COVEM 2013 — VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática
La Matemática, en y para la vida
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM — ASOVEMAT Capítulo Falcón
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

DEFORMACIÓN Y REFLEXIÓN CON GEOGEBRA: UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS PARÁBOLAS DEFINIDAS POR LA EXPRESIÓN $f(x) = ax^2$

GUTIÉRREZ Rafael y **PRIETO** Juan Luis

rafael.gutierrez@aprenderenred.com.ve; juan.prieto@aprenderenred.com.ve

Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI)-Universidad del Zulia, Edo. Zulia, Venezuela

RESUMEN

Nuestra experiencia en la formación de profesores de Matemática nos ha hecho conscientes de las dificultades que éstos tienen para comprender y enseñar ciertos tópicos matemáticos fundamentales. Estas dificultades se presentan inclusive al tratar de reconocer los efectos geométricos que sufren las parábolas pertenecientes a una misma familia, tras la variación de los valores de los parámetros de la función cuadrática correspondiente. Con el propósito de atender a esta situación, el presente trabajo describe una secuencia de análisis de la “deformación” y “reflexión”, transformaciones éstas provocadas por la variación del parámetro correspondiente a la función $f(x) = ax^2$. Este tipo de análisis permite caracterizar a las familias de parábolas asociadas a la expresión anterior. La secuencia toma en cuenta algunos aspectos conceptuales, técnicos y metodológicos que consideramos pertinentes para realizar un análisis apropiado. Por un lado, se tiene en cuenta que la variación del parámetro a en la función $f(x) = ax^2$ produce las dos transformaciones mencionadas. Por otro lado, consideramos la existencia de algunos elementos teóricos relacionados con las parábolas, tales como los ejes de simetría y de reflexión, entre otros. Desde el punto de vista técnico, el análisis se apoya en el uso del GeoGebra, un recurso tecnológico potente que permite visualizar y relacionar parábolas pertenecientes a una misma familia con sus respectivas fórmulas algebraicas. Esta propuesta aporta información que puede potenciar la práctica profesional de los profesores de Matemática que laboran en la Educación Media de Venezuela y que sienten interés en el uso de recursos tecnológicos. Consideramos que su utilización en clases puede ayudar a estimular las capacidades de estos profesionales para la integración eficientemente de las tecnologías en su práctica.

Palabras claves: Parámetro, efectos geométricos, función cuadrática, GeoGebra.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, en el ámbito de la Educación Matemática se ha considerado como un propósito de aprendizaje esencial para la escuela media el reconocimiento de los efectos geométricos que producen los cambios en los valores de los parámetros sobre las gráficas de las funciones de una misma familia (NCTM, 2000). Para que los alumnos logren este aprendizaje, es necesario que los docentes comprendan adecuadamente estos efectos y sean capaces de integrar con eficiencia diversos recursos con potencial para la enseñanza de estos contenidos. Un recurso que ayuda a reconocer los efectos geométricos que produce la variación de los parámetros contenidos en la expresión simbólica de una función (p.e., el caso de a en $f(x) = ax^2$), sobre su gráfica, es el GeoGebra, un programa informático de acceso libre, de código abierto, que combina en tiempo real las representaciones gráficas y expresiones simbólicas de diversos objetos matemáticos y que actualmente está siendo utilizado por una comunidad importante de profesores e investigadores alrededor del mundo (Hohenwarter, 2006).

Al respecto, estudios realizados en los últimos años dan cuenta de una mejoría en el razonamiento matemático de los alumnos en cuanto a las características y propiedades geométricas de las funciones cuadráticas, luego de usar convenientemente al GeoGebra en las clases de Matemática (Darmawan y Iwan, 2011). Por esta razón, consideramos necesario que el profesor desarrolle conocimiento y destrezas para el análisis de las relaciones existentes entre la variación de los parámetros en expresiones que definen a la función cuadrática y las características gráficas de las curvas asociadas. Una manera de lograr esto es mediante experiencias de formación docente que les permitan pensar y construir rutas de enseñanza con las características antes señaladas, utilizando al GeoGebra.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo describe una secuencia para analizar los efectos geométricos de “deformación” y “reflexión” en distintas familias de parábolas definidas por la expresión $f(x) = ax^2$ y que pueden ser visualizadas por medio de la variación del parámetro a en un entorno dinámico con GeoGebra. Vale destacar que esta secuencia es parte de un análisis más detallado de los efectos geométricos asociados a

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

expresiones más generales de una función cuadrática, tal como $f(x) = ax^2 + bx + c$, que se ha reseñado en trabajos previos (Gutiérrez, Araujo y Prieto, 2012).

CONSIDERACIONES DEL ANÁLISIS

Conceptuales

En primer lugar, hemos considerado que los cambios en los valores del parámetro a de la expresión $f(x) = ax^2$ (con $a \neq 0$) producen dos clases de efectos geométricos sobre las gráficas correspondientes, conocidos como *deformación y reflexión* (Larson, Hostlerter & Edward, 2008). Ambos efectos son caracterizados a partir de las cualidades que posee alguna curva de la familia de $f(x) = ax^2$ que actúe como "referente" del efecto. En el caso de la deformación, la curva referente es la parábola canónica, de expresión $h(x) = x^2$. En el caso de la reflexión, cada curva tiene su referente, de manera que sólo una es la reflexión de la canónica, mientras que el resto de parábolas son la reflexión de curvas ya deformadas.

Según Larson, Hostlerter & Edward (2008), la deformación es una *transformación geométrica no rígida*, en la cual la gráfica de una parábola ha modificado su forma con respecto a la gráfica de la parábola canónica. Por su parte, la reflexión es concebida por estos autores como una *transformación geométrica rígida*, en la cual la gráfica de una parábola adquiere una posición en el plano distinta de su referente, sin modificar su forma.

En segundo lugar, para este análisis se tienen en cuenta los siguientes elementos asociados a las parábolas de la expresión $f(x) = ax^2$: (i) *eje de simetría (eje y)*, recta que divide a la curva en dos porciones simétricas; (ii) *vértice (origen del sistema)*, punto de intersección de la parábola con su eje de simetría; (iii) *eje de reflexión (eje x),* recta perpendicular al eje de simetría que pasa por el vértice; y (iv) *concavidad*, ubicación de los puntos de la parábola con respecto a los semiplanos determinados por el eje de reflexión.

Técnicas

En tercer lugar, la secuencia se apoya en el uso de un *deslizador*, herramienta del GeoGebra que permite hacer ajustes convenientes al parámetro de la función $f(x) =$

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

ax^2, con el fin de visualizar los cambios que sufren las curvas mientras el parámetro cambia de valor.

Metodológicas

Finalmente, dado que la variación del parámetro a produce dos tipos de transformaciones sobre las parábolas de la familia $f(x) = ax^2$, el análisis de la deformación y reflexión se lleva a cabo por separado. En ambos casos, el estudio se basa en establecer los intervalos en donde el parámetro debe variar para mostrar uno u otro efecto. Estos intervalos guiarán los ajustes convenientes hechos al deslizador con el fin de apreciar las relaciones entre los valores que el parámetro toma y las cualidades de las curvas que se muestran.

DEFORMACIÓN Y REFLEXIÓN

La variación del parámetro de la expresión $f(x) = ax^2$ a lo largo del intervalo $(-\infty, +\infty)$ permite visualizar dos familias de parábolas diferenciadas por la posición que éstas ocupan con respecto al eje de reflexión (*eje x*), las ubicadas por encima de este eje (cuando $a > 0$) y las localizadas por debajo del mismo (cuando $a < 0$). Consideramos que las curvas ubicadas por encima del *eje x*, excepto la parábola canónica, han sufrido una *deformación*, mientras que aquellas situadas por debajo del mismo eje son consecuencia de una *reflexión*.

Desde esta perspectiva, se puede concluir que:

Cuando $a > 0$, la expresión $f(x) = ax^2$ define a la familia de parábolas deformadas

Las curvas deformadas presentan una evidente variación en la forma que tienen sus ramas en el plano, con respecto a las ramas de la parábola canónica. Esta transformación puede ser de dos tipos: *contracción o dilatación*. Una parábola sufre una *contracción* cuando sus ramas se encuentran entre el *eje x* y las ramas de la parábola canónica (ver Figura 1a).

COVEM 2013
VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

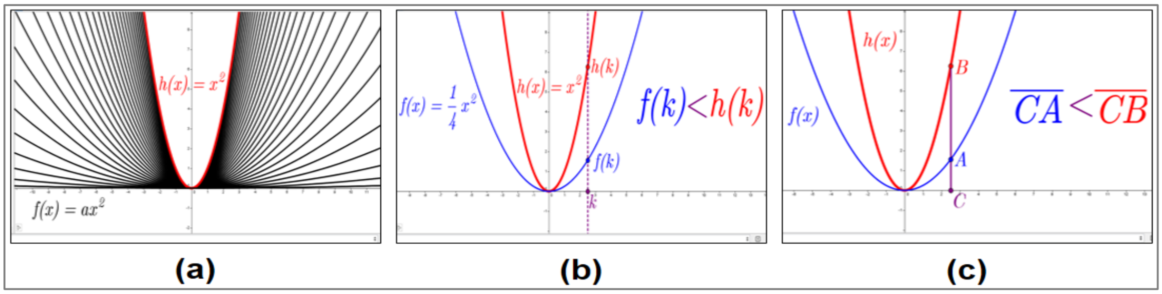

Figura 1. Familia de parábolas contraídas verticalmente.
Fuente: Gutiérrez, R. y Prieto, J. (2013)

La idea de la contracción puede entenderse tanto de forma analítica como geométrica. Desde lo analítico, la contracción se produce puesto que la imagen de $f(x) = ax^2$ (con $a > 0$) evaluada en k (con $k \in \mathbb{R}^*$), es siempre menor a la imagen de este mismo valor, evaluada $h(x) = x^2$. En otras palabras, ocurre que $f(k) < h(k)$ (ver Figura 1b). Desde lo geométrico, las imágenes se representan mediante segmentos paralelos al *eje y*, que van desde el valor k del dominio hasta las curvas $f(x)$ y $h(x)$, observándose que el primer segmento tiene menor longitud que aquel relacionado a $h(x)$. Por esta razón, algunos autores se refieren a esta deformación como una "contracción vertical" (ver Figura 1c).

Por su parte, una parábola sufre una *dilatación* cuando sus ramas se encuentran en la región interna[2] de la parábola canónica (ver Figura 2a).

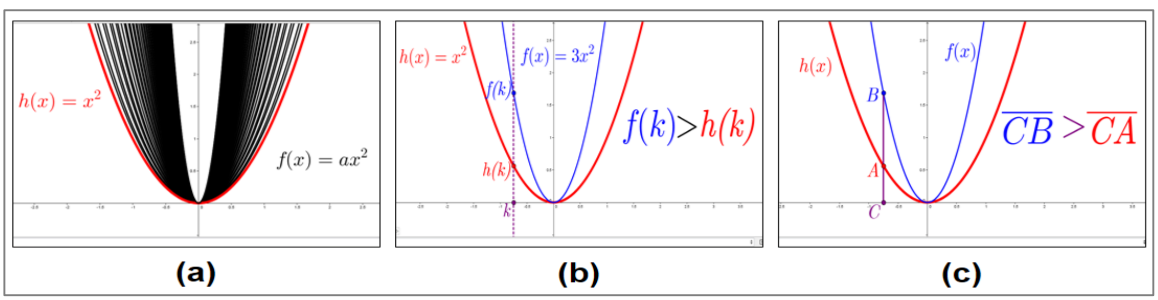

Figura 2. Familia de parábolas dilatadas verticalmente.
Fuente: Gutiérrez, R. y Prieto, J. (2013)

En una situación similar a la planteada en la contracción, la idea de la dilatación puede entenderse tanto de forma analítica como geométrica. Desde ambas perspectivas, la dilatación se produce ya que: (i) $f(k) > h(k)$ para todo $k \in \mathbb{R}^*$ (ver Figura 2b), y (ii) la longitud del segmento asociado a $f(x)$ es mayor que la longitud del segmento

[2] La región interna de la parábola correspondiente a $h(x) = x^2$ se define como: $\{(x, y) \epsilon R^2 / f(x) > x^2\}$.

Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

correspondiente a $h(x)$ (ver Figura 2c), razón por la cual algunos autores denominan a esta deformación como “dilatación vertical”.

Cuando $a < 0$, la expresión $f(x) = ax^2$ define a la familia de parábolas reflejadas

Cada curva reflejada es el resultado de aplicar la *simetría axial* (reflexión) a alguna parábola de $f(x) = ax^2$ (con $a > 0$), lo que lleva a que sus ramas quedan ubicadas por debajo del eje de simetría. De esta manera, se tiene que: (i) Cada parábola de $f(x) = ax^2$ (con $a < 0$) es el “reflejo” de una única curva deformada (su referente) (ver Figura 3a); y (ii) la concavidad de una parábola reflejada es opuesta a la que posee su referente.

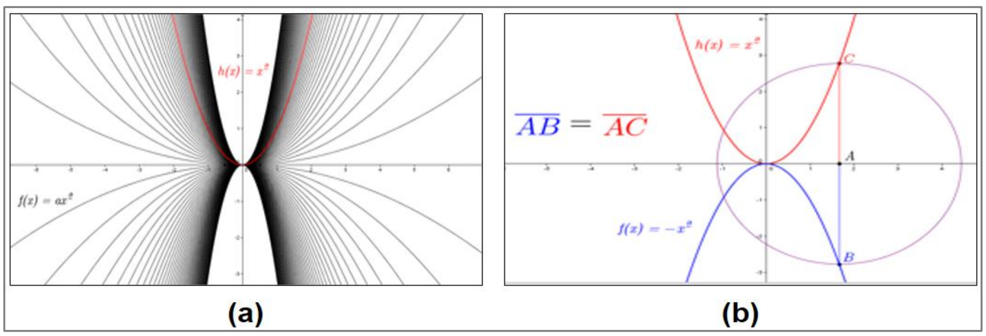

Figura 3. Familia de parábolas reflejadas y sus referentes.
Fuente: Gutiérrez, R. y Prieto, J. (2013)

Desde un punto de vista analítico, la imagen de k (con $k \in \mathbb{R}^*$) evaluada en $g(x) = ax^2$ (con $a < 0$) es el opuesto aditivo de la imagen del mismo valor k evaluada en la expresión $f(x) = ax^2$ (con $a > 0$), esto es $g(k) = -f(k)$ (ver Figura 3b). Desde un enfoque geométrico, estas imágenes están representadas por segmentos congruentes y paralelos al *eje y*, que parten de k en el dominio (*eje x*) hasta $f(x)$ y $h(x)$, respectivamente (ver Figura 3c). La congruencia entre los segmentos se debe a la simetría entre las parábolas analizadas.

LA DEFORMACIÓN EN UN ENTORNO DE GEOGEBRA

Para analizar la deformación con el GeoGebra, sin que intervenga la reflexión, es necesario ajustar el deslizador asociado al parámetro de $f(x) = ax^2$ en un intervalo comprendido entre 0 y un entero positivo, tan grande como el software lo permita y según las particularidades del análisis. En este intervalo encontramos un valor “notable” del estudio, el 1, dado que su representación en el deslizador produce la misma parábola

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

canónica y, por lo tanto, no hay deformación. A partir de este valor, se ha dividido el estudio en dos casos:

Caso 1: Contracción vertical en el intervalo (0, 1)

Este momento del análisis comienza con el ajuste de los valores mínimo y máximo del deslizador en 0 y 1, respectivamente. Luego de activar las opciones "Animación Automática" al deslizador y "Activa Rastro" a la parábola que se deforma, es posible apreciar algunas gráficas de la familia de parábolas contraídas verticalmente, con respecto a la canónica (ver Figura 1a). Mediante la observación de la situación es posible concluir que la contracción vertical es más notable en parábolas cuyo valor de a sean próximos al mínimo del intervalo, es decir a 0, haciendo que sus ramas estén más cercanas al *eje x*. Análogamente, en la medida que a se aproxima al máximo del intervalo, es decir a 1, la contracción vertical de las parábolas son menos notable.

Cabe mencionar que si se quiere observar un conjunto amplio de curvas contraídas verticalmente, basta con ajustar el "incremento" del deslizador en valores "pequeños", como lo es 0.01, debido a que el intervalo en el cual se produce esta deformación es reducido. Trabajar con intervalos reducidos como $(0, 1)$ dificulta la colocación del deslizador en algún valor entero, asunto que puede solventarse al ampliar la "longitud" del deslizador. Mientras mayor sea el ajuste de la longitud en el deslizador, mayores son las posibilidades de posarse sobre cualquier valor del parámetro.

Caso 2: Dilatación vertical en el intervalo (1, +∞)

En este caso es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en 1 y otro valor entero mayor que éste, respectivamente. Pero, ¿cuán mayor debe ser este valor? Una respuesta admisible puede encontrarse al observar la deformación que se muestra tras aplicar las opciones "Activa Rastro" y "Animación Automática" para distintos valores máximos del intervalo, tales como 3, 10 y 75. Para cada intervalo, la animación muestra una familia de parábolas dilatadas verticalmente, en donde la dilatación se hace más "marcada", esto es, las ramas están más próximas al *eje y*, cuando el máximo del intervalo es 75 (ver Figura 2a).

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

LA REFLEXIÓN EN UN ENTORNO DE GEOGEBRA

Para analizar este efecto es necesario ajustar el deslizador asociado al parámetro a en un intervalo comprendido entre un valor muy pequeño y 0. En este intervalo encontramos un valor notable, el -1. Lo notable del valor se debe a que la gráfica de $f(x)$, cuando el deslizador se posa sobre -1, corresponde al reflejo de la parábola canónica. Esta gráfica divide a la familia de curvas reflejadas en dos conjuntos, que se explican a continuación:

<u>*Caso 1: Reflexión en el intervalo (-1, 0)*</u>

Es el momento de ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en -1 y 0, respectivamente. Tras activar la "Animación Automática" al deslizador y el rastro a la parábola que se transforma, es posible apreciar al conjunto de parábolas reflejadas que se ubican entre el *eje x* y el reflejo de la parábola canónica (ver Figura 4a). Cada una de estas curvas es el reflejo de alguna parábola contraída previamente.

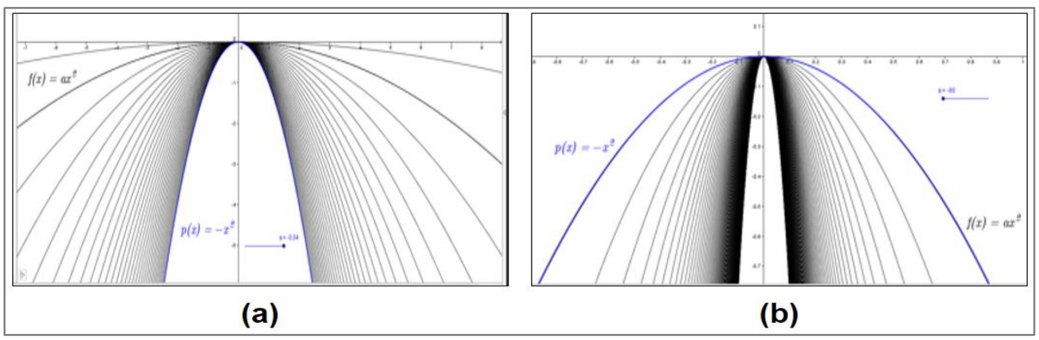

Figura 4. Reflexión en los intervalos (-1, 0) y $(-\infty, -1)$.
Fuente: Gutiérrez, R. y Prieto, J. (2013)

<u>*Caso 2: Reflexión en el intervalo $(-\infty, -1)$*</u>

Para caracterizar la reflexión en este intervalo se debe ajustar el mínimo del deslizador en un valor entero negativo, menor que -1, y el máximo en este último valor. Pero ¿cuán menor debe ser el valor del mínimo? La respuesta puede encontrarse al observar el comportamiento de la reflexión para valores mínimos del intervalo, tales como -80, -35 y -7. En cada caso, la animación muestra un conjunto de curvas reflejadas que se ubican en la región interna del reflejo de la parábola canónica (ver Figura 5b). Cada una de estas curvas es la reflexión de una única parábola que se ha dilatado previamente. Sin embargo, cuando el mínimo del intervalo es -80, las ramas de las curvas se encuentran más próximas al *eje y*.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito una secuencia para caracterizar diversas familias de parábolas correspondientes a $f(x) = ax^2$, en relación a los efectos geométricos de *deformación* y *reflexión*, que son provocados por la variación del parámetro a de la expresión en un entorno dinámico. Mediante el uso de un deslizador fue posible establecer relaciones entre los valores que toma el parámetro, en intervalos establecidos convenientemente, y las parábolas que se aprecian en la vista gráfica del GeoGebra, las cuales otorgan un sentido a los efectos analizados. Lo anterior es evidencia de la capacidad que algunos autores le atribuyen al GeoGebra de conectar dos de las principales representaciones de las funciones (fórmulas algebraicas y gráficas), facilitando con ello la caracterización de la deformación y de la reflexión en el caso de las parábolas (Bayazit y Aksoy, 2010; Hohenwarter, 2006).

Finalmente, nuestra secuencia representa un método de análisis de contenidos matemáticos cuya aprehensión y puesta en práctica coloca al profesor en mejores condiciones para impartir la enseñanza de este tópico. A pesar del esfuerzo realizado, es necesario ampliar este análisis a otras funciones reales, tales como la racional, irracional, logarítmica, exponencial, trigonométricas, entre otras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bayazit, I. y Aksoy, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with geogebra. *Geogebra International Journal of Romania*, 1 (1), 93-106.
- Darmawan, D. y Iwan, P. (2011). On the teaching of analyzing the effects of parameter changes on the graph of function. Trabajo presentado en la *Fourth National Conference on Mathematics Education*, Julio, Yogyakarta.
- Gutiérrez, R., Araujo, Y. y Prieto, Juan L. (2012). Una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilizando GeoGebra. Trabajo presentado en la *Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*, Noviembre, Montevideo. Disponible en: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/23.pdf.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

- Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using geogebra. Trabajo presentado en el *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*, Julio, Dresden.

- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- Larson, R., Hostlerter, R., & Edwards, B. (2008). Shifting, Reflecting, and Stretching Graphs. *Precalculus: A Graphing Approach, 5th Edition* (pp.127-132). New York: Houghton Mifflin Company.