Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

EL ESTUDIO DE LA SECANTE Y COSECANTE DE UN ÁNGULO POR MEDIO DE LA INVERSIÓN: UNA PROPUESTA DE INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA CON GEOGEBRA

MONTERO Jean; **WETTEL** Leonard y **PRIETO** Juan Luis

jmontero865@hotmail.com; juan.prieto@aprenderenred.com.ve

Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Maracaibo, Edo. Zulia.

Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) - LUZ, Maracaibo, Edo. Zulia.

RESUMEN

Este trabajo tiene el propósito de describir el diseño y formas de usar un recurso con GeoGebra que permita tanto la comprensión de la relación de proporcionalidad inversa entre una razón trigonométrica y su recíproca, como la visualización del rango de valores de la Secante y Cosecante de un ángulo. El diseño tuvo en cuenta el concepto de inversión de figuras planas, por considerarlo una teoría con gran utilidad para este estudio debido a su relación con todo par de magnitudes que mantienen una relación inversamente proporcional, como es el caso de las razones coseno y seno de un ángulo, y sus recíprocas. Las relaciones entre el estudio de las razones trigonométricas y la inversión se pueden ver reflejadas al asumir la circunferencia unitaria como una circunferencia de inversión de potencia igual a uno (se corresponde con el radio de la primera). En el diseño también se consideraron las bondades que proporciona el entorno dinámico del GeoGebra para representar los aspectos teóricos antes mencionados, destacando el hecho de la posibilidad de variar el ángulo agudo que determina las longitudes de los segmentos que representan a las razones trigonométricas. La simple variación del ángulo mencionado permite visualizar que el cambio de las medidas de los segmentos representativos de una razón y su recíproca es inverso y también que el rango de valores de la Secante y Cosecante de un ángulo nunca está en el intervalo (-1,1). Por lo tanto puede concluirse que este recurso potencia la labor del docente en su búsqueda de facilitar la internalización de *los conocimientos estudiados por parte de los estudiantes.*

Palabras clave: Razones trigonométricas, inversión, interpretación geométrica, proporcionalidad

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se tratan dos de las razones trigonométricas más difíciles de comprender por parte de los estudiantes de Educación Media, nos referimos a la *Secante* y la *Cosecante* de un ángulo. En un estudio previo, Díaz y Prieto (2013) han abordado el problema de la comprensión de los signos de las razones *Seno*, *Coseno* y *Tangente* de un ángulo, desde un punto de vista geométrico y apoyados en entornos dinámicos. En su trabajo los autores otorgan valor a los procesos de interpretación geométrica de los signos de estas razones a partir de la construcción de segmentos cuyas longitudes coinciden con los valores del *Seno*, *Coseno* y *Tangente* de ángulos entre 0° y 360°, asignándoles además los signos positivo o negativo según la ubicación de estos segmentos en una circunferencia unitaria dibujada con el GeoGebra. Al replicar este análisis sobre la *Secante* y *Cosecante* de un ángulo observamos que las construcciones auxiliares sobre la circunferencia unitaria no representaban una ayuda al momento de determinar segmentos verticales u horizontales que representaran a estas razones.

Este problema fue superado incorporando al análisis un concepto matemático olvidado en los programas de Educación Media como es la *Inversión en el plano*, la cual consiste en la reflexión de un objeto respecto a una circunferencia, la misma es conocida como circunferencia de inversión, debido a que su centro y su radio son elementos de la inversión, el primero es denominado centro de inversión y el cuadrado del segundo se conoce como potencia de la inversión.

El concepto de *inversión* es aplicable a cualquier par de magnitudes que se relacionen de manera inversamente proporcional, ya que una propiedad del mismo es que el producto de las distancias entre el centro de inversión y un punto dado y entre el mismo centro y el homólogo del punto reflejado es constante.

Como es sabido, la *Secante* y la *Cosecante* de un ángulo son las razones trigonométricas recíprocas del coseno y el seno del mismo ángulo respectivamente, ya que están relacionadas de la siguiente manera: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, esta relación es de proporcionalidad inversa.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

La comprensión de la relación de proporcionalidad inversa de las razones trigonométricas y sus recíprocas, el rango de valores de la *Secante* y la *Cosecante* de un ángulo y el signo de las mismas para los diferentes valores del ángulo se dificulta para los estudiantes en un entorno estático, puesto que éste limita ostensiblemente el universo de posibilidades.

Por lo antes expuesto esta investigación tiene como propósito describir el diseño y formas de usar un recurso con GeoGebra que permita la comprensión de la relación de proporcionalidad inversa entre una razón trigonométrica y su recíproca, la visualización del rango de valores de la Secante y Cosecante de un ángulo y el signo de las mismas para los diferentes valores de un ángulo.

En el trabajo se presenta la siguiente información:

- El Propósito de la Investigación.
- La Fundamentación Teórica.
- El Diseño del Recurso.
- Forma de Usar el Recurso.
- Las Conclusiones.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Describir el diseño y formas de usar un recurso con GeoGebra que permita la comprensión de la relación de proporcionalidad inversa entre una razón trigonométrica y su recíproca, la visualización del rango de valores de la Secante y Cosecante de un ángulo y el signo de las mismas para los diferentes valores de un ángulo.

DESARROLLO DEL TRABAJO

Fundamentación teórica

- **La Secante y la Cosecante de un ángulo**

Al hablar de la Secante y la Cosecante de un ángulo se hace referencia a las razones trigonométricas recíprocas del coseno y el seno del mismo ángulo.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

La Secante y la Cosecante de un ángulo por ser recíprocas del coseno y el seno del mismo ángulo pueden relacionarse con estas de la siguiente manera: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

De las relaciones anteriores puede deducirse lo siguiente: la Secante y la Cosecante de un ángulo son inversamente proporcionales al coseno y al seno del mismo ángulo respectivamente, ya que al incrementarse una la otra disminuirá y viceversa. Además el rango de valores tanto de la Secante como de la Cosecante de un ángulo nunca está en el intervalo (-1,1).

- **La inversión en el plano**

El concepto de inversión se refiere a la reflexión de un objeto respecto a una circunferencia, la cual es conocida como circunferencia de inversión.

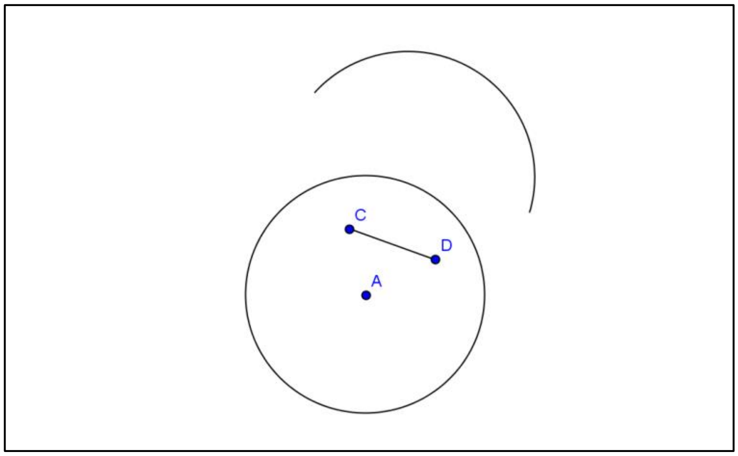

Figura 1: Inversión del segmento CD.

Por estar involucrada una circunferencia puede deducirse que tanto el centro como el radio de la misma sean elementos de la inversión. El centro de la circunferencia es conocido como el centro de reflexión o de inversión y tiene la propiedad de ser colineal con cualquier punto y su reflejo también llamado homólogo.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

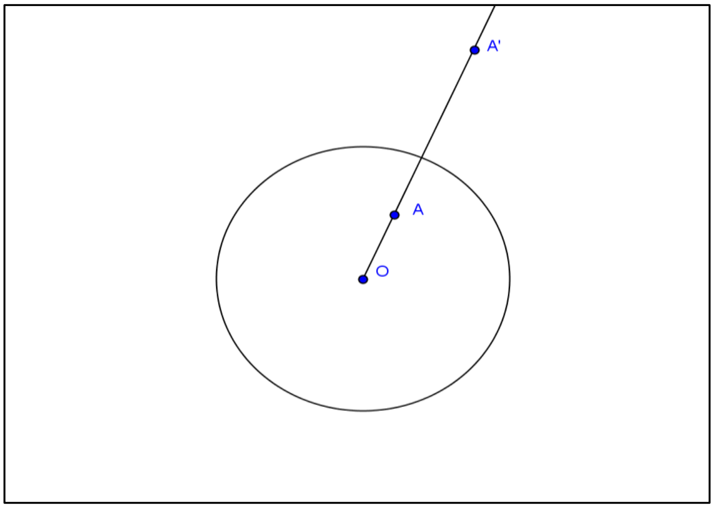

Figura 2: Inversión del Punto A.

Otro elemento de la inversión es la potencia, la cual es igual al cuadrado del radio de la circunferencia de inversión, otra característica de la potencia de inversión es que es igual al producto de la distancia entre el centro de inversión y un punto del objeto reflejado y la distancia entre el mismo centro y el homólogo del punto reflejado, esto es:

$$\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OA}'} = \mathrm{K}$$

Donde: O es el centro de reflexión, A es el punto reflejado, A' es el reflejo de A y K es la potencia de la inversión.

De la ecuación anterior puede deducirse que la inversión es una relación de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes, debido a que K es constante y para que se mantenga así, al aumentar una de las magnitudes necesariamente la otra tiene que disminuir y viceversa.

- **Relación entre las razones trigonométricas y la inversión**

Como se observó en el apartado anterior, la inversión es una relación de proporcionalidad inversa, por lo tanto puede aplicarse a cualquier par de variables que compartan una relación de este tipo.

Anteriormente se mostró que la Secante y la Cosecante de un ángulo son inversamente proporcionales al coseno y el seno de ese ángulo respectivamente, por lo tanto su relación puede ser tratada por medio del concepto de inversión.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Las igualdades: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, también pueden escribirse de la siguiente manera: $\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1 \;\; y \;\; \csc\alpha \cdot \sin\alpha = 1$

Puede notarse que las ecuaciones anteriores cumplen con la ecuación general de la inversión y que para cada caso K es igual a uno, por lo cual el radio de la circunferencia de inversión es uno.

DESCRIPCIÓN DEL RECURSO

Para el diseño del recurso se partió de la circunferencia trigonométrica y de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene sus vértices ubicados, uno en el centro de la circunferencia y el otro sobre la misma. El tercer vértice del triángulo se ubica sobre el eje horizontal.

El trabajar de esta manera permite simplificar la comprensión de los objetos estudiados, debido a que los valores del coseno y del seno para el ángulo interior del triángulo en el vértice correspondiente al centro de la circunferencia, son iguales a las longitudes de dos simples segmentos.

Los segmentos antes mencionados son: el cateto adyacente al ángulo estudiado para el caso del coseno y la proyección sobre el eje Y del cateto opuesto del mismo ángulo para el seno.

Por lo antes expuesto la simple inversión de los extremos no comunes de dichos segmentos respecto a la circunferencia trigonométrica, producirá dos puntos conocidos como homólogos de los puntos invertidos, los cuales al unirse al centro de la circunferencia generarán otros dos segmentos, uno horizontal y otro vertical, cuyas longitudes serán iguales a los valores de la Secante y la Cosecante respectivamente para dicho ángulo.

El procedimiento para la elaboración del recurso es el siguiente:

1. Se traza la circunferencia trigonométrica (herramienta circunferencia dados su centro y su radio).
2. Se ubica un punto cualquiera B sobre la circunferencia (herramienta nuevo punto).

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

3. Se construyen por B perpendiculares a los ejes de coordenadas (herramienta recta perpendicular).
4. Se determinan las intersecciones de las perpendiculares con los ejes (C sobre el eje X y D sobre el eje Y) ((herramienta intersección de dos objetos).
5. Se ocultan las perpendiculares a los ejes (click derecho sobre las mismas opción muestra objeto).
6. Se construye el triángulo rectángulo ABC (herramienta polígono).
7. Se define el ángulo α en el vértice A del triángulo (herramienta ángulo).
8. Se trazan los segmentos AC y AD correspondientes al coseno y al seno del ángulo α respectivamente y se les cambia su color para diferenciarlos (herramienta segmento entre dos puntos y click derecho sobre los segmentos y la opción propiedades de objeto).
9. Se invierten los puntos C y D respecto a la circunferencia trigonométrica para obtener sus homólogos los cuales se renombran como los puntos E y F respectivamente (herramienta refleja objeto en circunferencia y click derecho sobre los puntos y opción renombra).
10. Se trazan los segmentos AE y AF correspondientes a la Secante y a la Cosecante del ángulo α respectivamente y se les cambia su color para diferenciarlos (herramienta segmento entre dos puntos y click derecho sobre los segmentos y la opción propiedades de objeto).
11. Se muestran las coordenadas de los puntos E y F, las cuales se corresponderán con los valores de la Secante y la Cosecante de α respectivamente (click derecho sobre los puntos, la opción propiedades de objeto, luego opción básico, muestra rotulo y nombre y valor).

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

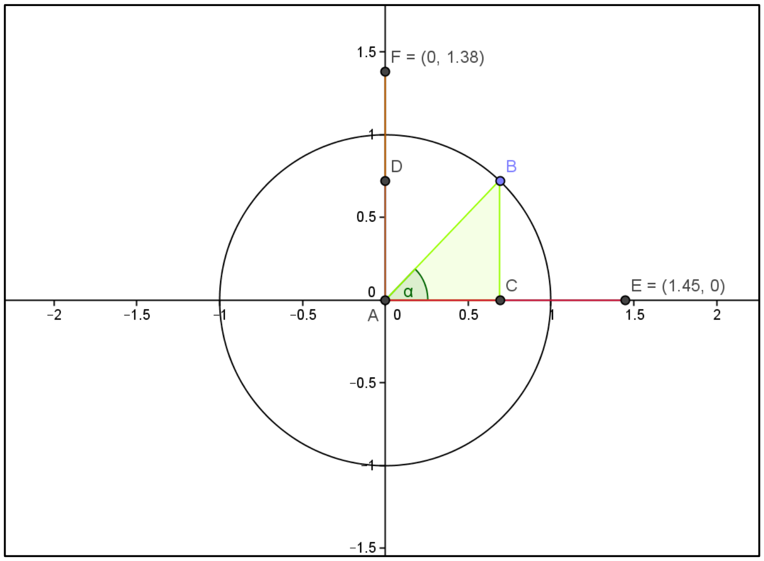

Figura 3: Recurso Finalizado

FORMA DE USAR EL RECURSO

Para la aplicación del recurso se sugiere desplazar el punto B por toda la circunferencia, esto se puede llevar a cabo manualmente o activando la animación automática del mismo. Lo anterior con el objeto de que los estudiantes observen como al incrementarse la longitud de los segmentos representativos del coseno y el seno del ángulo α disminuye la longitud de los segmentos que representan a sus razones trigonométricas recíprocas y viceversa, lo cual se considera facilitará la comprensión del tipo de relación que estas presentan. Además también se recomienda activar el rastro de los puntos E y F para observar claramente el rango de valores de las razones estudiadas, es decir el mismo no tomará valores del intervalo (-1,1) y los signos de la Secante y la Cosecante de un ángulo en los distintos cuadrantes se observan mostrando las coordenadas de los puntos E y F.

CONCLUSIONES

- La manipulación del recurso permite establecer relaciones entre conceptos matemáticos que no parecían estar vinculados, es decir, las razones trigonométricas y la inversión en el plano.
- Con este recurso es posible realizar interpretaciones geométricas de las razones trigonométricas de la secante y la cosecante de un ángulo.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

- Con el entorno dinámico que proporciona el GeoGebra se facilita la comprensión de las características de la secante y la cosecante de un ángulo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Díaz, S., Prieto, J. (2013). El Análisis de los signos de las razones trigonométricas con tecnología. Una manera de trascender las reglas prácticas.

Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. Trabajo presentado en el *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*, Julio, Dresden.

Reventós, A. (2003). Geometría inversiva. *La Gaceta de la RSME*, 6(1), 39-79.