Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 7-17*

La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas

José Miguel Contreras García, Carmen Batanero Bernabeu, Pedro Arteaga Cezón y Gustavo Cañadas de la Fuente
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Resumen: *En el campo de la probabilidad encontramos diferentes paradojas, de solución asequible a los estudiantes, que permiten organizar actividades didácticas en la enseñanza y aprendizaje de conceptos probabilísticos. En este trabajo describimos la paradoja de la caja de Bertrand y algunas de sus variantes, analizando los contenidos trabajados en su solución, posibles razonamientos erróneos de los estudiantes e idoneidad didáctica para el estudio de la probabilidad.*

Abstract: *In the field of probability different paradoxes offer affordable solutions for students that to organize educational activities in teaching and learning of probabilistic concepts. This paper describes the Bertrand box paradox and some variations of the same, by analyzing the contents worked in its solution, the possible students' false reasoning and its educational suitability in the study of probability.*

INTRODUCCIÓN

Aunque la enseñanza de la probabilidad en secundaria tiene ya una gran tradición, algunos profesores pudieran sentirse inseguros con enfoques más informales, basados en la experimentación y simulación (Stohl, 2005). Es importante apoyarlos y proporcionarles actividades que les sirvan para motivar a sus alumnos y ayudarles a enfrentarse con algunas de sus intuiciones erróneas, al tiempo que les informamos de las posibles dificultades de los alumnos.

Algunos autores sugieren el interés de utilizar algunas paradojas sencillas de probabilidad para plantear situaciones motivadoras en el aula. Lesser (1998) indica que el uso inteligente de paradojas en la clase de matemáticas apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje. Falk y Konold (1992), sugieren que la solución de estas paradojas implica por parte del resolutor una consciencia de sus propios pensamientos que es un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador de los resultados sorprendentes, que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente. León (2009) indica que la historia de la probabilidad presenta situaciones muy atractivas que pueden conducir a reflexionar sobre la presencia del azar en la cotidianidad además de servir de motivación hacia el estudio por parte de los alumnos. En el mismo sentido se expresan Basulto y Camuñez (2007).

En lo que sigue describimos la paradoja de la caja de Bertrand y algunas de sus variantes, mostrando una formulación intuitiva de las soluciones correctas y analizando las posibles dificultades de los estudiantes. Finalmente analizamos los objetos matemáticos que se trabajan en la solución de esta paradoja y su idoneidad didáctica para la clase de probabilidad.

La Paradoja de la Caja de Bertrand

Esta paradoja fue formulada por Joseph Bertrand (1822-1900) matemático francés conocido por sus trabajos en Teoría de Números, Geometría Diferencial, y Teoría de las Probabilidades. En su libro “Calcul des probabilités” (Bertrand, 1888), incluye el siguiente problema, conocido como la “Paradoja de la caja de Bertrand”:

> Tenemos tres cajas y cada caja tiene dos cajones con una moneda cada uno: una caja contiene dos monedas de oro, otra caja dos monedas de plata, y la caja final con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma un cajón al azar, y resulta por ejemplo que contiene una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?

Muchos estudiantes seguirían el siguiente razonamiento: Después de elegir una caja al azar y retirar una moneda también al azar, si esta resultase ser una moneda de oro, sólo tenemos dos opciones: (a) que hayamos elegido la caja con dos monedas de oro; o (b) que hayamos elegido la caja con una moneda de oro y otra de plata. Por tanto, la probabilidad de que la otra moneda también fuese de oro es igual 1/2. Esta solución es incorrecta, ya que de hecho, la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro es, como veremos, en realidad de 2/3.

Solución intuitiva correcta

Una solución correcta del problema se obtiene intuitivamente con ayuda de un diagrama en árbol y una adecuada notación a la hora de representar el espacio muestral (ver Figura 1). Un primer experimento es elegir al azar una de tres cajas con la siguiente composición Caja 1: (ORO, ORO), Caja 2: (ORO, PLATA), Caja 3: (PLATA, PLATA). El segundo experimento consiste en abrir uno de los cajones, donde se pueden encontrar los casos representados en la segunda división en ramas del árbol. El tercer experimento (última rama) es el tipo de moneda que queda en la caja, cuando se ha abierto uno de los cajones.

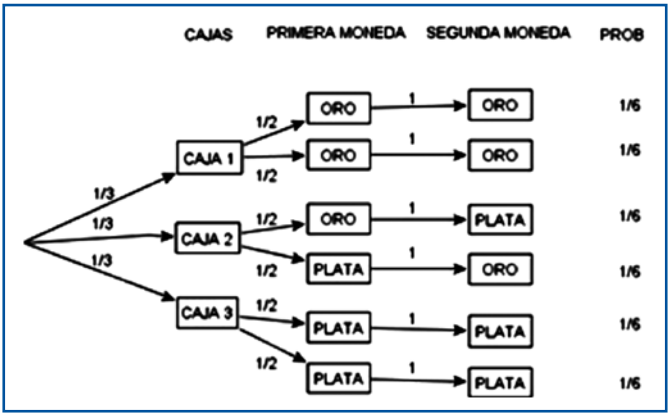

Figura 1
Solución intuitiva al problema de la caja de bertrand

El enunciado nos pone una condición (una de las monedas es de oro), por tanto nos pide una probabilidad condicional. Por tanto, quedan tres posibilidades equiprobables (como observamos en las ramas finales del árbol):

- Que hayamos tomado la única moneda de oro en la caja (ORO, PLATA); en este caso, la otra moneda que queda en la caja es la de plata.
- Que hayamos tomado la primera moneda de oro en la caja con dos monedas de oro; en este caso, la otra moneda es de oro.
- Que hayamos tomado la segunda moneda de oro en la caja con dos monedas de oro; en este caso, la otra moneda también es de oro.

Dicho de otro modo, tenemos dos casos en que la caja elegida sea la (ORO; ORO) si la moneda observada es de oro y solo uno de que la caja sea (ORO; PLATA). En consecuencia, sabiendo que una moneda es de oro, la probabilidad de que la otra sea de oro es el doble (2/3) que la probabilidad de que sea de plata (1/3).

Dificultades posibles de los estudiantes

En la literatura relacionada con este problema se han descrito varias soluciones erróneas, relacionadas con una deficiente intuición sobre la probabilidad, que comentamos a continuación.

- *No percepción de la independencia.* Un primer problema se produce porque *no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos* (elegir una caja) y (elegir una moneda). Es decir, o bien no se visualiza la estructura del experimento compuesto, o se suponen los sucesivos experimentos como independientes. Este error de razonamiento es explicado por Falk (1986), mediante la "falacia del eje de tiempos" que consiste en que las personas creen erróneamente que una información actual (la moneda mostrada) no puede afectar a un suceso que ocurrió con anterioridad a la misma (caja elegida). Esta falacia puede estar causada, en parte, por la confusión entre condicionamiento y causalidad.

- *Incorrecta percepción del espacio muestral.* Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral, sesgo descrito por Gras y Totohasina (1995) en otros problemas de probabilidad condicional. La intuición nos dice que, una vez elegida la caja, y quitando la (PLATA, PLATA), sólo quedan dos casos equiprobables y, por tanto, hay un 50% de posibilidad de que la moneda sea de oro o de plata. Ello es debido a que no se diferencia el orden de colocación de las dos monedas de oro en la caja (ORO; ORO).

ALGUNAS VARIANTES DE LA PARADOJA

Son múltiples las variantes de la paradoja de la caja de Bertrand y el cambio de formulación hace, que en ocasiones, no se reconozca y de nuevo aparezcan dificultades en la solución. Al igual que en el problema de la caja de Bertrand las soluciones erróneas se deben a la no percepción de la independencia y a la incorrecta percepción del espacio muestral. A continuación analizamos algunas de las más conocidas.

Dilema del prisionero

El "dilema del prisionero" (Hardin, 1968)**,** que tiene el siguiente enunciado:

> Tres prisioneros esperan encarcelados su juicio sabiendo que sólo uno de ellos morirá. El juez le dice al primer preso que el tercero se salva y le pregunta si quiere intercambiar su suerte con el segundo. ¿Qué debe hacer el primer prisionero?

A priori la probabilidad de morir que tiene cada prisionero es 1/3. Un razonamiento intuitivo que lleva a una solución errónea sería pensar que como el tercer preso se salva, aparentemente solo quedan dos opciones y por tanto el preso 1 como el 2 tienen la misma probabilidad (1/2) de morir. En consecuencia al primer preso no le merece la pena intercambiar su futuro por el preso segundo.

Solución correcta

La solución correcta se obtendría comparando las probabilidades de que mueran el 1º y 2º preso, sabiendo que se salva el 3º. Aplicando la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P((1^{o}\ muera)|(3^{o}\ se\ salve))= \frac{P((1^{o}\ muera)\cap(3^{o}\ se\ salve))}{P(3^{o}\ se\ salve))}.$$

Como sabemos que el tercer prisionero se salva, el denominador es igual a 1. Por otro lado:

$$P((1^{o}\ muera)\cap(3^{o}\ se\ salve))=P((1^{o}\ muera)\cdot\ P(3^{o}\ se\ salve|\ 1^{o}\ muera).$$

Al salvarse siempre el tercer prisionero, tenemos:

$$P((1^{o}\ muera)\cap(3^{o}\ se\ salve))=P((1^{o}\ muera)=\ 1/3$$

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicional, tenemos:

$$P((1^{o}\ muera)|(3^{o}\ se\ salve))= \frac{P((1^{o}\ muera)\cap(3^{o}\ se\ salve))}{P(3^{o}\ se\ salve))} = \frac{1/3}{1} = 1/3$$

La probabilidad de que muera el segundo preso sabiendo que se salva el tercero, sería la complementaria de la anterior, pues sabemos que o bien el segundo o el tercero han de morir, por lo que la probabilidad sería:

$$P((2^{o}\ muera)|(3^{o}\ se\ salve))=1-P((1^{o}\ muera)|(3^{o}\ se\ salve) = 2/3$$

Luego al primer preso no le conviene intercambiar su suerte con el segundo ya que así tendria el doble de posibilidades de morir, lo cual es paradójico.

Paradoja del niño o niña

Otra variante de la paradoja de Bertrand y de gran importancia por el número de investigaciones pedagógicas que la tratan es la paradoja del niño o niña, también conocida como el problema de los dos hijos, los niños de Smith o el problema de la señora Smith (Gadner, 1959). El enunciado de la paradoja se describió mediante dos preguntas de la siguiente manera:

A. El Sr. Jones tiene dos hijos. Él hijo mayor es una niña. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niñas?
B. El Sr. Smith tiene dos hijos. Al menos uno de ellos es un niño. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niños?

Esta paradoja tiene valor pedagógico, ya que ilustra una aplicación interesante del comportamiento de la probabilidad condicional. Fox y Levav (2004) utilizaron el problema para analizar como los alumnos estiman las probabilidades condicionales. La respuesta intuitiva es 1/2 para ambas, pues la segunda pregunta lleva al lector a creer que hay dos posibilidades igualmente probables para el sexo del segundo hijo (es decir, niño y niña), y que la probabilidad de que ambos sean niños, no condiciona a la información dada.

Otro razonamiento erróneo es suponer que la familia fuese seleccionada al azar y se pidiese calcular la probabilidad de que los dos hijos fuesen niños, es decir, no se tiene en cuenta la información de que uno es chico, dándose en este caso, la respuesta errónea 1/4. El estudio de Fox y Levav encontró que el 85% de los participantes respondieron correctamente 1/2 al primer problema, mientras que sólo el 39% respondió de esa manera a la segunda pregunta.

Solución correcta

Para resolver esta paradoja conviene enumerar el espacio muestral de todos los eventos posibles: (HH, HM, MH, MM), utilizando la primera letra para representar a los niños mayores. Al considerar la pregunta A, vemos que dos de los posibles sucesos no cumplen la condición (el hijo mayor es niña). El espacio muestral queda restringido a dos sucesos (MH, MM) igualmente probables, y sólo uno de los dos incluye dos niñas. Por tanto, la probabilidad de que el hijo más pequeño sea también una chica es 1/2.

En la segunda cuestión, se indica que el Sr. Smith tiene dos hijos y al menos uno de ellos es un niño y se pregunta la probabilidad de que ambos hijos sean niños. En principio esta cuestión es idéntica a la cuestión primera, excepto que en lugar de especificar que el hijo mayor es un niño, se dice que al menos uno de ellos es un niño.

La solución correcta parte de observar que en el espacio muestral hay tres familias que reúnen la condición de tener al menos un niño (HM, MH, HH). Por tanto, vemos que hay un caso favorable de tres y la probabilidad pedida es 1/3.

PARADOJA DE MONTY HALL

Esta es posiblemente la variante más conocida de la paradoja de la caja de Bertrand. Su formulación está inspirada en un concurso de la televisión americana "Let's Make a Deal" (Hagamos un trato) y su nombre proviene del presentador del concurso, Monty Hall. Este concurso generó bastante polémica en relación a posibles soluciones del problema matemático latente y muestra las intuiciones incorrectas en relación a la probabilidad condicional. La formulación más conocida de dicho problema proviene de una carta a la columna de Marilyn vos Savant en Parade Magazine (Bohl, Liberatore, y Nydick, 1995) y se reproduce a continuación.

> Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas. Detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de cada una de las otras, una cabra. Escoges una puerta, digamos la nº 1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, que contiene una cabra. Si el presentador te pregunta si prefieres cambiar de puerta. ¿Es mejor para ti cambiar o deberías mantener tu elección inicial?

Aunque intuitivamente pensamos que es lo mismo cambiar de puerta o mantener la opción inicial, pues la probabilidad de que el coche esté detrás de la puerta elegida inicialmente es igual a 1/2, ya que quedan dos puertas por abrir y el coche ha de estar detrás de una de ellas, este razonamiento es incorrecto. La solución correcta más sencilla consiste en reconocer que la probabilidad inicial de elegir el premio es 1/3 pues hay tres puertas y un solo coche. Por tanto, la probabilidad de que ganar si cambio de puerta ha de ser igual a 2/3. Esta es una solución contra intuitiva, y la mayoría de las personas prefiere continuar con la puerta elegida inicialmente en este juego. Para convencerlas se pueden dar soluciones matemáticas más formales, e incluso comprobar empíricamente que es mejor cambiar de puerta jugando a este juego un número grande de veces.

Un análisis detallado de esta paradoja, y de varias soluciones correctas a la misma, lo encontramos en Batanero, Contreras, Fernandes (2009).

PARADOJA DE LAS TRES TARJETAS

Shannon y Weaver (1949) introdujeron un juego, donde las cajas son sustituidas por tarjetas y las monedas de oro y plata se sustituyen por marcas de color rojo y negro. Tomando como base este problema, Batanero, Godino y Roa (2004) describen una actividad que sirve para comparar la concepción frecuentista y Laplaciana de la probabilidad, y para reflexionar sobre los conceptos de experimento dependiente y probabilidad condicional. Utilizan el siguiente enunciado:

> Tomamos tres tarjetas de la misma forma y tamaño. Una es de color azul en ambos lados, la segunda es de color rojo en ambos lados y la tercera es azul de un lado y roja por el otro. Ponemos las tres tarjetas en una caja, y seleccionamos una tarjeta al azar. Después de seleccionar la tarjeta se muestra uno de los lados y se pregunta a los jugadores por el color de la cara oculta.
>
> Repetimos el proceso, poniendo la tarjeta de nuevo en la caja antes de cada nueva extracción. Hacemos predicciones sobre el color del lado oculto y se gana un punto cada vez que nuestra predicción es correcta. ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?

Intuitivamente tiende a pensarse que no hay estrategia posible, o que podríamos apostar al azar pues la probabilidad de acertar el color de la cara oculta es igual a 1/2 y no depende del color de la cara mostrada. Este razonamiento es incorrecto, pues si se apuesta al mismo color mostrado en la cara, la probabilidad de acertar el color de la cara oculta sería igual a 2/3. La demostración de esta solución, la descripción de posibles razonamientos incorrectos en el juego y un estudio empírico de las dificultades experimentadas en un taller basado en este juego se describen en Contreras**,** Batanero, Fernandes y Ojeda (2010).

Objetos y procesos matemáticos en el trabajo con paradojas

En el trabajo en el aula con esta paradoja se usarán implícita o explícitamente los siguientes objetos matemáticos (en la clasificación de Godino, Font y Wilhelmi, 2008):

- Lenguaje matemático: Se utilizan expresiones verbales, simbólicas y numéricas de la probabilidad, el experimento y los sucesos implicados, así como el diagrama en árbol (lenguaje gráfico).
- Conceptos: En esta paradoja los alumnos trabajan la idea de experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, complementario, los axiomas de probabilidad, probabilidad condicional, dependencia e independencia y convergencia, en caso de simular la situación y estimar la probabilidad a partir de la frecuencia.
- Propiedades: Algunas propiedades que aparecen en la resolución de estos problemas son: diferencia entre probabilidad condicionada y simple, relación entre probabilidad condicionada, conjunta y simple, complementario, regla de la unión, del producto, e independencia.
- Procedimientos: Algunos procedimientos que podemos encontrar en la resolución de estas paradojas son: cálculo de probabilidades simples, compuestas y condicionadas, estimación de la probabilidad a partir de la frecuencia y elaboración de un diagrama en árbol.
- Argumentos: La actividad permite combinar el razonamiento deductivo y empírico.

También podemos observar los siguientes procesos matemáticos:

- Procesos de materialización - idealización (pasar de algo que se percibe a algo que no se percibe): Por ejemplo, los objetos a los que hacen referencia las paradojas (cajas, sobres, monedas para el reparto, prisioneros…) e incluso las acciones que realizamos con ellos (abrir una caja, hacer una tirada, etc.) son objetos o acciones imaginarios, que podemos materializar en una simulación del experimento. El diagrama en árbol de las soluciones intuitivas representa, por un lado la estructura del experimento (por pasos) y en cada paso, los resultados del experimento y sus probabilidades. Pero el experimento y los pasos son imaginarios.
- Procesos de particularización – generalización: Es cuando pasamos de un caso particular, generalizando a una propiedad de un conjunto o viceversa, cuando una propiedad que sabemos es general, la aplicamos a un caso particular. Por ejemplo, sabemos que la suma total de todas las probabilidades de los sucesos en un experimento es la unidad. En cada ejemplo, particularizando llegamos a las probabilidades de los sucesos dados. Por ejemplo, en el problema del chico chica deducimos que la probabilidad inicial de tener una chica es 1/2.

- Procesos de representación – significación. Los procesos de representación y significación aparecen continuamente en el trabajo matemático, pues como no podemos operar directamente con objetos ideales, representamos las operaciones sobre los mismos por medio de símbolos o por medio de otros objetos. Por ejemplo, el objeto "probabilidad" lo representamos por la letra P; la probabilidad de un suceso que denominamos A lo representamos mediante $P(A)$.
- Procesos de descomposición – reificación: El alumno que trata de resolver el problema tiene que pasar constantemente de considerar objetos elementales (unitarios) a considerar objetos compuestos de varios objetos elementales (sistémico): Por ejemplo, cada suceso de un experimento aleatorio es elemental, pero el espacio muestral del experimento es sistémico; cada rama del diagrama en árbol es elemental, mientras que todo el diagrama en árbol es sistémico.

CONCLUSIONES

Observamos que el trabajo con este tipo de problemas, es abordable en la educación secundaria y permite trabajar con objetos matemáticos ligados a la probabilidad, ilustrando algunos principios básicos de la enseñanza de la teoría de probabilidades, entre ellos los axiomas de Kolmogorov.

Una forma de actuar sería que los alumnos primero realicen algunas simulaciones de la situación, y a continuación traten de hallar la solución. Debido al carácter contra-intuitivo de la paradoja, surgirá más de una solución (algunas incorrectas). El profesor organizará en la clase un debate para decidir cuál es la mejor solución, de modo que el debate permitirá revelar y corregir los razonamientos erróneos.

En el trabajo con paradojas se pueden observar los componentes de idoneidad didáctica definidos por Godino, Contreras y Font (2006).

- *Idoneidad epistémica o matemática:* Se trata de ver si los contenidos matemáticos trabajados en el aula (significado institucional implementado) son representativos respecto a un contenido fijado en la enseñanza (significado institucional pretendido). Como se ha analizado, las paradojas podrían tener una idoneidad matemática en el estudio de los conceptos de: experimento aleatorio, suceso, probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes.
- *Idoneidad cognitiva:* Si el contenido trabajado es asequible a los alumnos, así como si se produce el aprendizaje pretendido por el profesor. Pensamos que la situación es asequible para alumnos de los últimos cursos de secundaria o Bachillerato, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos. Asimismo, trabajadas adecuadamente, permite al alumno confrontar y superar algunas de sus intuiciones incorrectas sobre probabilidad.

- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar las dificultades de los estudiantes y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicite. Será importante también organizar una solución colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.
- *Idoneidad mediacional:* Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Como hemos visto en la descripción no se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos, como cajas o tarjetas o bien usar la tecnología.
- *Idoneidad emocional:* Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas con estas paradojas, ya que sin duda intrigan e interesan a todo el que trata de resolverlas.

Para finalizar pensamos que actividades como las analizadas podrían usarse también en cursos de formación dirigidos al profesorado pues pueden servir al mismo tiempo para aumentar los conocimientos de probabilidad en los docentes y sus conocimientos profesionales.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 (MCIN), beca FPI BES-2008-003573 (MEC-FEDER), becas FPU-AP2009-2807 y FPU-AP2007-03222 y al grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Basulto, J. y Camuñez, J. A. (2007). El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *Suma, 56,* 43-54.

Batanero, C., Contreras J. M. y Fernandes, J. A. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma, 62,* 11-18.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*(1). Online: http://www.amstat.org/publications/jse/.

Bertrand, J. (1888). *Calcul des probabilités.* Paris (Francia): Gauthier Villars.

Bohl, A. H., Liberatore, M. J., y Nydick, R.L. (1995). A tale of two goats... and a car, or the importance of assumptions in problem solutions. *Journal of Recreational Mathematics, 1,* 1–9.

Contreras, J. M., Batanero, C., Fernandes, J. A. y Ojeda, M. M. (2010). Análisis de una experiencia de formación de profesores en diferentes contextos. *Actas de las XXXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa y de las VI Jornadas de Estadística Pública.* [CD-ROM]. A Coruña: SEIO.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: IASE.

Falk, R., y Konold, C. (1992). *The pshycology of learning probability.* En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26 (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fox, C. R. y Levav J. (2004). Partition–Edit–Count: Naive Extensional Reasoning in Judgment of Conditional Probability. *Journal of Experimental Psychology, 133*(4), 626–642.

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American,* 219, 180–182.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 49-95.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones, 38*, 25-48.

Hardin, G. (1968). The Tragedy of the Commons. *Science, 162,* 1243-1248.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher, 87*(4), 232-235.

León, N. (2009). La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación, 10*, 69-87.

Lesser, L. M. (1998). Countering indifference: Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics, 20*(1), 10-12.

Shannon, C. E. y Warren, W. (1949). *A mathematical model of communication*. Urbana, IL: University of Illinois Press.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer.