

## DIVERSIDAD DE ENFOQUES TEÓRICOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FONT Vicenç

Universidad de Barcelona

Epistemología e Historia de la Matemática y de la Educación Matemática

[vfont@ub.edu](mailto:vfont@ub.edu)

### RESUMEN

Se reflexiona primero sobre el hecho que la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una de las razones de que exista una pluralidad de teorías en el área de Educación Matemática y de que, en estos momentos, se plantee la necesidad del dialogo y articulación de teorías. En segundo lugar, se distingue entre Educación Matemática, entendida como el conjunto de prácticas llevadas a cabo en distintos escenarios que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y Didáctica de la Matemática entendida como estudio científico de los fenómenos de la educación matemática. En tercer lugar, se reflexiona sobre el papel de la teoría en la investigación en Didáctica de las Matemáticas y se considera la siguiente tipología: a) Teorías externas de amplio alcance lo cual conlleva considerar a la Didáctica de las Matemáticas como una ciencia aplicada que importa y aplica los saberes de otras disciplinas más generales como la psicología, la sociología, etc. b) Teorías internas intermedias, lo cual implica generar programas de investigación propios del área de la Didáctica de las Matemáticas que tienen en cuenta la especificidad del conocimiento matemático y c) Teorías “conectadas a tierra” que pretenden limitarse al desarrollo a teorías de ámbito muy local. Por último se analiza la problemática de la coordinación de teorías y se presentan ejemplos de coordinación del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática con la Teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema y con la Teoría de la Génesis Instrumental.

**Palabras Clave:** teorías, coordinación, didáctica de las matemáticas, enfoque Ontosemiótico.

## **1. EL PAPEL DE LA TEORÍA EN LA INVESTIGACIÓN**

Una investigación en el área de Educación Matemática (EM) suele seguir, entre otros, los siguientes pasos:

- 1) Una primera formulación de una pregunta de investigación. Para ello, el investigador ha de pensar en cuestiones que le interesen, valorar si dispone del tiempo y los recursos necesarios para hacer la investigación, si tiene los conocimientos previos necesarios, si puede acceder a las fuentes de información, etc. Después ha de decidirse por uno de estos temas, delimitar el problema que se va a estudiar y resumirlo en una pregunta.
- 2) La selección de un marco teórico y la reformulación de la pregunta de investigación en términos de dicho marco teórico. Este paso permite una mejor delimitación de los objetivos de la investigación (tanto generales como específicos), los cuales a su vez nos sugieren un tipo de investigación (explicativa, descriptiva, comparativa, etc.) y una metodología de investigación (un camino a seguir).
- 3) Aplicación del marco teórico seleccionado al estudio del problema de investigación planteado. Este tercer punto es el “camino” que sigue la investigación.
- 4) Selección y aplicación de técnicas de investigación. El método necesita procedimientos y medios que lo hagan operativo. A este nivel se sitúan las técnicas de investigación.

Los últimos tres pasos conllevan que las personas que investigan en EM tengan que optar por un marco teórico, lo cual les lleva a un problema que no es en absoluto irrelevante: el problema de la selección de un marco teórico entre una gran variedad de enfoques teóricos.

## **2. COMPLEJIDAD DE LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS**

La complejidad de los objetos matemáticos, junto a la complejidad de su proceso de enseñanza y aprendizaje, son dos de las razones de que exista una pluralidad de enfoques teóricos en el área de EM.

El hecho de que los procesos de enseñanza y aprendizaje sean muy complejos conlleva que los problemas a los que el profesorado de matemáticas se enfrenta sean el origen de muchas preguntas que, además, son de categorías muy diferentes. Son preguntas que están relacionadas con muchos aspectos (por ejemplo, el contenido matemático, el

aprendizaje de los alumnos, el entorno social, la organización de la clase, el uso de determinados recursos materiales y temporales, la motivación de los alumnos, etc.) y disciplinas diferentes (psicología, sociología, antropología, matemáticas, etc.).

Dado que la profesión de profesor de matemáticas es heterogénea en cuanto a sus miembros, las preguntas que un profesor se puede formular pueden ser muy diferentes a las que se formulará otro profesor. Ahora bien, puesto que la profesión de profesor de matemáticas es bastante homogénea con relación a los problemas que debe afrontar, las preguntas que se formule un profesor concreto, además de ser sus preguntas, serán preguntas relacionadas con los problemas de una parte importante de la profesión de profesor de matemáticas. Serán, por tanto, preguntas que merecen ser investigadas.

### **3. LA INVESTIGACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS**

Conviene distinguir las dos esferas a las que se refiere el nombre “Educación Matemática” (Godino, 2000). Por un lado, EM es el conjunto de prácticas llevadas a cabo en distintos escenarios –instituciones formales de educación, instancias informales de aprendizaje, espacios de planificación curricular, etc. – que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Y, por el otro lado, EM hace mención al estudio científico de los fenómenos de la práctica de la educación matemática. La identificación de estas dos componentes de la educación matemática explica que en muchos casos se utilicen las expresiones “Didáctica de las Matemáticas” (DM) y “Educación Matemática” (EM) como sinónimas, mientras que en otros casos se considere que la DM sería la disciplina interesada principalmente por el campo de la investigación, mientras que la EM también incluiría el primer componente, esto es, abarcaría la teoría, el desarrollo y la práctica.

La DM, entendida como disciplina didáctica, en estos momentos tiene una posición consolidada en la institución universitaria de muchos países. Indicadores de consolidación institucional son las tesis doctorales sobre problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los proyectos de investigación financiados con fondos públicos y las diferentes comunidades y asociaciones de investigadores en DM. Otros síntomas de consolidación son la existencia de institutos de investigación específicos, la publicación de revistas periódicas de investigación, congresos internacionales, etc.

Esta consolidación convive con una gran confusión en las agendas de investigación y en los marcos teóricos y metodológicos disponibles, situación propia de una disciplina emergente y de la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas comentado en el apartado anterior. Por otra parte, existe un divorcio entre la investigación científica que se está desarrollando en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Este divorcio se manifiesta, entre otros aspectos, en la existencia de congresos para investigadores y congresos de profesores.

Aunque la DM pueda considerarse una disciplina madura en el sentido sociológico, no ocurre igual en el sentido filosófico o metodológico. No existe ningún marco establecido de manera universal o un consenso relativo a escuelas de pensamiento, paradigma de investigación, métodos, estándares de verificación y calidad. Se puede afirmar que, en la actualidad, no hay acuerdo en la DM sobre lo que es un hecho, un fenómeno o una explicación. Esto explica porqué hay un cierto número de investigadores en esta área que durante los últimos años han estado reflexionando sobre las características, problemas, métodos y resultados de la DM como disciplina científica intentando dar respuesta a la pregunta ¿Qué tipo de ciencia es la DM? En su intento de responder a la pregunta anterior, la DM no ha permanecido ajena a la controversia “explicación versus comprensión” que ha sacudido a las ciencias sociales. El dualismo explicación-comprensión se relaciona con el problema de si la construcción teórica es intrínsecamente un mismo género de empresa tanto en las ciencias naturales como en las ciencias humanas y sociales.

En estos momentos a la DM, tanto si es entendida cómo ciencia de tipo explicativo o bien de tipo comprensivo, se le pide que de respuesta a dos demandas diferentes: a) Comprender y/o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y b) Guiar la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La primera demanda lleva a describir, interpretar y/o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (ciencia básica). La segunda lleva a su valoración y mejora (ciencia aplicada o tecnología). La primera demanda exige herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder “¿qué ha ocurrido aquí cómo y por qué?”. La segunda necesita herramientas para una didáctica valorativa que sirva

para responder la pregunta “¿qué se podría mejorar?”. Se trata de dos demandas diferentes pero relacionadas ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora.

#### **4. TIPOS DE MARCOS TEÓRICOS**

Las dos demandas comentadas en el apartado anterior exigen herramientas teóricas que permitan la descripción, la interpretación y/o la explicación de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y su valoración. Una manera de satisfacer estas necesidades teóricas es entender la DM como una ciencia aplicada que importa y aplica los saberes de otras disciplinas más generales como la psicología, la sociología, etc. Desde esta perspectiva las investigaciones en DM serán cognitivistas (si aplica la psicología cognitiva), sistémicas (si aplica la teoría de sistemas), constructivistas, socioculturales, antropológicas, etc.

Otra posibilidad es considerar que los saberes importados de disciplinas como la psicología, sociología, etc. no permiten por sí mismos, sin modificaciones e independientemente los unos de los otros, explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por el contrario, es necesario crear programas de investigación propios del área de la DM que tengan en cuenta la especificidad del conocimiento matemático. Esta opción necesita investigaciones de tipo teórico que permitan la creación y el desarrollo de marcos teóricos propios menos generales.

Una tercera posibilidad es huir de marcos teóricos, propios o de teorías generales, consideradas demasiado ambiciosas, y limitarse al desarrollo a teorías de ámbito muy local que se puedan conectar y sincronizar razonablemente con los estudios empíricos. Esto es lo que propone La Teoría Fundamentada (Glaser y Strauss, 1967).

Después de constatar las limitaciones de las teorías psicopedagógicas generales para explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, muchos investigadores en este campo han optado por desarrollar programas de investigación específicos del área. Se ha pasado de tener marcos generales (cognitivismo, constructivismo, teorías socioculturales, enfoques sistémicos, etc.) a tener marcos específicos de investigación en DM, que si bien están relacionados con enfoques generales, tienen en cuenta la especificidad del contenido matemático que se enseña.

Entre otros, tenemos la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau y colaboradores), el Enfoque Ontosemiótico (Godino y colaboradores), la Teoría de la Objetivación (Radford y colaboradores), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard y colaboradores), la Educación Matemática Crítica de (Skovmose y colaboradores), la Teoría APOE (Dubinsky y colaboradores), etc.

Estos marcos teóricos específicos exigen, por una parte, investigaciones de tipo teórico que permitan su creación y desarrollo y, por otra parte, la aplicación de dichos marcos teóricos al estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (lo cual sirve, entre otras cosas, para desarrollarlos).

De acuerdo con Font (2002) consideramos que los diversos enfoques que se han propuesto en la DM se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la DM, y 6) Una metodología de investigación. A partir de sus posicionamientos, explícitos o implícitos, sobre los seis puntos anteriores, los diferentes programas de investigación han desarrollado constructos teóricos que, por una parte, se utilizan en las investigaciones en DM y, por otra parte, son utilizados en la mejora de la formación inicial y permanente del profesorado con el objetivo de conseguir una mejora de la enseñanza de las matemáticas.

## **5. EL PROBLEMA DE LA COMPARACIÓN Y ARTICULACIÓN DE TEORÍAS**

La existencia de diversas teorías para abordar los problemas didáctico-matemáticos puede ser un factor positivo, dada la complejidad de tales problemas, si cada teoría aborda un aspecto parcial de los mismos. Cuando el mismo problema es abordado con teorías diversas, lo que frecuentemente implica el uso de lenguajes y supuestos distintos, se pueden obtener resultados dispares y contradictorios que pueden dificultar el progreso de la DM. Parece necesario pues abordar el problema de comparar, coordinar e integrar dichas teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes para hacer el trabajo requerido. Este problema se puede formular en los siguientes términos:

Dadas las teorías  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿es posible elaborar una teoría  $T$  que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las  $T_i$ ? En esta problemática las teorías pasan a ser los objetos del discurso y de la investigación. Para responder a esta pregunta hay que seguir un largo camino cuyo punto de partida es la existencia de un conjunto de teorías que se ignoran unas a otras y cuyo punto de llegada es una teoría que sea la unificación global de este conjunto de teorías. Para seguir este camino las teorías se tienen que entender unas a las otras, se tienen que comparar, coordinar, integrar parcialmente, etc. (Prediger, Bikner-Ahsbahs, y Arzarello, 2008).

## 6. EL CASO DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO (EOS)

Fue teorías relacionadas con la Didáctica Fundamental de las Matemáticas, en el que se planteó el problema central que dio origen al EOS, al considerar que no había una respuesta suficientemente clara, satisfactoria y compartida en las teorías de la Didáctica Fundamental al siguiente problema:

PE (problema epistemológico): ¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media, ...) en un contexto o marco institucional determinado?

Este problema epistemológico, esto es, referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica:

PC (problema cognitivo): ¿Qué significa el objeto  $O$  para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Después de casi 30 años de trabajo, en el EOS se tiene una respuesta a estos dos problemas relativamente satisfactoria (Font, Godino y Gallardo, 2013). Se trata de una reflexión sobre la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas que permite al EOS coordinarse con otras teorías en las que la noción de objeto matemático juega un papel importante. Por ejemplo, con la Teoría acción-proceso-objeto-esquema (APOE) (Dubinsky y McDonald, 2001), la Teoría del embodiment (Lakoff y Núñez, 2000) y la Teoría de la Génesis Instrumental (TGI) (Rabardel y Waern, 2003).

Coordinación EOS-APOE

La teoría APOE es una teoría básicamente cognitiva en la que no se ha profundizado aún en la reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, mientras que el EOS es una teoría más general en la que este tipo de reflexión ya se ha realizado. Al ser dos tipos de teorías diferentes es difícil hacer una comparación entre ellas, incluso si nos limitamos al uso que hacen ambas teorías del término objeto, por tanto se ha optado por la siguiente metodología (Font, Badillo, Trigueros y Rubio, 2012): 1) partir del APOE y, de acuerdo con esta teoría, elaborar una descomposición genética de la derivada, que sirva como contexto de reflexión. 2) reflexionar sobre dicha descomposición genética desde las herramientas teóricas que se proponen en el EOS. Este proceso permite concluir que la manera de conceptualizar la emergencia de objetos en el APOS —como resultado de dos procesos cognitivos, llamados encapsulación y tematización— resalta aspectos parciales del complejo proceso que, según el EOS, hace emerger los objetos matemáticos personales de los alumnos a partir de las prácticas matemáticas realizadas en el aula.

Coordinación EOS -TGI

En un trabajo reciente (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013) se ha abordado la comparación y articulación del EOS con la TGI mediante la aplicación de las respectivas herramientas al análisis de un episodio instruccional. Además se realiza una comparación de: a) Principios, b) Métodos, c) Cuestiones paradigmáticas y d) Conocimientos que el uso de la teoría aporta.

Los principales resultados son: a) El análisis conjunto del episodio no es contradictorio y permite tener una visión más completa que usando un solo marco. B) Se han visto puntos de contacto en las nociones teóricas que permiten una buena coordinación entre las dos teorías, c) El EOS ha incorporado la noción de artefacto (Font, Godino y Gallardo, 2013).

## **AGRADECIMIENTOS**

Trabajo realizado en el marco de los proyectos: REDICE-12-1980-02 y EDU2012-32644.



## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses; a reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23-49.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton, et al. (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*, (pp. 273–280). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, 7(2), 127-170.

Font, V., Badillo E., Trigueros, M. y Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa A. Contreras, J. Delofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI. Actas del XVI SEIEM*, (pp. 239-247). SEIEM: Jaen.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.

Glaser, B. G. y Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine Publishing Company

Godino, J. D. (2000). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. *Números*, 40, 347-350.

Lakoff, G. y Nuñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, NY: Basic Books.

Prediger, S., Bikner, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 165-178.

Rabardel, P. y Waern, Y (2003). From artefact to instrument. *Interacting with Computers*, 15, 641-645.