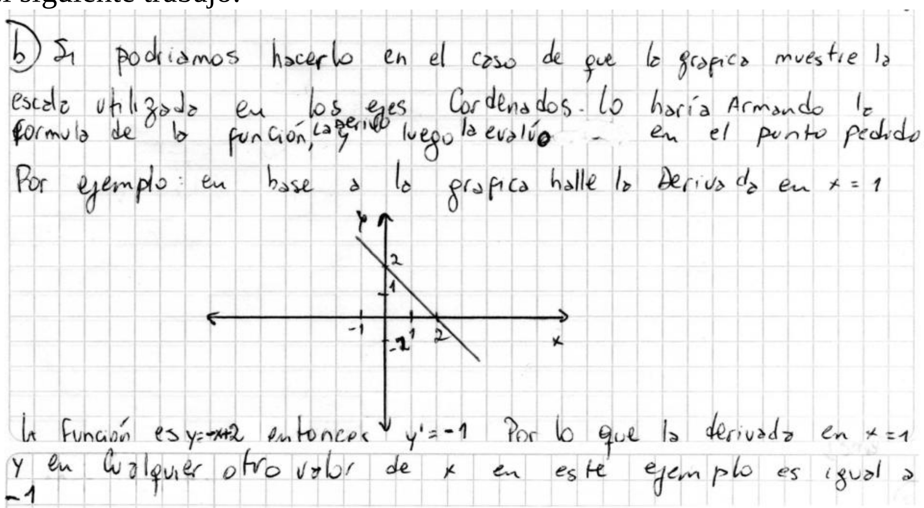
Tres alumnos trabajaron de esta manera. Lo vemos en el trabajo siguiente.


b) Si, podríamos calcular la derivada en un punto. Debemos analizar la recta tangente de la función y su pendiente.

Ej:

Analizamos la derivada en el punto $(x_1, f(x_1))$ sabemos que la pendiente de la recta tangente es cero, por lo tanto la derivada de la función en dicho punto se anula.

Aprovechan el cuadriculado de la hoja para determinar la pendiente y asocian estos valores a la derivada, mostrando mucha claridad en sus explicaciones y ejemplos.
Otros dos alumnos relacionan la derivada con la recta tangente o con una pendiente pero de manera incorrecta.
Observamos que casi el 50% (siete alumnos) transitó del registro gráfico al analítico. Dibujaron la gráfica de una función sencilla, obtuvieron su ley y calcularon la derivada. Es el caso del siguiente trabajo:



b) Si podríamos hacerlo en el caso de que la grafica muestre la escala utilizada en los ejes Cordenados. Lo haría Armando la formula de la función, la derivo luego la evalúo en el punto pedido.
Por ejemplo: en base a la grafica halle la Derivada en $x = 1$

La Función es $y = -x+2$ entonces $y' = -1$ Por lo que la derivada en $x = 1$ y en cualquier otro valor de x en este ejemplo es igual a -1

Finalmente, cuatro alumnos no respondieron esta pregunta.

Conclusiones

Haciendo una revisión general de las actividades notamos que, a pesar de las dificultades, un buen porcentaje de alumnos mostró conocer diferentes ideas variacionales. Observamos un manejo aceptable de la derivada. Los alumnos dieron evidencias de poder relacionar, interpretar y utilizarla correctamente como:

- La velocidad instantánea. Convirtieron del registro simbólico al verbal y dieron el significado en la situación planteada. También convirtieron del registro verbal al simbólico interpretando como una velocidad instantánea y relacionando con la derivada.
- La pendiente de la recta tangente. Los resultados fueron mejores en el caso de que la actividad estaba planteada en el registro gráfico.
- Un límite. En las distintas preguntas que se indaga sobre la definición de derivada, los resultados fueron buenos, ya sea en el reconocimiento o su aplicación en el cálculo.

En relación a la interpretación del signo de la derivada, los resultados fueron mejores cuando el enunciado de la actividad los llevó a interpretar geométricamente. Aproximadamente la mitad de los alumnos dio una respuesta aceptable. Explicaron en el registro verbal y mostraron gráficamente, dibujando una función que cumple determinadas condiciones dadas. Los porcentajes de respuestas correctas fueron menores cuando tuvieron que explicar relacionando con la interpretación física.
Con respecto a los sistemas de representación, observamos que manejaron adecuadamente los diferentes registros según lo solicitado en las distintas preguntas, pero se nota preferencia por el trabajo algebraico y algorítmico.
Por ejemplo en la primera pregunta, no recurrieron a explicar el valor de la derivada según el comportamiento variacional de la función. Tuvieron necesidad de escribir la ley y calcular la derivada por reglas prácticas. Lo mismo notamos en la última pregunta. No

razonaron en el registro gráfico. Si bien utilizaron este registro en otras actividades para explicar no lo usaron en estos casos para obtener información variacional.

Dada una función sencilla definida analíticamente (problema de suministro de suero a un paciente), demostraron bastante dominio del registro algebraico para obtener los cambios así como para calcular la razón de cambio instantánea evaluando el límite.

En cambio les costó mucho interpretar los resultados obtenidos en esos incisos. Los porcentajes más bajos se obtuvieron en los que se trabajaron expresiones simbólicas.

Consideramos que estos resultados confirman lo reportado por otras investigaciones (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Los alumnos están más acostumbrados a utilizar procedimientos analíticos y algorítmicos, dejando de lado los argumentos visuales, que además, son de mayor dificultad cognitiva. Consideran que estos aspectos son los esenciales y de esa manera trabajan también en las evaluaciones.

Los resultados obtenidos nos indican que han logrado visualizar en mayor o menor medida los conceptos en juego. Las respuestas muestran que han representado, transformado, generado, comunicado y reflejado información visual, aspectos requeridos en la definición de visualización (Cantoral y cols., 2003). Esto les permitió construir y otorgar un significado a los conceptos que además lograron plasmar en el papel.

Todos los aspectos mencionados exigen y, a su vez favorecen, el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos, en particular de su pensamiento variacional. Como expresan Cantoral y cols. (2003), el desarrollo de este tipo de pensamiento necesita de procesos temporalmente prolongados, que supone el dominio e integración de distintos campos numéricos y geométricos, además de la comprensión de procesos específicos complejos como son el paso al límite, la noción de variación y de variable, entre otros. Esto no se produce de manera instantánea. Las situaciones problemáticas que necesitan de un tratamiento variacional ayudarán a que el alumno, al enfrentarse a ellas, desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, pero es necesario ir incorporando a lo largo de distintas etapas actividades que lleven a su desarrollo.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J. Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal, ICME-8.* (pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2007). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* (pp. 2-25). México: Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring, and F. Seeger (eds.). *Semiotics in mathematics education: epistemology, historicity, classroom, and culture*. Rotterdam, NL, Sense, pp. 39–62.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). Visualization and calculus reform. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Ed.). *Visualization in teaching and learning mathematics.* (pp. 121-126). Washington: Mathematical Association of America.