

## UNA PROPUESTA DE GESTIÓN ÁULICA EN CLASES DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Nélida Aguirre, Andrea Maero  
Universidad Nacional de Río Cuarto. República Argentina  
nvaguirre@exa.unrc.edu.ar  
Nivel Universitario

**Palabras clave:** Modelización. Proyectos. Gestión. Práctica docente.

### Resumen

Existe una tendencia en los educadores de pensar que si se enseña matemáticas con cierta formalidad y amplitud teórica, los estudiantes serán capaces de aplicar matemáticas a otras áreas y contextos sin una enseñanza adicional. Sin embargo, hay evidencias de que esto no necesariamente ocurre en la realidad. Si pretendemos que los estudiantes adquieran competencia en modelización, ella debe estar presente de manera explícita en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

De la misma manera, como consecuencia de una formación tradicional que se focaliza enteramente en los temas matemáticos puros, los docentes pueden tener dificultades para crear ambientes, situaciones y actividades para la aplicación y modelación. Y si queremos que los docentes de matemáticas sean capaces de dar lugar a la modelación de manera eficiente en su enseñanza, ellos necesitan tener la oportunidad de desarrollar la capacidad durante su formación.

En el marco de la asignatura Modelos Matemáticos, correspondiente al tercer año de la carrera de Profesorado en Matemática, hemos desarrollado un Proyecto de Innovación e Investigación para el Mejoramiento de la Enseñanza de Grado (PIIMEG) que, entre otros objetivos, nos propusimos brindar a los estudiantes el ámbito necesario para:

- *Desarrollar la capacidad de planear, implementar y evaluar actividades de modelización a partir de situaciones reales de su elección e interés.*
- *Aprender contenidos disciplinares con significado.*
- *Ejercitar el rol de la futura práctica profesional.*

En este trabajo haremos una descripción de las tareas realizadas y una síntesis de los resultados obtenidos de su implementación.

### Introducción

Nuestro punto de partida es considerar que el rol esencial de la actividad matemática consiste en *construir modelos de la realidad que se quiere estudiar* para dar respuesta o mejor respuesta a los problemas que se plantean en ese ámbito. Bosch, García, Gazcón & Higuera (2006) señalan que “la modelización no es sólo una dimensión de la actividad matemática, sino que la actividad matemática es, en esencia, una actividad de modelización” (p.14). Esto deja ver el posicionamiento que tenemos frente a la matemática y, desde el punto de vista de la enseñanza, podemos decir que lo que se piensa respecto a la ciencia matemática y sus procesos de construcción, condicionarán el tipo de enseñanza que se desarrollará.

El hecho de dar el papel protagonista al estudio de problemas y a la búsqueda de respuestas a cuestiones específicamente formuladas, nos sitúa en contraposición directa al modelo docente tradicional en el que las asignaturas se organizan en torno a los contenidos conceptuales y los ejemplos o aplicaciones se enseñan como ilustraciones de lo mostrado previamente.

Además del conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos que los alumnos, futuros docentes de matemática, adquieren como resultado de la enseñanza, ellos se forman una idea acerca de qué es la matemática y de cómo se resuelven las tareas matemáticas. Idea que, por otra parte, está muy influenciada por la concepción que sobre la matemática se posee en la institución en que aprenden esos conceptos y procedimientos. Estamos en condiciones de afirmar, compartiendo con Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2010) que en las instituciones educativas, la epistemología dominante es “aplicacionista”, y se asigna a la modelación matemática un papel secundario.

Por otro lado, la noción de lo que es la matemática y cómo se trabaja en matemáticas determina en gran medida el modo en que los alumnos desarrollarán a futuro su práctica docente. Por ello, es altamente probable que un profesor de matemática no adopte la modelización como estrategia de enseñanza si en su formación esa actividad no fue contemplada, siendo esta una de las razones por las que la modelación matemática suele estar ausente en las aulas del nivel medio.

Uno de los desafíos que enfrentan las instituciones de formación de profesores es el desarrollo de planes de estudios que permitan estrechar la brecha entre la matemática pura y aplicada, otorgando un papel de relevancia a la modelización matemática y a los contextos en la conformación de significado.

Existe una tendencia en los educadores de pensar que si se enseña matemáticas con cierta formalidad y amplitud teórica, los estudiantes serán capaces de aplicar matemáticas a otras áreas y contextos sin una enseñanza adicional. Sin embargo, hay evidencias de que esto no necesariamente ocurre en la realidad. Si pretendemos que los estudiantes adquieran competencia en modelización, ella debe estar presente de manera explícita en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Desde el año 2001, se ha incorporado en el Plan de Estudios de la Carrera de Profesorado en Matemática, que se imparte en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto, la asignatura Modelos Matemáticos. Y desde ese momento se ha venido trabajando por impartir a los estudiantes la concepción filosófica que subyace a todo proceso de modelización.

En el marco de esta asignatura, de aproximadamente diez alumnos en promedio, hemos desarrollado un Proyecto de Innovación e Investigación para el Mejoramiento de la Enseñanza de Grado (PIIMEG) que, entre otros objetivos, nos propusimos brindar a los estudiantes el ámbito necesario para:

- *Desarrollar la capacidad de planear, implementar y evaluar actividades de modelización a partir de situaciones reales de su elección e interés.*
- *Aprender contenidos disciplinares con significado.*
- *Ejercitar el rol de la futura práctica profesional.*

En este trabajo haremos una descripción de las tareas realizadas, la metodología empleada y una síntesis de los resultados obtenidos de su implementación.

### **Descripción de la innovación**

En la asignatura Modelos Matemáticos se estudian modelos determinísticos, discretos y continuos, lineales y no lineales. Para la elección de los modelos, se tienen en cuenta problemas que surgen esencialmente de la biología de poblaciones, ecología, finanzas, sociología y de la vida cotidiana. Los contenidos incluyen, desde las técnicas más simples de modelación, tales como la obtención de una tabla de datos, pasando por el ajuste de curvas hasta la elaboración de modelos, enfatizando la importancia de la traducción de un lenguaje usual al lenguaje matemático y viceversa.

Mientras que el subproceso de llevar una situación–problema del mundo real a un modelo matemático es algunas veces llamado modelización matemática, es costumbre usar también esa noción al proceso entero, involucrando todo en él: identificar el problema en el mundo real, generar el modelo matemático, resolverlo, validar su solución en la situación original, analizar limitaciones, realizar simulaciones y predicciones. Esta última posición es la que se adopta en el Proyecto.

Con respecto al concepto de *modelo matemático*, se han planteado distintas definiciones cada una de las cuales hace referencia en gran medida a la visión que se tiene de la matemática en relación con el mundo real.

Se adopta la siguiente definición de modelo, obtenida a partir de la de Giordano, F., Weir, M., Fox, W. (2003):

Un *modelo matemático* es una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del “mundo real”. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales.

Un modelo es, por lo tanto, una representación más sencilla o la idealización de una realidad más compleja y se crea con el objetivo de obtener una mayor comprensión o nuevos conocimientos sobre el mundo real mediante la investigación de propiedades.

Indudablemente la selección de situaciones reales a modelizar es uno de los puntos más fuertes que presenta la modelización por la motivación que genera en quien aprende.

Para que el estudiante se sienta motivado a aprender unos contenidos de forma significativa es necesario que pueda atribuir sentido a aquello que se le propone. Eso depende de muchos factores personales pero también depende de cómo se le presente la situación de aprendizaje, lo atractiva e interesante que le resulte como para implicarse activamente en un proceso de construcción de significados. Por eso, uno de los retos de los participantes del

Proyecto fue decidir no sólo cuáles iban a ser los contenidos a trabajar, sino debatir también la metodología para conseguir esos contenidos.

Es posible incluir diversas situaciones que vinculen las matemáticas a la realidad a través de la modelación y las mismas pueden ser organizadas como experiencias de aprendizaje en muy diversas formas. Una de estas formas, es el trabajo en *proyectos* y en ella se basó la innovación.

El aprendizaje basado en *proyectos* es una estrategia de enseñanza en el que los estudiantes planean, implementan y evalúan situaciones que tienen aplicación en el mundo real más allá del aula de clase. Con las actividades de modelación basadas en proyectos pretendimos brindar a los estudiantes la oportunidad de aplicar matemáticas a situaciones de la vida real que implicaran:

- interactuar con el medio cuando se requiera de trabajo extra-clase,
- recorrer el proceso de modelación matemática, desde la elaboración de una idea inicial a la discusión de resultados parciales y finales,
- la posibilidad de ser activos en una construcción por etapas,
- desarrollar habilidades en investigación.

Para que esto fuera posible, debimos crear ambientes de enseñanza, situaciones, diseñar actividades y materiales así como implementar instrumentos de evaluación apropiados.

### **Ambiente de aprendizaje**

Para involucrar a los alumnos en la comprensión de un problema fue esencial proponer enunciados que los lleve a involucrarse en su resolución, sin que el texto anticipe un único procedimiento. En este sentido, los contextos de los problemas debían ser significativos para los alumnos; es decir, implicar un desafío que pudieran resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y de sus experiencias sociales y culturales previas. Por otra parte, las situaciones trabajadas debían ofrecer una variedad de tipos de respuestas.

Para la planificación de las actividades se tuvieron en cuenta las siguientes cuestiones:

- Nivel educativo al que estaba dirigida la propuesta.
- Identificación de un tema factible de despertar el interés de los estudiantes, con el fin de formular un problema a resolver con el uso de modelos.
- Grado de accesibilidad de los contenidos disciplinares matemáticos implicados, de los métodos matemáticos a usar y del contexto extramatemático.
- Inclusión de situaciones en las que los estudiantes pudieran transitar por las distintas fases del proceso de modelación.

Para la realización eficaz de cada uno de los Proyectos se explicitaron tanto los objetivos que se perseguían, como los aspectos a evaluar y los criterios a utilizar en la evaluación.

Así, las actividades en Proyectos contuvieron los siguientes elementos:

- Descripción de la situación o problema que el proyecto busca entender o resolver.

- El objetivo del proyecto (lo que se pretende que los estudiantes hagan: investigar, realizar encuestas, recomendaciones, etc.).
- Lista de criterios de calidad que el proyecto debe cumplir.
- Guías o instrucciones para desarrollar el proyecto (tiempo de realización, metas a corto plazo).
- Listado de los participantes y roles que se les asignaron (miembros del equipo, miembros de la comunidad, expertos)
- Modo de evaluación del desempeño de los estudiantes. En el aprendizaje por proyectos se evaluó tanto el proceso de aprendizaje como el producto final.

El trabajo basado en Proyectos es retador y complejo ya que implica utilizar un enfoque interdisciplinario y estimular el trabajo cooperativo.

404

Para que el alumno estuviera motivado para la realización de la tarea, debimos establecer lo que consideramos una *distancia óptima* entre lo que el alumno ya sabe y el nuevo contenido de aprendizaje, ya que si la distancia es excesiva, el estudiante se desmotiva porque cree que no tiene posibilidades de asimilar o de atribuir significado al nuevo aprendizaje y si la distancia es mínima también se produce un efecto de desmotivación porque conoce ya, en su mayor parte, el nuevo material que ha de aprender. Cuando el alumno disfruta realizando la tarea se genera motivación ya que afloran emociones positivas que contribuyen a sostener la persistencia y el esfuerzo requerido en su realización hasta finalizarla con eficacia y calidad.

Es sabido que el ambiente de aprendizaje está condicionado por la relación de poder establecida y por los papeles que se le atribuyen a los alumnos y al docente. En ello tiene mucha incidencia el tipo de tareas que el docente suele proponer, el modo en que anima (o no) a los alumnos a manifestar dudas u opiniones, las oportunidades que les da para que argumenten y justifiquen sus ideas. Todos estos aspectos encierran mensajes implícitos sobre el papel que el profesor atribuye a los alumnos en el aprendizaje y sobre sus expectativas con relación a sus capacidades.

La enseñanza y aprendizaje de la modelización exige que los alumnos interactúen entre sí y con el profesor. Por esta razón, en las clases los alumnos tuvieron una participación activa y el docente cumplió el papel de organizador y dinamizador del aprendizaje. Haciendo preguntas a los alumnos y cuestionándolos, el docente pudo detectar las dificultades que se presentaban en el nivel de comprensión de los conceptos y de los procesos matemáticos, les ayudó a pensar y los motivó a participar.

El docente alentó a que los alumnos tuvieran la iniciativa de formular problemas, hicieran preguntas y conjeturas y presentaran soluciones, exploraran ejemplos y contraejemplos en la investigación sobre una conjetura, y que utilizaran argumentos matemáticos para determinar la validez de las afirmaciones, intentando convencerse a sí mismo y a los demás. Los alumnos debieron habituarse a emplear distintos materiales y soportes para razonar y para comunicar, que incluyeron el pizarrón, la computadora, el papel.

La comunicación escrita proporciona también una oportunidad importante de expresar ideas matemáticas. Por ello se solicitó a los alumnos que redacten informes o ensayos, justificando y explicando sus razonamientos. Se remarcó que en cada paso debían preguntarse el por qué de las decisiones tomadas.

En términos generales la clase se dividió en tres partes.

- Introducción.
- Fase de trabajo.
- Resumen.

En cuanto a la *Introducción*, ésta suele ser una oportunidad para presentar el contexto en el que tendrá lugar la modelización, presentar alguna lectura o informe complementarios, seguida de un debate sobre cómo afrontar la tarea.

En la *Fase de trabajo*, la tarea requiere que los estudiantes debatan sobre cómo realizarla, efectúen experimentos, investiguen para buscar información, utilicen Internet. Los alumnos en un comienzo de la asignatura eligen con quién quieren trabajar y, con posterioridad se produce una rotación de los integrantes a fin de propulsar el intercambio de nuevas formas de razonar y trabajar.

El docente puede seleccionar a un miembro del grupo para que presente los resultados. En este caso, mientras trabajan en la tarea los alumnos no saben quién va a presentar los mismos, esto hace que todos los miembros participen en la resolución dentro del grupo.

Las tareas de modelización tienen normalmente soluciones distintas, porque los estudiantes trabajan con suposiciones distintas y frecuentemente con métodos distintos.

No todas las soluciones serán correctas; algunas tendrán errores en los cálculos, o quizá tengan suposiciones erróneas que lleven a soluciones erróneas.

Por esta razón, en la instancia de *Resumen* se solicita a los distintos grupos que comparen todas las soluciones y debatan cuáles están bien y cuáles tienen errores, así como las ventajas y desventajas de los distintos enfoques encontrados.

Durante el desarrollo del Proyecto, hemos llevado registro de datos cognitivos, epistemológicos y heurísticos de los alumnos con el fin de tener una visión sobre el proceso de aprendizaje y a la vez un indicador de la eficacia de la metodología empleada.

Otro elemento importante en la investigación fue el registro de las opiniones de los alumnos en forma escrita, realizado mediante un *cuestionario*. A continuación se transcribe una muestra de comentarios establecidos en los cuestionarios por los propios estudiantes:

- “...me parece interesante que se sigan implementado los proyectos al igual que me gustó que me hiciera hacer los grupos con diferentes personas porque pude ver la forma de razonar de los demás, discutir con ellos y así enriquecer mi pensamiento.”

- *“Creo que se debería continuar con esta metodología de trabajo porque permite integrar la matemática con casos de la vida cotidiana, utilizar los recursos de computadora disponible, aplicar conocimientos anteriores, relacionar con otros campos disciplinares”.*
- *“Esta materia me pareció muy interesante y me gustó mucho y disfruté trabajarla por los temas de la materia y por la forma de trabajo”.*
- *“...Es la primera vez que tuve que poner en juego todas las cosas que había aprendido en materias anteriores, pude comprender conceptos que antes no me parecían interesantes o no veía su importancia a la hora de analizar una situación. Otro aspecto que rescato es que a través de los proyectos he trabajado con compañeros con los que nunca me había juntado”.*

### **Tareas para ejercitar la futura práctica docente**

Se mencionó anteriormente que los estudiantes no tienen por qué ser capaces de aplicar matemáticas, analizar y construir modelos matemáticos como un resultado automático de una enseñanza de las matemáticas puramente teórica. De la misma manera, como consecuencia de una formación tradicional que se focaliza enteramente en los temas matemáticos puros, los docentes pueden tener dificultades para crear ambientes, situaciones y actividades para la aplicación y modelación. Y si queremos que los docentes de matemáticas sean capaces de dar lugar a la modelación en su enseñanza, de manera eficiente, exitosa y reflexiva, ellos necesitan tener la oportunidad de desarrollar la capacidad durante su formación.

Por esta razón, en forma paralela a los trabajos en proyectos, se diseñaron tareas para que los estudiantes pudieran ejercitar el rol de la futura práctica profesional.

Estas tareas consistieron en:

- Mostrar a los alumnos una actividad típica de un libro de texto y solicitarles que la presenten como una tarea de modelización, exploren diferentes posibilidades y soluciones alternativas.
- Brindar imágenes (por ejemplo, en las que aparezca una forma cónica de manera común) para que los estudiantes eligiendo una de ellas, planteen un contexto y un problema a resolver, encuentren un modelo que brinde la solución al problema planteado, lo resuelvan y validen. Finalmente elijan otra situación de la vida diaria en la que puedan utilizar el modelo construido.

Con las tareas realizadas, los estudiantes alcanzaron cierta autonomía generando acciones de un modo cada vez más independiente y, al finalizar el cuatrimestre, ellos pudieron plantear en grupos pequeños, una propuesta de tarea para una clase de modelación.

La presentación, la cual debía poder ser desarrollada en a lo sumo una clase de tres horas, debía contener:

- La situación de la vida real, explicando el contexto, para la cual sea necesario resolver alguna cuestión.
- La fuente de donde haya sido extraída la situación problemática.

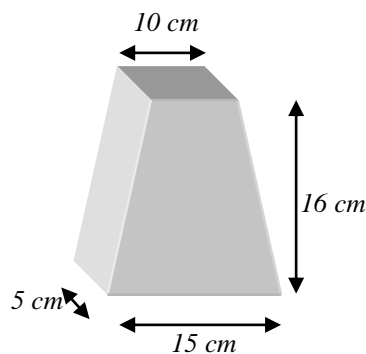


- Área del mundo real en el que se encuadra la tarea explicando brevemente, si fuera necesario, los contenidos involucrados para su desarrollo.
- El nivel para el cual va dirigida la actividad.
- El o los objetivos que se pretenden alcanzar.
- El grado de apertura de la tarea.
- El contenido matemático involucrado.
- Qué parte o partes del proceso de modelación se pretende trabajar.
- La o las soluciones que se esperan.
- Dificultades que podrían presentar los alumnos durante la realización de la tarea.
- Formas de comunicación de resultados.
- Criterios para la evaluación.

A continuación se enuncian dos de las situaciones presentadas por los estudiantes como ejemplo de la tarea realizada.

A) PROYECTO: *La graduación de la varilla del nuevo packaging de Actimel*  
(Basado en un ejemplo presentado por las autoras Silvina Segal y Diana Giuliani en el libro Modelación Matemática para el aula- Libros Zorzal, 2008)

*La empresa la Serenísima desea lanzar un nuevo empaquetado del producto Actimel, con el objeto de crear un hábito en las personas de consumir por día 100 gr del producto durante diez días, tal como se recomienda (se asume que 100 gr equivale a 100 ml, o bien  $100 \text{ cm}^3$ ). Como la presentación de Actimel es sólo en botellitas de 100 ml, la intención de este proyecto es arrojar al mercado un producto más económico que contenga la cantidad suficiente del mismo para ser consumido por una persona en diez días (1000 ml, es decir 1 lt). El envase se esquematiza en el siguiente dibujo, con sus respectivas medidas: (El envase es entregado a cada grupo a escala real para que sea analizado).*



*Altura: 16 cm  
Base: trapecio isósceles congruente de base mayor 15 cm, base menor 10 cm y altura 5 cm.*

*En este momento, el problema que se plantea es indicarle al consumidor la cantidad de ingesta diaria, para esto se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre una de las caras trapezoidales del prisma recto, para precisar el nivel de consumo del producto correspondiente a 100 ml, 200 ml, 300ml, ..., hasta llegar a los 1000 ml (1lt).*

Se presentan dos resoluciones en las que se trabaja con gran parte del proceso de modelización construido en la asignatura. En la primera el objetivo es que el alumno sea



capaz de construir un modelo que exprese la mejor relación funcional que vincule las dos variables de estudio (altura y volumen), obtenidas por medio de una experiencia de medición realizada con una regla graduada en milímetros, y poniendo a funcionar el método de regresión. La idea es obtener una curva que mejor ajuste a dichos puntos, y a partir de ella realizar predicciones. En la segunda resolución se requiere que el alumno disponga conocimientos de geometría. En síntesis, una resolución se desarrolla en un contexto funcional y la otra en uno geométrico, aportando cada una relaciones especiales. Consideramos que la actividad propuesta puede ir dirigida al nivel medio (polimodal), e incluso al nivel universitario.

**B) SITUACIÓN:** *En la cantina de la institución en la cual te encuentras, se ha llenado con los caramelos indispensables (caramelos de goma cilíndricos), un recipiente cilíndrico de 30 cm de diámetro y 42 cm de largo, de tal forma que no entre ninguno más.*

*Se premiará al alumno que logra calcular la cantidad de caramelos que hay en el mismo, obteniendo como recompensa el frasco repleto de caramelos. Cada estudiante podrá sostener o manipular el recipiente, sin abrirlo (girarlo, levantarlo, tomarle medidas, contar caramelos desde el exterior, analizarlo, etc).*

*A Juanito (un alumno de segundo año del nivel medio) le encantan esos caramelos, al igual que a sus compañeros, pero quiere ganar. Él no sabe cómo calcular la cantidad de caramelos que posee el frasco. ¿Podrías ayudarlo?*

### Conclusiones

La necesidad de formar estudiantes autónomos hace que no sea posible sostener una formación matemática que ponga el acento en la disponibilidad de técnicas y procedimientos. Es necesario asumir el compromiso de una enseñanza que los habilite a avanzar desarrollando sus potencialidades, a desplegar prácticas matemáticas adecuadas a distintas situaciones y a justificar la validez tanto de los procedimientos utilizados como de los resultados obtenidos. Por esta razón se considera que la modelización matemática tiene que ser una metodología que es necesario incluir en la enseñanza de las matemáticas.

### Referencias Bibliográficas

- Bosh, M., García, F., Gascón, J. & Higuera, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18, 37-74.
- Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. En Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevillard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. (pp. 527-549). *II<sup>e</sup> congrès international sur la TAD (Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007)*.
- Giordano, F., Weir, M., Fox, W. (2003). *A first course in Mathematical Modeling*. United States of America: Thomson Learning Inc.
- Segal, S. & Giuliani, D. (2008). *Modelización Matemática en el aula. Posibilidades y necesidades*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.