COVEM 2013 VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
La Matemática, en y para la vida
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

UNA PROPUESTA ANALIZAR LOS EFECTOS GEOMÉTRICOS EN CURVAS DEFINIDAS POR LA EXPRESIÓN $f(x) = e^{ax}$ CON GEOGEBRA

CASTILLO Luis Andrés y **PRIETO** Juan Luis

luis.castillo@aprenderenred.com.ve; juan.prieto@aprenderenred.com.ve

Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Maracaibo, Edo. Zulia.

Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (**CEMAFI**)-**LUZ**, Maracaibo, Edo. Zulia.

RESUMEN

Desde hace algún tiempo se sabe que la integración eficiente de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas es un asunto complejo para los profesores, debido en parte a las dificultades que éstos tienen para establecer relaciones entre los contenidos matemáticos, las actividades y el funcionamiento técnico del recurso tecnológico que se seleccione, en especial de los programas informáticos. Con el propósito de ayudar a superar estas dificultades de los profesores, en el siguiente trabajo se presenta una secuencia de análisis del comportamiento geométrico de la función exponencial, definida por la expresión $f(x) = e^{ax}$, que se apoya en el uso del software libre GeoGebra. Tal secuencia permite la caracterización de familias de curvas correspondientes a la expresión anterior, a partir del análisis de los efectos geométricos de "deformación" y "reflexión" experimentados por las curvas tras la variación del parámetro a. El análisis se acompaña con el uso de algunas herramientas del GeoGebra que son de gran utilidad para los procesos de caracterización de las gráficas de la función exponencial natural. Teniendo en cuenta lo anterior, se describe la secuencia en dos momentos que se corresponden con los efectos analizados, los cuales explican cómo utilizar las herramientas del GeoGebra para visualizar y relacionar los cambios experimentados por las curvas y las expresiones algebraicas correspondientes. Consideramos que la aplicación de esta secuencia puede conducir a mejoras en la praxis de los profesores con interés en el uso del GeoGebra, ya que al recorrer los aportes que esta propuesta hace al desarrollo de una comprensión de los efectos asociados con las trasformaciones en la función exponencial, se tienen mejores condiciones para llevar a cabo la enseñanza de las funciones en la escuela media.

Palabras clave: Función exponencial, parámetro, deformación, reflexión, GeoGebra.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

INTRODUCCIÓN

Al introducir las funciones reales (afín, cuadrática, exponencial, entre otras) en sus clases, los profesores de matemática suelen hacer un tratamiento de los contenidos más procedimental y simbólico. Debido a ello, los estudiantes tienden a desarrollar un conocimiento matemático limitado que les dificulta el reconocimiento de las características de diferentes tipos de funciones, a partir de sus registros de representación (Bayazit, Aksoy & Alp İlhan, 2010). Al respecto, Darmawan & Iwan (2011) dan cuenta los problemas que tienen los estudiantes para comprender cómo afectan los cambios de valor de los parámetros de una función a las gráficas de una misma familia. La importancia de esta comprensión radica en la ayuda que representa este saber al momento de interpretar las gráficas de las funciones con mejores resultados.

En este contexto, se han generado propuestas de enseñanza de las funciones para potenciar la comprensión de los estudiantes sobre las relaciones entre lo simbólico y lo gráfico. Algunas de éstas se apoyan en el uso de recursos tecnológicos que facilitan la visualización en tiempo real y de manera dinámica de los efectos o transformaciones geométricas que experimentan las gráficas de una misma familia, cuando varían los parámetros de la expresión algebraica que define a la función (Castillo, Gutiérrez & Prieto, 2013; Cervantes & Prieto, 2013; Hohenwarter, 2006). Entre estos recursos se encuentra el GeoGebra, un programa informático gratuito, de fácil acceso, de interfaz simple, que integra diversos registros de representación de los conceptos matemáticos (Fioriti, 2012).

El GeoGebra resulta muy útil para el estudio del comportamiento geométrico de las funciones reales, incluyendo a la función exponencial natural, debido a que permite dibujar las gráficas de funciones con precisión, manipular y explorar las mismas para generar conjeturas sobre sus cualidades, las cuales puedan ser corroboradas en el acto. Con la ayuda del GeoGebra, en este trabajo se describe una secuencia de análisis de los efectos geométricos denominados "deformación" y "reflexión" en la función exponencial natural. Tales efectos se vinculan con la variación del parámetro a de la expresión $f(x) = e^{ax}$.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

CONSIDERACIONES FUNDAMENTALES DEL DISEÑO

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

- Las transformaciones que sufren las gráficas de las funciones reales se deben a cambios en la expresión algebraica que se le asocia. Estas transformaciones se caracterizan por los cambios en la forma o posición de las curvas de una familia, con respecto a otras curvas de expresiones más simples, tal como: $h(x) = e^x$, que actúan como “referentes” (Larson, Hostlerter & Edwards, 2008). En el caso la función exponencial $f(x) = e^{ax}$ (con $a \in \mathbb{R}$), la variación del parámetro a produce dos tipos de transformaciones denominadas *deformación* y *reflexión*.
- La curva referente en el estudio de las deformaciones que sufren algunas curvas de la familia de $f(x) = e^{ax}$ (con $a \in \mathbb{R}$) es la función exponencial natural, esta es, aquella definida por $g(x) = e^x$. En el caso de la reflexión, cada curva que sufre una reflexión es el reflejo de una única curva de la familia, la cual es su referente y ha sido objeto de deformación.
- La transformación que produce una variación en la forma de una curva de $f(x) = e^{ax}$, con respecto a la canónica, es llamada *deformación*. Ésta se presenta cuando el parámetro a toma valores del intervalo $(0, \infty)$, es decir, cuando $a > 0$. Sin embargo, en el intervalo cuando $a = 1$ la curva resultante coincide con la canónica, por lo que se establecen dos casos:
    - Deformación en el intervalo $(0, 1)$
    - Deformación en el intervalo $(1, \infty)$
- Cuando una curva presenta cambios de posición con respecto a su referente, la trasformación que actúan sobre ésta se denomina *reflexión*. Tal efecto se presenta cuando a toma valores del intervalo $(-\infty, 0)$, es decir, cuando $a < 0$. Sin embargo, en el intervalo cuando $a = -1$ la curva resultante es la reflexión de la canónica, por lo que se establecen dos casos:
    - Reflexión en el intervalo $(-1,0)$
    - Reflexión en el intervalo $(-\infty, -1)$

Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

CONSIDERACIONES TÉCNICAS

- La secuencia de análisis de estas transformaciones se acompaña del uso conveniente de un *deslizador*, una herramientas del GeoGebra que facilita la exploración de las representaciones graficas correspondientes a familias de funciones, con solo asociar a éste cada parámetro de la expresión algebraica que define a la función.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

- Para análisis de ambas transformaciones o efectos geométricos, se establecen ciertos intervalos que permitan la caracterización de cada uno de los efectos, posteriormente ajustar el deslizador y activar animación automática según cada uno de los intervalos establecidos.

TRANSFROMACIONES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NARUTAL

DEFORMACIÓN

Éste efecto que presentan las gráficas de la función $f(x) = e^{ax}$ son de dos tipos, dependiendo del valor del parámetro a. Si el parámetro toma un valor entre 0 y 1, es decir $0 < a < 1$, se dice que la deformación es una "dilatación horizontal" (ver Figura 1a).

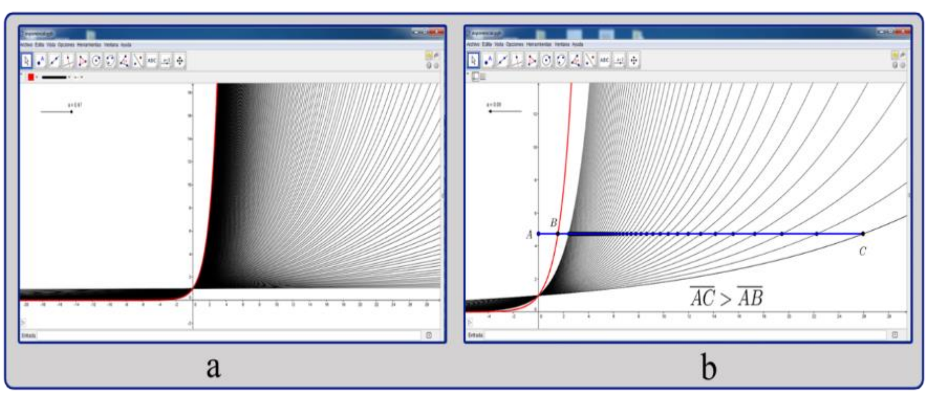

Figura 1*. Familia de curvas dilatadas horizontalmente*
Fuente: *Castillo, L.A., Prieto J.L. (2013)*

COVEM 2013 VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Desde la geometría, si trazamos una recta paralela al *eje x* de manera que corte al *eje y* en A, a la curva canónica en B y a la gráfica de la función $f(ax)$ en C, entonces se dice que la última gráfica sufre una dilatación horizontal ya que $\overline{AC} > \overline{AB}$ (ver Figura 1b).

Ahora, las curvas que pertenecen a la familia de las deformadas, cuando el parámetro a varía en el intervalo $(1, \infty)$, es decir, cuando $a > 1$, se dice la deformación es una contracción horizontal (Larson, R., et al., 2008). En la Figura 2a se observan las curvas que sufren ésta transformación.

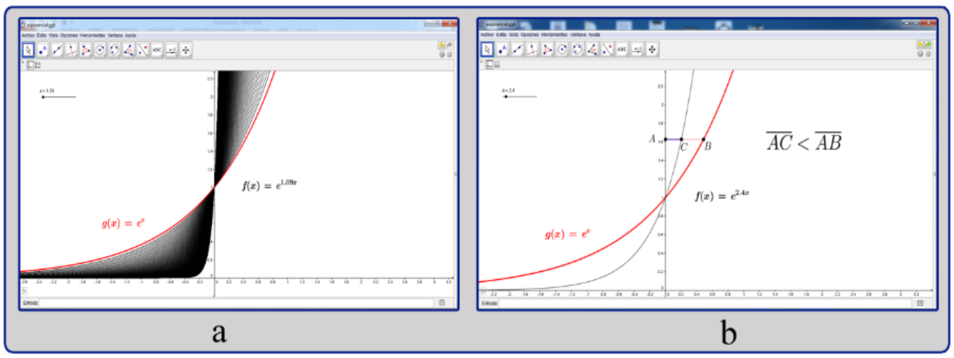

Figura 2. *Familia de curvas contraídas horizontalmente*

Fuente: *Castillo, L.A., Prieto J.L. (2013)*

Geométricamente, si trazamos una recta paralela al *eje x*, de manera que ésta intercepta al *eje y* en A, a la curva canónica en B y a la gráfica de la función $f(ax)$ en C, entonces se dice que ésta gráfica sufre una contracción horizontal ya que $\overline{AC} < \overline{AB}$ (ver Figura 2b).

REFLEXIÓN

Para nuestro caso, el efecto de *reflexión* se presenta cuando el parámetro a en $f(x) = e^{ax}$, toma valores del intervalo $(-\infty, 0)$, es decir, cuando $a < 0$. Dado que este tipo de reflexión se da en relación a una curva referente y a un eje de reflexión, existe una relación entre la familia de las deformadas y reflejadas, es decir, cada curva reflejada lo es de una previamente deformada, la cual actúa como referente de la trasformación (ver Figura 3).

COVEM 2013
VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

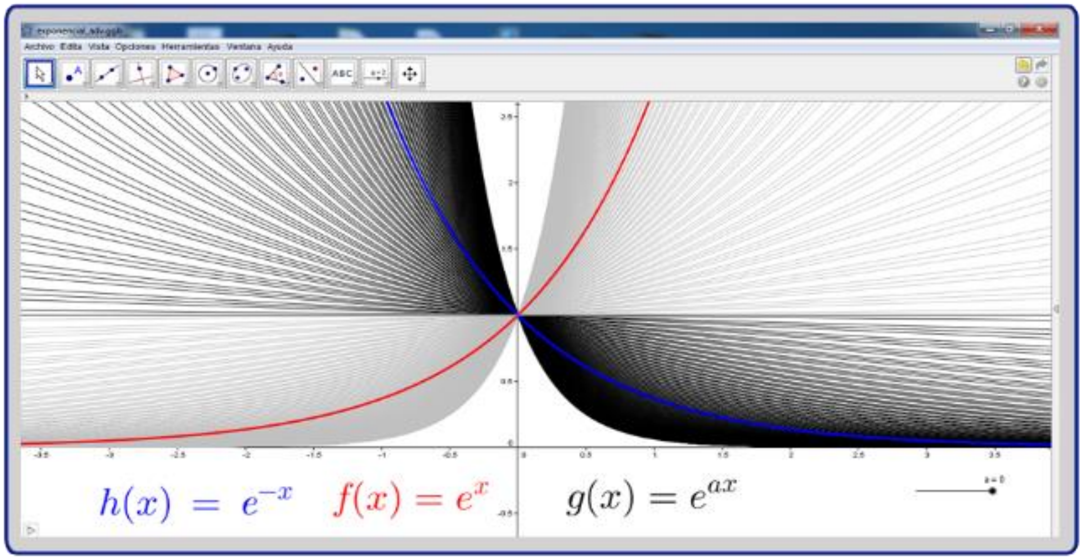

Figura 3. *Familia de curvas reflejadas*
Fuente: *Castillo, L.A., Prieto J.L. (2013)*

Vía geométrica, si trazamos una recta paralela al *eje x*, que intercepte al *eje y* y a las funciones $g(x) = e^{ax}$ y $f(x) = e^{x}$, en A, B y C respectivamente (ver Figura 4), entonces existen tres casos posibles, *(i)* que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, esto implica que la curva es el reflejo de la canónica (ver Figura 4a), *(ii)* que $\overline{AB} > \overline{AC}$, supone que la curva es la reflexión de una dilatación horizontal de la canónica (ver Figura 4b) y *(iii)* que $\overline{AB} < \overline{AC}$, implica que la curva es el reflejo de una contracción horizontal de la canónica (ver Figura 4c).

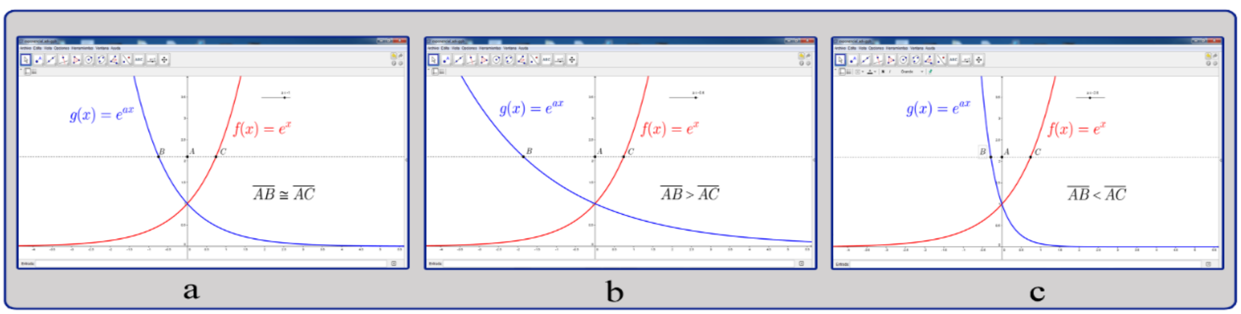

Figura 4. *Caracterización de curvas reflejadas*
Fuente: *Castillo, L.A., Prieto J.L. (2013)*

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

LAS TRANSFORMACIONES EN UN ENTORNO DE GEOGEBRA

DEFORMACIÓN

Para visualizar los efectos de deformación en las gráficas de la función $f(x) = e^{ax}$, utilizando el GeoGebra, es necesario construir un deslizador asociado al parámetro a de esta expresión. Al ajustar convenientemente los valores "mínimo" y "máximo" del deslizador se visualiza la familia de curvas de la función exponencial que definen la transformación. Entre los valores que puede tomar el deslizador se encuentran el 0 y el 1, los cuales consideramos como "notables" en nuestro análisis, ya que cuando $a = 0$ la gráfica de la función $f(x) = e^{ax}$ se convierte en una recta paralela al *eje x* que pasa por el punto $(0, 1)$. Por otro lado, cuando $a = 1$ la gráfica de $f(x) = e^{ax}$ coincide con la canónica $f(x) = e^{x}$ y, por lo tanto, no se percibe algún efecto geométrico. A partir de estos valores, sugerimos un análisis en dos casos:

Caso 1: Dilatación Horizontal en el intervalo (0, 1)

En éste, es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en 0 y 1 respectivamente. Luego de activar rastro sobre la gráfica de $f(x) = e^{ax}$ y posteriormente la opción "Animación Automática" sobre el deslizador, se visualiza la familia de curvas dilatadas horizontalmente con respecto a la canónica. Debido al movimiento se concluye que la dilatación de las curvas es más notable cuando el valor del parámetro es más cercano a 0 (cero) (ver Figura1a). Ahora, si a tiende al valor máximo del intervalo anterior entonces la apreciación del efecto en las curvas es menos notable con respecto a la canónica.

Caso 2: Contracción Horizontal en el intervalo (1,∞)

Para caracterizar las curvas de éste caso, se debe ajustar los valores del deslizador, con mínimo de 1 y en máximo un entero positivo mayor que 1. Pero, ¿Qué tan mayor debe ser? Cuestión que se responde al observa lo sucedido en al efecto, luego de activar "Animación Automática" con diferentes valores máximos para el intervalo del deslizador, sugerimos como ejemplos 5, 11, 50 (ver Figura 2a).

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

REFLEXIÓN

Para visualizar y analizar este efecto, los valores del parámetro a de la expresión $f(x) = e^{ax}$ deben estar comprendidos en el intervalo $(-\infty, 0)$. En el análisis de la reflexión se encuentra un valor notable en éste intervalo, el -1. Cuando el deslizador pasa por este valor, es decir, cuando $a = -1$, la gráfica es el reflejo de la canónica. Por lo que esta curva, divide a la familia en dos partes, en las cuales sus miembros pueden caracterizados con un uso intencionado del deslizador en los siguientes intervalos:

Caso 1: Reflexión en el intervalo (–1, 0)

En este intervalo requiere de ajustar los valores de mínimo y máximo del deslizador, sean -1 y 0, respectivamente. Luego activar "Animación Automática", se visualiza la familia de curvas reflejadas que se ubican entre el la recta definida por $y = 1$ y el reflejo de la canónica (ver Figura 3). Éstas curvas son caracterizadas por ser el reflejo de la familia de curvas dilatadas horizontalmente.

Caso 2: Reflexión en el intervalo (–∞,–1)

Para caracterizar las curvas de éste intervalo, se ajustan los valores del deslizador, como máximo –1 y como mínimo un entero negativo que sea menor que –1. Ahora, ¿Qué tan menor debe ser este valor? Mediante la visualización del efecto, luego de activar "Animación Automática" con diferentes valores mínimos para el intervalo del deslizador se responderá dicha cuestión, sugerimos como ejemplos –4, –12, –60. Al activar "Animación Automática" según los intervalos, nos muestra la familia de curvas que son el reflejo de las contraídas horizontalmente, donde algunas de éstas se encuentran más próximas al *eje* y (Figura 3).

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito una secuencia para el análisis gráfico de las familias de curvas que resultan de la transformación de $g(x) = e^{x}$ a $f(x) = e^{ax}$. El análisis se relaciona con los efectos de deformación y reflexión, visualizados tras la variación del parámetro a de la expresión de $f(x)$ en un entorno dinámico. Mediante el uso adecuado del deslizador se logró establecer relaciones entre los valores del parámetro, en intervalos puntuales, y las curvas representadas en la vista gráfica del GeoGebra, lo que

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

da significado a los efectos estudiados de la secuencia. Es evidente la capacidad que el GeoGebra posee de establecer conexiones entre las representaciones principales de las funciones, expresiones algebraicas y gráficas, consideradas en el análisis. Debido a esto, se facilita la comprensión de las transformaciones como efectos sobre curvas (Bayazit & Aksoy, 2010; Hohenwarter, 2006).

Ya que las representaciones gráficas de una función son las más tratadas en la escolaridad (Basurto & Gallardo, 2011), un tipo de secuencia de análisis como la que se propone permite desarrollar la capacidad de anticiparse al comportamiento geométrico de las curvas correspondientes a la expresión $f(x) = e^{ax}$, dada su expresión algebraica, temática que es de gran interés en la enseñanza de la matemática en el nivel de Educación Media. Debido a esto, al recorrer los aportes de la secuencia, mejorara su compresión de este tópico, colocándolo en mejores condiciones para hacer posible la integración de tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas y un aprendizaje matemático significativo entre los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Basurto, E., & Gallardo, A. (2011). El estudio de los parámetros por medio de tecnologías híbridas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, pp. 287-296. Ciudad Real: SEIEM.

Bayazit, İ., & Aksoy, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with geogebra. *Geogebra International Journal of Romania*, 1 (1), pp. 93-106

Bayazit, İ., Aksoy, Y., & Alp İlhan, O. (2010). GeoGebra as an instructional tool to promote students' operational and structural conception of function. Trabajo presentado en la *The First North American GeoGebra Conference 2010,* Ithaca (Nueva York, USA)

Castillo, L., Gutiérrez, R., & Prieto, J. (2013). Análisis de los efectos relacionados con la variación de los parámetros en la función cuadrática utilizando tecnologías. Trabajo presentado en el *Congreso Internacional Pedagogía 2013,* La Habana (Cuba).

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Cervantes, A., & Prieto, J. (2013). Variación de los parámetros de la función afín y sus efectos geométricos: una propuesta de análisis con GeoGebra. Trabajo presentado en el *Congreso Internacional Pedagogía 2013,* La Habana (Cuba).

Darmawan, D., & Iwan, P. (2011). On the teaching of analyzing the effects of parameter changes on the graph of function. Trabajo presentado en la *Fourth National Conference on Mathematics Education*, Julio, Yogyakarta.

Fioriti, G. (2012). Prólogo. En R. Ferragina (Ed.) *GeoGebra entra al aula de matemática*. (1a.ed.). Argentina: Miño y Davila.

Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. Trabajo presentado en *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education,* Julio, Dresden.

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (2008). Shifting, Reflecting, and Stretching Graphs. *Precalculus: A Graphing Approach, 5th Edition* (pp.127-132). New York: Houghton Mifflin Company.