La Matemática, en y para la vida
COVEM 2013
VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

EL ANÁLISIS DE LOS SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON TECNOLOGÍA. UNA MANERA DE TRASCENDER LAS REGLAS PRÁCTICAS

DÍAZ Stephanie y **PRIETO** Juan Luis

stephanie.diaz@aprenderenred.com.ve; juan.prieto@aprenderenred.com.ve

Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Maracaibo, Edo. Zulia.

Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI)-LUZ, Maracaibo, Edo. Zulia.

RESUMEN

En el ámbito de la Educación Media, el estudio de la trigonometría se ha vuelto un proceso memorístico, rutinario y mecánico. Prueba de ello es el uso recurrente que hacen los profesores de las "reglas prácticas" para abordar el contenido relacionado con los signos de las razones trigonométricas, hecho que limita la comprensión del papel que juegan estos signos en el desarrollo de las siguientes lecciones. Con el fin de atender a esta problemática, en este trabajo se describe una secuencia de uso de un recurso elaborado con GeoGebra para analizar el comportamiento geométrico de las razones Seno, Coseno y Tangente sobre una circunferencia unitaria, y así dotar de sentido al signo de cada razón en los distintos cuadrantes. La secuencia se basa en aspectos de tipo conceptual, técnico y metodológico que consideramos necesarias para el análisis. Con respecto a lo conceptual, se tuvo en cuenta la idea de razón entre magnitudes homogéneas para vincular al Seno, Coseno y Tangente de un ángulo con los respectivos segmentos sobre la circunferencia unitaria, así como también la idea de longitud relativa. En lo técnico, nos apoyamos en el uso de deslizadores que ofrece el GeoGebra para visualizar los efectos de los cambios de amplitud del ángulo sobre los segmentos representativos de las razones tratadas. En lo metodológico, se proponen formas de manipular el recurso para analizar el comportamiento los signos de las razones trigonométricas, centrando la atención en los cambios de posición de los segmentos tras la variación de la amplitud del ángulo. Con esta propuesta se busca presentar opciones a los profesores de Matemática que sienten interés en los procesos de integración de tecnologías en su práctica docente.

Palabras clave: Trigonometría, reglas prácticas, razones trigonométricas, GeoGebra.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

INTRODUCCIÓN

El uso de la circunferencia unitaria para estudiar las razones trigonométricas *Seno*, *Coseno* y *Tangente* responde a la necesidad de determinar sus valores para ángulos de cualquier amplitud. Entre los contenidos tratados por medio de esta circunferencia se encuentran los *signos de las razones trigonométricas*, contenido que suele ser tratado por el profesor a través de las “reglas prácticas” (Fiallo, 2010). En este contexto, los estudiantes se ven forzados a memorizar los signos de las razones trigonométricas sin comprender lo que éstos representan, haciendo de este proceso un estudio rutinario y mecánico (Fiallo y Gutiérrez, 2007). Es posible que este accionar se deba en parte al desconocimiento del profesor de las interpretaciones geométricas que pueden darse a los signos de una razón trigonométrica desde la manipulación de una circunferencia unitaria.

El uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de contenidos matemáticos que requieren de interpretación geométrica ha traído beneficios y mejoras en el aprendizaje de los estudiantes, especialmente por el tipo de actividades que se proponen en estos entornos y la calidad de los recursos diseñados (Lu, 2008). Si se considera a la calidad de un recurso tecnológico para enseñar un contenido específico como vinculada al provecho que el profesor puede darle en la clase para que sus estudiantes logren la comprensión deseada, es necesario disponer de recursos con estas cualidades que ayuden a dotar de sentido a los signos de las razones trigonométricas y permitan trascender el uso de reglas nemotécnicas.

Dado lo anterior, en este trabajo describe el diseño y formas de uso de un recurso elaborado con GeoGebra para darle un sentido a los signos de las razones *Seno*, *Coseno* y *Tangente* en la circunferencia unitaria. El GeoGebra es un Software de Geometría Dinámica (SGD), de acceso libre y de código abierto, que combina en tiempo real las representaciones gráficas y expresiones simbólicas de diversos objetos matemáticos, que está siendo usado actualmente cada vez más profesores e investigadores alrededor del mundo (Hohenwarter, 2006). El uso conveniente del GeoGebra nos ha permitido confirmar, de forma visual, los resultados establecidos en las reglas prácticas, medio por el cual suele abordarse este estudio.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

CONSIDERACIONES EN EL DISEÑO DEL RECURSO

Para el diseño del recurso se han considerado los siguientes aspectos:

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Los elementos teóricos considerados en el diseño fueron los siguientes:

(i) Circunferencia Unitaria: Circunferencia con centro en el origen del sistema de coordenadas cartesianas y de radio igual a la unidad $(r = 1)$. En nuestro estudio, esta circunferencia constituye el medio para la interpretación geométrica del signo de las razones *Seno, Coseno y Tangente*. Sobre esta circunferencia se dibuja un ángulo central con vértice en el centro de la misma, donde uno de sus lados se posa sobre la parte positiva del *eje x* y el otro lado ocupa cualquier posición en el plano, según sea la amplitud del ángulo. Este último lado del ángulo corta a la circunferencia unitaria en un punto que llamaremos P, a partir del cual se trazan segmentos perpendiculares a los ejes coordenados (ver Figura 1). Los triángulos rectángulos que se generan también son parte del análisis. Vale destacar que la construcción auxiliar de una recta tangente a la circunferencia permitirá representar otro triángulo rectángulo que resulta más útiles para el estudio de la Tangente de un ángulo.

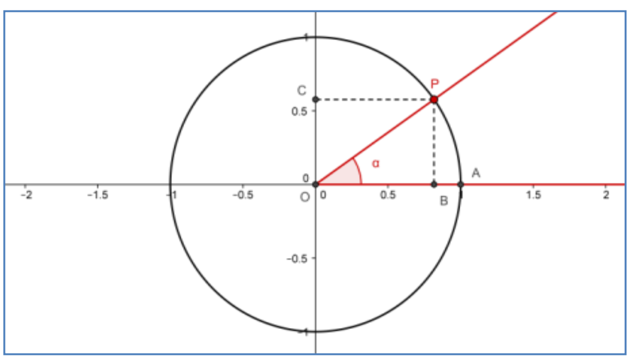

Figura 1. Circunferencia Unitaria

***(ii) Razones trigonométricas*:** Las razones trigonométricas consideradas en este estudio son tres: *Seno*, *Coseno* y *Tangente* de un ángulo. A partir de un triángulo rectángulo OBP de la Figura 1, es posible definir estas tres razones de la siguiente manera:

- El *Seno* de un ángulo agudo es la razón entre el cateto opuesto a este ángulo y la hipotenusa. A partir del triángulo OPB, tenemos que la razón $\frac{PB}{OP}$ define al Seno del

Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

ángulo α (se abrevia $Sen\ \alpha$). Como $OP = 1$, entonces el $Sen\ \alpha$ viene dado por la longitud del segmento $\overline{PB}$. La figura 2 muestra a este segmento en color azul.

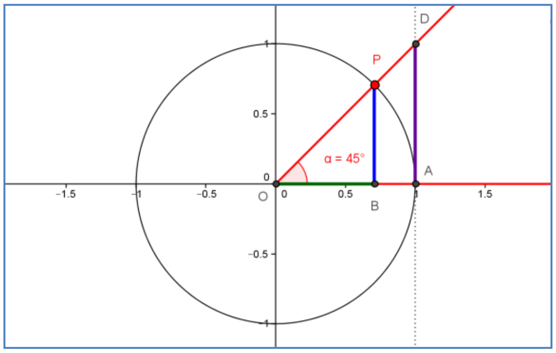

Figura 2. Razones Seno, Coseno y Tangente en la Circunferencia Unitaria

- El *Coseno* de un ángulo agudo es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa. Siguiendo con el análisis de la figura 1, se define al Coseno del ángulo α (abreviado $Cos\ \alpha$) como la razón $\frac{OB}{OP}$. Ya que $OP = 1$, podemos determinar el $Cos\ \alpha$ a partir de la longitud del segmento $\overline{OB}$ (ver Figura 2).
- La *Tangente* de un ángulo agudo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. Si tazamos una recta tangente a la circunferencia en el punto $(1{,}0)$, ésta intersecta a cada lado del ángulo en este mismo punto del eje x, el cual llamaremos A, y en otro punto que llamaremos D, formándose así un nuevo triángulo rectángulo ODA. Partiendo del triángulo OPB, tenemos que la tangente de α (se abrevia $Tan\ \alpha$) está definida por la razón $\frac{\overline{PB}}{\overline{OB}}$, pero si tomamos el triángulo ODA, entonces la $Tan\ \alpha$ se define como $\frac{\overline{DA}}{\overline{OA}}$. Por la proporcionalidad entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes se puede establecer la siguiente igualdad $\frac{\overline{PB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{OA}}$. Al considerar la razón $\frac{\overline{DA}}{\overline{OA}}$ como aquella que define a la $Tan\ \alpha$, ya que el valor de $\overline{OA} = 1$, entonces la Tangente viene dada por la longitud del segmento $\overline{DA}$ (ver Figura 2).

(iii) Signos de las Razones Trigonométricas: Los signos de la razones trigonométricas suelen definirse en los textos de la siguiente forma (reglas prácticas):

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

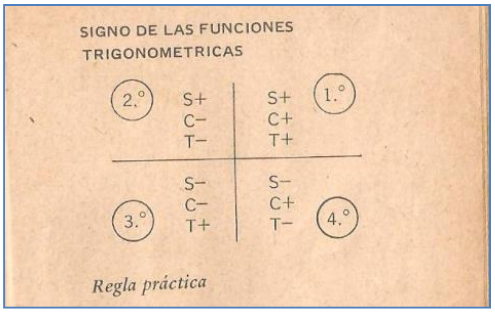

Figura 3. Signos de las razones trigonométricas.
Fuente: Navarro, E. Formulario de Matemática

En relación a la circunferencia unitaria, los segmentos que determinan las razones *Seno*, *Coseno* y *Tangente* se localizan en diferentes partes del plano, según se tome uno u otro eje como referente. Por ejemplo, en el caso de *Coseno*, tomando el *eje y*, se considera que el *Coseno* de un ángulo es positivo cuando el segmento que lo representa está a la derecha del *eje y* pero, si se sitúa a la izquierda entonces se dice que el *Coseno* correspondiente es negativo. Este tipo de análisis permite vincular el signo de las razones trigonométricas con la circunferencia unitaria, especialmente con los segmentos que determinan las razones, y con ello trascender el uso recurrente de las reglas prácticas.

CONSIDERACIONES TÉCNICAS

En cuanto a lo técnico, hemos hecho uso de un deslizador de tipo ángulo, asociado a la amplitud del ángulo central sobre la circunferencia. Esta herramienta del GeoGebra permite variar la amplitud del ángulo en un rango de valores que puede ser ajustado para que el mismo varíe en tiempo real según las condiciones del análisis para el estudio de los signos de las razones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes. Estos ajustes llevan a visualizar los efectos de cambio que sufren los segmentos que representan a las razones. En algunos casos convendrá el uso de la opción “Animación automática” para la visualización deseada. Si se desea se puede modificar el grosor y color de los segmentos, para garantizar una mejor apreciación de los efectos vinculados con el movimiento de los segmentos.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

En este trabajo se propone una forma de manipular el recurso elaborado para analizar el comportamiento de los segmentos que representan a las razones trigonométricas *Seno, Coseno y Tangente.* Esta forma de manipulación está relacionada con el ajuste conveniente del deslizador en intervalos de amplitudes angulares asociados a cada uno de los cuadrantes del sistema cartesiano. Por ejemplo, el ajuste del deslizador para $0° \leq \alpha \leq 90°$ determina el conjunto de ángulos en el primer cuadrante y así poder realizar un estudio más detallado.

FORMA DE USAR EL RECURSO

Para vincular el signo de esta razón trigonométrica con la localización de los segmentos que lo determinan, es pertinente realizar el análisis para cada cuadrante del plano coordenado.

SENO, COSENO Y TANGENTE DEL ÁNGULO α EN EL I CUADRANTE

Para el primer cuadrante, los valores mínimo y máximo del deslizador asociado al ángulo central deben ajustarse en 0° y 90°, respectivamente. Al activar la opción “Animación Automática” al deslizador se observa a los segmentos representativos del *Seno* y de la *Tangente* por encima del *eje x* y el segmento que representa al *Coseno* está a la derecha del *eje y*, por lo tanto estas razones son todas positivas para valores de α entre 0° y 90° (ver Figura 4a). Para identificar los valores mínimo y máximo de cada razón trigonométrica en este intervalo basta con determinar el *Seno, Coseno* y *Tangente* para los ángulos de 0° y 90°: Cuando $\alpha = 0°$ el $Sen\ \alpha = 0$, $Cos\ \alpha = 1$ y $Tan\ \alpha = 0$ y cuando $\alpha = 90°$ $Sen\ \alpha = 1$, $Cos\ \alpha = 0$ y $Tan\ \alpha = +\infty$ (indeterminado). Por lo tanto, podemos concluir que:

Cuando $0° \leq \alpha \leq 90°$, ocurre que $0 \leq Sen\ \alpha \leq 1$, $0 \leq Cos\ \alpha \leq 1$ y $0 \leq Tan\ \alpha < +\infty$.

Vale destacar que $Tan\ 90°$ es indeterminada, ya que no existe segmento posible que represente a esta razón. Con el GeoGebra podemos observar que para $\alpha = 90°$ no hay intersección entre el lado del ángulo y la recta tangente a la circunferencia en $(0,1)$, ya que son paralelos.

Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

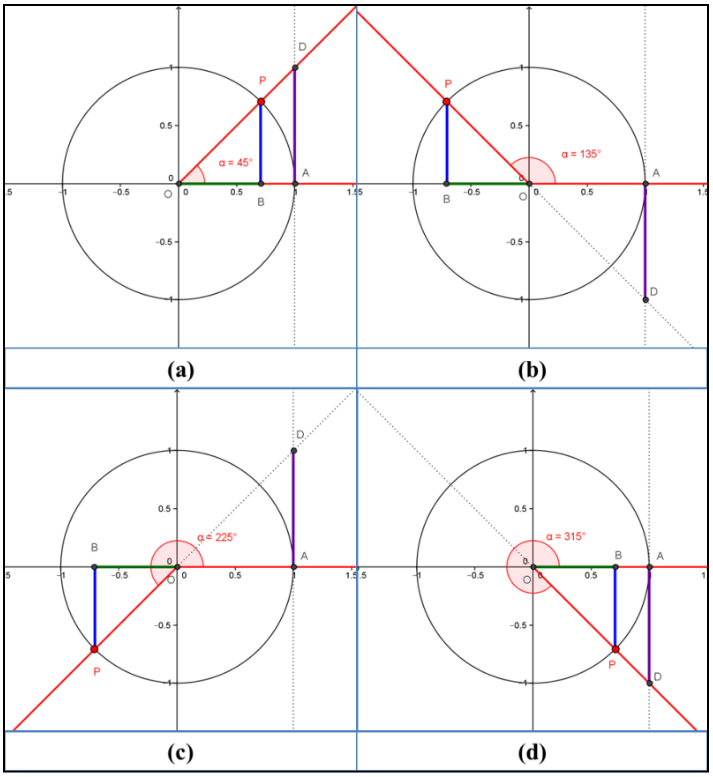

Figura 4. Análisis de las razones trigonométricas con GeoGebra

SENO, COSENO Y TANGENTE DEL ÁNGULO α EN EL II CUADRANTE

Para el segundo cuadrante, deben ajustarse los valores mínimo y máximo del deslizador en 90° y 180°, respectivamente. La “Animación Automática” sobre el deslizador permite observar que el segmento que representa al *Seno* sigue por encima del *eje x*, al igual que en el primer cuadrante, pero ésta vez el segmento representativo de la *Tangente* está por debajo del *eje x* y el segmento que refiere al *Coseno* está a la izquierda de *eje y*, por tanto el $Sen\ \alpha$ es positivo, mientras que el $Cos\ \alpha$ y la $Tan\ \alpha$ son negativos para $90° \leq \alpha \leq 180°$ (ver Figura 4b). Los valores mínimo y máximo de cada razón trigonométrica se identifican a partir de los valores de estas razones que se asocian a los ángulos de 90° y 180°. Los valores de las razones para $\alpha = 90°$ se determinaron en el análisis anterior; el valor que toma cada razón cuando $\alpha = 180°$ son $Sen\ \alpha = 0$, $Cos\ \alpha = -1$ y $Tan\ \alpha = 0$.

Por lo tanto, podemos concluir que:

Cuando $90° \leq \alpha \leq 180°$, pasa que $0 \leq Sen\ \alpha \leq 1$, $-1 \leq Cos\ \alpha \leq 0$ y $-\infty < Tan\ \alpha \leq 0$.

SENO, COSENO Y TANGENTE DEL ÁNGULO α EN EL III CUADRANTE

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Para el tercer cuadrante, los valores mínimo y máximo del deslizador se deben ajustar en 180° y 270°. Con la "Animación Automática" en el deslizador se observa que el segmento que refiere al *Seno* está por debajo del *eje x*, el que representa a la *Tangente* está por encima del *eje x* y el del *Coseno* está a la izquierda del *eje y*, por lo tanto el *Seno* y *Coseno* de α son negativos y la *Tangente* de α es positiva para $180° \leq \alpha \leq 270°$ (ver Figura 4c). Para establecer los valores mínimo y máximo de cada razón trigonométrica en este intervalo basta con determinar el *Seno, Coseno* y *Tangente* para los ángulos de 180° y 270°: Cuando $\alpha = 270°$ $Sen\ \alpha = -1$, $Cos\ \alpha = 0$ y $Tan\ \alpha = +\infty$ (indeterminado). Por lo tanto, con los valores obtenidos anteriormente para $\alpha = 180°$, podemos concluir que:
Cuando $180° \leq \alpha \leq 270°$, ocurre que $-1 \leq Sen\ \alpha \leq 0$, $-1 \leq Cos\ \alpha \leq 0$ y $0 < Tan\ \alpha \leq +\infty$.

SENO, COSENO Y TANGENTE DEL ÁNGULO α EN EL IV CUADRANTE

Para el cuarto cuadrante, se deben ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en 270° y 360°. La "Animación Automática" nos permite concluir que los segmento representativos de las razones *Seno* y *Tangente* están por debajo del *eje x* y el referente a la razón *Coseno* está a la derecha del *eje y* por lo tanto el *Seno* y *Tangente* son negativos y el *Coseno* es positivo para valores de α entre 270° y 360°. Para hallar los valores mínimo y máximo de cada razón trigonométrica en este intervalo basta con determinar el *Seno, Coseno* y *Tangente* para los ángulos de 270° y 360°: Para $\alpha = 360\ °$ el $Sen\ \alpha = 0$, $Cos\ \alpha = 1$ y $Tan\ \alpha = 0$. Tomando en cuenta los valores de cada razón para $\alpha = 270°$ determinados en el análisis anterior, podemos concluir que:
Cuando $270° \leq \alpha \leq 360°$, ocurre que $-1 \leq Sen\ \alpha \leq 0$, $0 \leq Cos\ \alpha \leq 1$ y $+\infty < Tan\ \alpha \leq 0$.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el desarrollo de este trabajo se ha presentado un recurso que permite dotar de sentido a los signos de las razones *Seno*, *Coseno* y *Tangente* desde una circunferencia unitaria creada con GeoGebra. El análisis descrito tuvo la intensión de ayudar al lector a encontrar un sentido para los resultados que presentan las reglas prácticas, desde el recurso. Entre estos resultados se pudo establecer la relación entre los signos de las razones trigonométricas y la posición de los segmentos representativos de éstas en la circunferencia. Además, este análisis permitió determinar ciertas características de las razones *Seno, Coseno* y *Tangente*. Por ejemplo, se logró identificar los valores del ángulo α para los cuales la Tangente de dicho ángulo es una indeterminación. Éste y otros resultados que se han extraído en este trabajo se deben a los atributos utilizados en el diseño del recurso y la secuencia propuesta para su uso. Sabemos el reto que supone para el profesor enseñar adecuadamente los signos de las razones trigonométricas, más aún con el uso de recursos tecnológicos como el GeoGebra, los cuales representan insumos novedosos y desconocidos muchas veces por ellos. Esto requiere de ciertos conocimientos profesionales que lleven a un uso adecuado de este tipo de recursos tecnológicos en secuencias como las descritas en el apartado anterior. Confiamos que la interacción, el descubrimiento y el análisis sobre lo que se observa en la pantalla del ordenador pueden ayudar a lograr el desarrollo de un conocimiento profesional que pueda impactar en los métodos y recursos seleccionados por el profesor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fiallo, J. (2010). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas. Diciembre de 2010, Valencia.

Fiallo, J. Gutiérrez, A; (2007). Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. Trabajo presentado en el X Simposio de la SEIEM (Sociedad Española de la Investigación en Educación Matemática), Huesca.

Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using geogebra. Trabajo presentado en el Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education, Julio, Dresden.

Lu, Y. (2008) Linking Geometry and Algebra: A multiple-case study of Upper-Secondary mathematics teachers' conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan.Thesis submitted for the degree of Master of Philosophy in Educational Research. Julio de 2008.