Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

ESTUDIO DE ALGUNOS ENGAÑOS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA DE LA MATEMÁTICA (SOFISMAS O FALACIAS, INTRODUCCIÓN A LOS FRACTALES)

BARRETO Julio

Unidad Educativa “José Antonio Sosa Guillen”. Municipio La Trinidad. Unidad Educativa “José Antonio Páez”. Municipio Boraure Estado Yaracuy

juliocbarretog@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo analizaremos más casos engañosos que se originan cuando se estudia la geometría y que son llamados sofismas o falacias, las cuales debemos tener presente al momento de hacer ciertas deducciones para no caer en conclusiones falsas cuando se estudian ciertas situaciones geométricas. Estas falacias son unos argumentos o razonamientos falsos a pesar de una apariencia de verdad y que conducen a conclusiones erróneas, muchas veces se cometen en teorías que son muy importantes en las matemáticas como son por ejemplo al momento de razonar sobre las longitudes de los lados de un determinado triangulo o cualquier figura geométrica o inclusive en aritmética cometemos falacias. Además, analizaremos la teoría de la continuidad y el infinito a través de intuiciones geométricas que están estrechamente relacionadas con procesos denominados potencialmente infinitos y que se generan al ir realizando particiones sucesivas sobre líneas rectas, cuadrados o rectángulos e inclusive sobre figuras geométricas que generan los denominados fractales, para que luego a través del infinito actual generar soluciones analíticas teniendo como base fundamental el estudio de la didáctica del análisis matemático como propuesta en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, estudiaremos a los fractales tomando en cuenta Barreto (2011), teniendo en cuenta que estas estructuras geométricas que combinan irregularidad y estructura están presentes en diversas formas geométricas del estudio del análisis, así como en otras formas naturales.

Palabras Clave: Geometría, Didáctica del Análisis Matemático, Sofismas, Fractales.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

INTRODUCCIÓN

Destaquemos que el constructivismo es una corriente pedagógica creada por Ernst Von Gasersfed, basándose en la teoría del conocimiento constructivista, que postula la necesidad de entregar al alumno herramientas que le permitan crear sus propios procedimientos para resolver una situación problemática, lo cual implica que sus ideas se modifiquen y siga aprendiendo. En este sentido el constructivismo educativo propone un paradigma en donde el proceso de enseñanza se percibe y se lleva a cabo como un proceso dinámico, participativo e interactivo del sujeto (que en este caso es el estudiante), de modo que el conocimiento sea una auténtica construcción operada por la persona que aprende.

Tengamos en cuenta que el enfoque de investigación de esta metodología se caracteriza por ser holístico, inductivo, ideográfico, y se puede entender como un continuo que admite una gran flexibilidad en el diseño de las diferentes fases que lo configuran. En este artículo se pretende que los estudiantes logren reforzar los conocimientos y dar alerta sobre la existencia de ciertas falacias que les pueden llevar a conclusiones falsas, sin embargo ciertas construcciones geométricas les puede ayudar a hacer ciertas deducciones o inducciones que permiten llegar a las demostraciones deseadas a través de construcciones.

Tengamos en cuenta que Piaget (1896-1980) destaco que: En la etapa de las operaciones formales (De los 11 años en adelante) los adolescentes pasan de las experiencias concretas reales a pensar en términos lógicos más abstractos. Son capaces de utilizar la *lógica propositiva* para la solución de problemas hipotéticos y para derivar conclusiones. Son capaces de emplear el *razonamiento inductivo* para sistematizar sus ideas y construir teorías sobre ellas; pueden usar el *razonamiento deductivo* para jugar el papel de científicos en la construcción y comprobación de teorías. Pueden usar un *lenguaje metafórico* y *símbolos algebraicos* como símbolos de símbolos. Pueden hacer planes en *teorías cognoscitivas* en la etapa de desarrollos formales y por tanto no debemos subestimarlos al momento de enseñarles los contenidos matemáticos que van desde lo más elemental a lo más abstracto.

Cuando nos referimos a *procesos cognitivos* implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

proceso de abstracción el cual consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente a parte de otros procesos cognitivos de componente matemática.

La progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente mas psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Falacias y Sofismas Geométricas

La *Falacia* se define como engaño y *Sofisma* es un “Falso razonamiento para inducir a error”, “Argumento, razonamiento falso a pesar de una apariencia de verdad”. Engañar es dar una apariencia de verdad a lo que es mentira, y por tanto entenderemos en matemática a falacia y sofisma como sinónimos y con el significado de que mediante un *razonamiento* falso, pero aparentemente verdadero se obtiene una conclusión falsa la cual proviene de un error en el razonamiento que a veces no es fácil detectar, que puede no ser inmediato de percibir. Veamos los siguientes ejemplos que debemos tener presente para evitar errores:

(a) “Demostrar” que en todo triángulo la longitud de un lado es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Solución: Consideremos el triángulo ABC y los puntos medios de sus lados A_1, B_1 y C_1 como se muestra en la **Figura 1**:

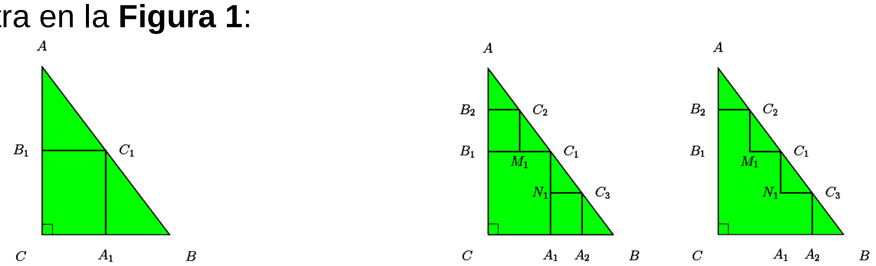


Figura 1: A la izquierda la primera configuración del ejemplo anterior y en el centro y a la derecha se muestran otras configuraciones sobre el triangulo rectángulo.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Donde la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al otro lado. Al unir los puntos A_1 y B_1 con C_1 se obtiene la poligonal $AB_1C_1A_1B.$ Demostremos que la longitud de esta poligonal es igual a $\overline{AC} + \overline{CB}.$

En efecto, como $B_1C_1A_1C$ es un paralelogramo, entonces $\overline{B_1C_1} = \overline{CA_1}$ y $\overline{C_1A_1} = \overline{B_1C},$ y como además, $\overline{AB_1} + \overline{B_1C} = \overline{AC}$ y $\overline{CA_1} + \overline{A_1B} = \overline{CB}$ tenemos que:

$$\overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1A_1} + \overline{A_1B} = \overline{AB_1} + \overline{CA_1} + \overline{B_1C} + \overline{A_1B} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

De manera análoga en la **Figura 1** en el centro procedemos con los triángulos AB_1C_1 y $C_1A_1B,$ obtenemos la poligonal $AB_2C_2M_1C_1N_1C_3A_2B$ cuya longitud se demuestra, con un *razonamiento* semejante, que es igual a $\overline{AC} + \overline{BC}.$ Si seguimos con este proceso indefinido, observamos en las sucesivas configuraciones como las de la **Figura 1** a la derecha que los lados de las poligonales obtenidas se hacen cada vez mas pequeñas y sus vértices "tienden" a estar en el segmento $\overline{AB},$ pero la longitud de las poligonales es siempre igual a $\overline{AC} + \overline{CB}.$ Luego, en el "límite" la poligonal que se obtiene es el lado $\overline{AB}$ y por consiguiente $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}.$ De una explicación al por qué de esta conclusión falsa proveniente de un *razonamiento* aparentemente correcto y de observaciones *visuales*.

Sugerencia: Obtenga una sucesión de poligonales $\{L_n\}_{n\geq 1},$ la cual es una sucesión constante con valores iguales a $L = \overline{AC} + \overline{BC};$ luego el "límite" cuando "n tiende a infinito" es la misma constante $L,$ distinta de $\overline{AB}.$

Revisar Barreto (2008) y ver que se cumple es la relación Pitagórica: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2.$ Además la relación de los triángulos dice que la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercer lado.

(b) Mediante un "Razonamiento" análogo "Demuestre que" $\sqrt{2} = 2.$

La Matemática, en y para la vida
COVEM 2013
VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

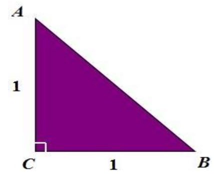


Figura 2: Triángulo isorrectángulo (triángulo isósceles y rectángulo, cuyos lados que forman el ángulo recto denominados catetos son iguales y en este caso a la unidad).

(c) Otra falacia de tipo geométrico es el siguiente: "La longitud de cualquier semicircunferencia es igual a su diámetro."

Sugerencia: Razone considerando la semicircunferencia dibujada abajo de centro en O y diámetro $\overline{AB} = 2R.$ Veamos la **Figura 3**:

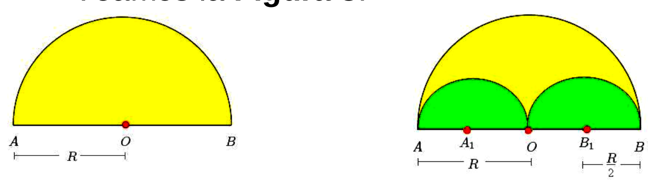


Figura 3: Primera y segunda configuración del ejemplo anterior.

Realice las configuraciones siguientes y vea que las semicircunferencias obtenidas tienen longitudes cada vez mas pequeñas y que la curva compuesta por la reunión de todas ellas "tienden" a confundirse con el segmento $\overline{AB}$ y como la suma de las longitudes de todas esas semicircunferencias es igual a $\pi R,$ entonces tenemos que $\pi R = \overline{AB}.$ La "longitud de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ es igual a su diámetro". Además, como $\overline{AB} = R,$ entonces del resultado anterior obtenemos que $\pi = 2.$ ¿Cómo se explica esta falacia?

Ahora veamos algunas falacias aparente que han surgido revisando un poco la historia de la matemática, estas falacias son comúnmente llamadas paradoja (Idea extraña o irracional que se opone al sentido común y a la opinión general) por un filósofo griego que vivió unos 4 siglos antes de Cristo llamado Zenón. Es conocido por sus **paradojas**, algunas de las cuales niegan la existencia del movimiento. Zenón intentó probar que el espacio no está formado por elementos discontinuos y, concretamente, que no existe el movimiento.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

A veces las representaciones gráficas nos ayudan a la demostración de muchos teoremas; y nos pueden servir de orientación, de guía, en la demostración; nos suministran las “intuiciones geométricas” que nos servirán para formular teoremas y demostraciones.

(a) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación en analogía con las paradojas de Zenón, en donde partimos de una barra de longitud 1 (una unidad) y luego dividámosla sucesivamente por mitades, veamos la **Figura 4**:

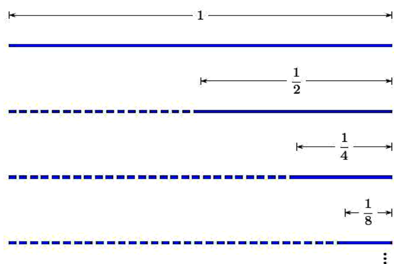


Figura 4: Partición de una barra de longitud 1 (una unidad de medida) en una sucesión de mitades cada vez más pequeñas.

i. Estas *construcciones* geométricas “*sugieren*” cuál puede ser el valor de la siguiente “suma infinita” (Prueba Gráfica): $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$

Justificación de la respuesta anterior: La suma de todos los pedazos obtenidos en la barra es igual a la longitud total de la misma. Por lo tanto, esto “sugiere” que esa suma infinita de partes de la unidad es igual a la unidad.

ii. Demuestre analíticamente la validez de la respuesta que diste en la parte i.

Sugerencia: Forme la progresión geométrica: $a_n = a_1 r^{n-1}$. Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón de la progresión. Además, la suma finita viene dada por: $s_n = \frac{a_1(1-r^{n-1})}{1-r}$. Con $a_1 \neq 0$. Cuando la suma es infinita[3] es llamada

[3] El símbolo sumatoria $\sum$ es la decimoctava letra del alfabeto griego (Letra Griega Mayúscula Sigma) se utiliza para escribir de manera abreviada una suma. Por ejemplo si queremos escribir

La Matemática, en y para la vida
COVEM 2013
VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

serie geométrica y escribimos $\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k$. (Verifique cuando ocurre la convergencia de esta serie).

(b) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación, en donde partimos de un cuadrado de lado 1 (una unidad) y luego vamos tomando puntos medios de los lados de los cuadrados y rectángulos que se van obteniendo sucesivamente, como observamos en los dibujos de la **Figura 5**:

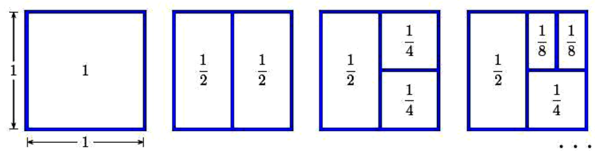


Figura 5: Partición de unos cuadrados o rectángulos, partiendo de un cuadrado de lado 1 (una unidad de medida) y se forman una sucesión de mitades cada vez más pequeñas.

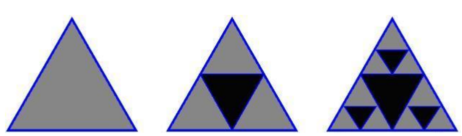
i. ¿Qué indican los números colocados en esos cuadrados y rectángulos?

ii. Dibuja las figuras geométricas que se obtienen en las dos iteraciones que siguen.

iii. Las figuras antes dibujadas "sugieren" cuál puede ser el valor de la siguiente "suma infinita" (Prueba gráfica): $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$

iv. Demuestre analíticamente la validez de la respuesta que diste en la parte **iii**.

(c) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación, en donde partimos de un triángulo equilátero que tiene área A, véase la **Figura 6**:



$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ utilizando la notación $\sum$ la hacemos así $S =$. En lugar de utilizar el índice j, podemos usar otro índice cualquiera.

COVEM 2013 VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Figura 6: A la izquierda notamos el estado inicial, es decir el triángulo equilátero sin ninguna iteración. En el centro tenemos la primera iteración[4] construyendo cuatro triángulos congruentes dibujando el "situado mas al centro" en negro o en un tono de este y continuando con el proceso en cada uno de los triángulos que habríamos dibujado en gris tenemos a la derecha la segunda iteración.

La figura así obtenida por iteración es un FRACTAL[5], denominado TRIÁNGULO O FRACTAL DE SIERPINSKI (polaco, 1882-1969).

Denotemos por $\{A_n\}_{n\geq 0}$ la suma de las áreas de los triángulos dibujados en negro en la n-ésima iteración $(n \geq 1)$ siendo $A_0 = A$ el área del triángulo inicial. Calcula A_1, A_2, A_3. ¿Cuál supones que puede ser el término n-ésimo A_n en función de A y de n? Calcule $\{A_n\}_{n\geq 0}$ cuando n tiende a Infinito $(n \to \infty)$. **Sugerencia:** $\lim_{n\to\infty} b^n = 0, \text{ si } |b| < 1.$

(d) Podemos hacer una "comprobación geométrica" (no es una demostración) para la suma de los primeros números impares la cual proviene de la época de Pitágoras.

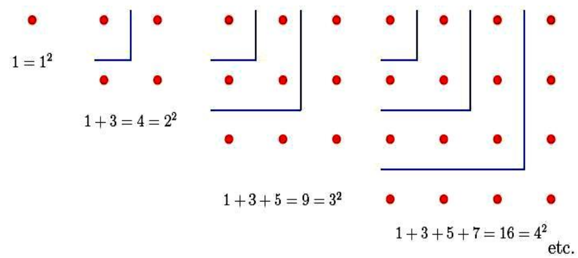


Figura 7: Comprobación geométrica de la suma de los primeros números impares.

Esta *construcción* geométrica sugiere el resultado n^2, es decir, si la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética es: $S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$. Entonces, $S_n = n^2$.

CONCLUSIÓN

[4] Iterar significa repetir o reiterar. Iteración es la repetición de acciones análogas.

[5] Es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975. Son estructuras geométricas que combinan irregularidad y estructura, presentan auto-similitud en diferentes escalas o detalles.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Durante la aplicación de estas actividades se observó que los estudiantes tenían mayor entusamos y motivación por el estudio de la matemática, ya que lograron deducir ciertas teorías que en general siempre se memorizan sin entender realmente que es lo que es importante y sobre todo el saber para que les sirve y donde aplicarlos en la vida real. Además, construyeron las diversas teorías matemáticas, lo cual implica la adquisición de un aprendizaje significativo en nuestros estudiantes, compartiendo en uniones grupales y profundizando en el estudio de ciertos sofismas geométricos en los cuales muy comúnmente cometen muchos errores, así como en paradojas y fractales aquí mostrados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barreto, J. (2008). Deducciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Revista Números* (69). Recuperado el 14 de julio de: www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.pdf.

Barreto, J. (2011). Estudio de algunos engaños en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la didáctica de la matemática (introducción a los fractales). *Revista Suma,* 67, p. 47-56.

Orellana, M. (2000). *Pensamiento Matemático y Modelando con Matemática*. Matemática II (179). Módulo IV. UNA Caracas, Venezuela.