

Una tipología y clasificación de los ejercicios de matemáticas de selectividad

Josu Ruiz de Gauna Gorostiza

Escuela de Magisterio de Bilbao. Universidad del País Vasco

Joxemari Sarasua Fernández

Escuela de Magisterio de Vitoria-Gasteiz

Jesús Miguel García Iturrioz

Escuela de Magisterio de Bilbao. Universidad del País Vasco

Resumen: *Se estudian los ejercicios puestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad del País Vasco (UPV-EHU) desde el año 1994 al 2008 en las asignaturas de Matemáticas II y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.*

Se aporta una tipología de los ejercicios en base a unos criterios establecidos. Se clasifican los problemas de cada parte del examen de selectividad y se les asigna su tipología. Se pone en relación la tipología de los ejercicios con los resultados de la convocatoria y se extraen conclusiones.

Palabras clave: Matemáticas, Pruebas de acceso a la Universidad, Resultados, Tipología de ejercicios.

Abstract: *We carried out a comprehensive study of the entrance tests set at The University of the Basque Country (UPV-EHU) from 1994 until 2008 for the subjects Mathematics II and Mathematics Applied for the Social Sciences II. Exercises are typified on the basis of some criteria that we enclose. We classified the problems of each part of entrance examination and set their typology. We establish a relation between the typology of exercises and the results of the exam. Finally we draw some conclusions.*

Key Words: Mathematics, Entrance Tests to University, Results, Typology of exercises.

INTRODUCCIÓN

El examen denominado “Prueba de Acceso a la Universidad” (PAU), popularmente conocido como “Examen de Selectividad”, era la única prueba externa que nuestros alumnos pasaban mientras estaban en el sistema educativo no universitario. A partir del año 2007 los alumnos pasan también las Pruebas de Diagnóstico instauradas por la LOE.

Es conocida la importancia que el examen tiene como regulador del saber y, a la vez, tal y como afirma Morales (2005), “lo que más influye en cómo estudia el alumno es la evaluación esperada” (UPM, 2008, p.10). También Alsina señala algunas de las influencias que las PAU pueden tener sobre la forma de enseñar las matemáticas del bachillerato: “enseñar lo que sale puede permitir a las PAU un efecto tremendamente positivo: marcando en los exámenes temas importantes, induciendo a la necesidad de razonar, planteando cuestiones clave curriculares... las PAU pueden inducir a centrar mejor la docencia buscando un desarrollo curricular adecuado” (Alsina, 2001, p. 66).

Por lo tanto es evidente que el tipo de prueba de acceso influye en la metodología de enseñanza utilizada en el último curso de Bachillerato; también influye en la elaboración de los libros de texto, –pues estos contienen secciones específicas que preparan para la prueba–, y en la elección y la utilización que de los textos se hace por parte de los equipos docentes. También influye en la forma y en el tiempo de preparación de la prueba, e incluso tiene influencia sobre los estilos de enseñanza que los profesores utilizan en las asignaturas.

Las PAU han sido analizadas desde múltiples puntos de vista: se han analizado en su conjunto, se han realizado estudios comparados entre universidades, se han estudiado los modos de corrección, etc. Son estudios de tipo general, estadísticos, descriptivos de resultados, comparativos, de homogeneización de notas etc. Pero en los últimos años vienen publicándose estudios relacionados con las PAU desde la perspectiva de las metodologías didácticas. Aun así, son escasos los artículos que tratan de la prueba de acceso de Matemáticas desde la perspectiva de su interrelación con la metodología empleada en la asignatura; por citar algunos podemos mencionar el que trata sobre errores cometidos en la resolución de problemas en las PAU de Matemáticas (Nortes, 2007), en el que se clasifican los tipos de errores cometidos por los alumnos en la resolución de algunos de los problemas propuestos en las PAU; o el estudio que sobre las habilidades matemáticas evaluadas en las PAU aborda la resolución de problemas, la ortografía matemática y la comunicación matemática (Bueno, 2008) en las dos asignaturas de Matemáticas, concluyendo que el número de problemas de las PAU que describen situaciones contextualizadas es escaso, que no se penalizan los errores de ortografía matemática y que la comunicación matemática se logra mejor, aunque a bajo nivel, en Matemáticas II, también concluyen diciendo que las Matemáticas se tratan de manera muy superficial en el bachillerato; o el estudio que tiene como tema la influencia que las pruebas de acceso ejercen en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato (Wilhelmi, 2010). En él, se comprueba que tanto en los libros de texto, como en las PAU de Matemáticas, el tratamiento que se le da a la integral definida no abarca más que un aspecto parcial de las posibilidades didácticas que existen para la presentación de este concepto. Dentro de esta línea de investigación nosotros hemos elegido analizar los ejercicios propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en las asignaturas de Matemáticas II y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, clasificarlos, estudiar su grado de dificultad y relacionarlo con los resultados obtenidos en selectividad y con la percepción sobre la dificultad de las partes del examen que tiene el profesorado. Existen unas pau-

tas de regularidad en las pruebas que hacen posible establecer una clasificación de los ejercicios de cada una de las partes que componen el examen, que como toda clasificación lo que pretende es aportar un poco de luz sobre las características de los ejercicios que conforman la prueba. Son características tales como: establecer problemas-tipo análogos en cuanto a su método de resolución, analizar cuáles de las partes de la prueba tienen una mayor diversidad de problemas, establecer en función de algunos criterios su nivel de dificultad y relacionar éste con los resultados obtenidos en la prueba.

El análisis de ejemplos ha sido objeto de estudio de algunas investigaciones, como por ejemplo la realizada por Watson y Mason (2005) que definen el proceso de ejemplificación como “cualquier situación en la cual se ofrece algo específico para representar una clase general con la cual el estudiante debe familiarizarse”. Definen lo que es un espacio de ejemplos y nos dicen que “los ejemplos, por lo general, no son aislados; más bien son percibidos como casos de una clase de ejemplos potenciales. Como tales, constituyen lo que llamamos un espacio de ejemplos”, para continuar diciendo que “los espacios de ejemplos no son solamente listas; tienen una estructura interna, idiosincrática...y es por esa estructura que los espacios de ejemplos se producen” (González, 2009, p. 74). Estas consideraciones nos demuestran que el análisis de ejemplos de cada una de las clases en las que vamos a dividir las partes que constituyen los exámenes de Matemáticas de selectividad puede tener unas implicaciones didácticas que faciliten tanto la labor del alumno como la del profesor. Van a ser ejemplos con una estructura común a otros de la misma clase, que tienen un modo de resolución mediante técnicas semejantes y que, por lo tanto, pueden en potencia capacitar para afrontar problemas del mismo espacio de ejemplos y de otros paralelos.

Estableceremos unos criterios para poder catalogar los problemas como estándar (E) o difícil (D), porque aun sabiendo que uno de los objetivos que las pruebas persiguen es la homogeneidad, hay una buena diversidad de situaciones en los problemas que forman parte de ellas que hacen que no se perciban como de igual dificultad, bien por los alumnos o por los profesores de Matemáticas.

Hay que tener en cuenta que las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II es la asignatura que mayor índice de suspensos¹ tiene en el conjunto de todas las PAU, tanto a nivel de la Universidad del País Vasco como del conjunto de España. Aunque las causas de esta situación son múltiples, creemos que la clasificación de los problemas que usualmente han formado parte del examen, así como el análisis de la tipología de esos ejercicios, pueden ayudar a comprender y superar algunas de las razones inmediatas de este elevado fracaso.

1. En el estudio de Muñoz-Repiso y otros (1997), El sistema de acceso a la universidad en España, se dice en la página 156 que “en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales ni siquiera la mitad de los matriculados alcanza el 5 (55% de suspensos)”. También lo es en la UPV-EHU, donde el porcentaje de suspensos del periodo 1994-2008 es del 52%.

METODOLOGÍA

Objetivo

“Establecer en función de varios criterios una tipología dicotómica de ejercicios y clasificar los problemas y ejercicios incluidos en las PAU de Matemáticas en función de su pertenencia a varias clases de ejercicios semejantes. Relacionar la tipología de los ejercicios con los resultados obtenidos en la prueba”

Diseño y Muestra

Hemos efectuado un estudio longitudinal de análisis de las pruebas propuestas en la Universidad del País Vasco, desde el curso 1994-1995 hasta el curso 2008-2009, en las dos asignaturas de Matemáticas. Se han analizado todos los ejercicios propuestos y se han clasificado los ejercicios que componen cada una de las partes de los exámenes como pertenecientes a clases homogéneas entre sí. Se proponen unos criterios que permitan establecer, mediante el grado de dificultad asignado al ejercicio, su tipología, calificándolos como ejercicios estándar (E) o difíciles (D), categorías que luego definiremos.

La tipología utilizada es dicotómica porque, aunque es seguro que se podrían establecer más categorías, discriminar entre ellas habría introducido una mayor subjetividad en la clasificación y un mayor sesgo en las conclusiones.

Clasificación estadística del año en base a los resultados:

Se presentan los resultados de las PAU para las dos matemáticas y para cada convocatoria, clasificando cada año en cinco categorías como: MM (muy malo), M (malo), R (regular), B (bueno) y MB (muy bueno). La clasificación se realiza principalmente en función de la media obtenida en la asignatura y en esa convocatoria y comparando esa media con la media global de la asignatura a lo largo del periodo total (1995-2009). Si la media de la convocatoria está muy por encima de la media global en el periodo, la convocatoria se clasifica como MB; si está por encima de la media global se clasifica como B; si está próxima a la media global se clasifica como R; y si el resultado es peor que la media global se clasifica como M o MM. Por ejemplo la media global del periodo fue en Matemáticas II, media= 5,67 y en Matemáticas de CCSS, media=4,66, por lo que si tomamos un año concreto, por ejemplo el 2006, donde las medias obtenidas han sido para Matemáticas II, media= 5,08 y para Matemáticas de CCSS, media= 3,86 y las comparamos con las medias globales del periodo obtenemos que el año 2006 en Matemáticas II ha sido malo (M) y en Matemáticas de CCSS ha sido muy malo (MM).

Por último hemos relacionado para cada convocatoria el número de ejercicios E y D que nosotros hemos obtenido con la clasificación estadística de la convocatoria en base a sus resultados. Ello nos llevará a establecer unas relaciones que, por simples e intuitivas, dan consistencia al modelo. Por ejemplo, por seguir con el

mismo año 2006, asociamos la clasificación estadística del año en Matemáticas II (M, malo) con la tipología de ejercicios de esa convocatoria que ha sido (5D/5E); estableciendo este tipo de asociaciones a lo largo de la serie de años podremos extraer conclusiones.

Describamos los dos exámenes de Matemáticas, tal y como están establecidos en la Universidad del País Vasco.

Examen de Matemáticas II

Consta de cinco bloques correspondientes a las diferentes partes del programa, y dentro de cada bloque se plantean una cuestión y un problema, entre los que el estudiante elige uno. El bloque A corresponde al Álgebra, el bloque B a la Geometría, el bloque C al Análisis de Funciones, el D al Cálculo Integral y el E a la Resolución de Problemas. Cada ejercicio es valorado entre 0 y 2 puntos y la duración de la prueba es de hora y media.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Consta de cuatro apartados A, B, C y D, cada uno de los cuales tiene dos ejercicios. El apartado A corresponde al Álgebra y Programación Lineal, el apartado B corresponde al Análisis, el apartado C corresponde a la Probabilidad y el apartado D corresponde a la Estadística. El estudiante elige para cada apartado uno solo de los dos ejercicios propuestos. La valoración del ejercicio de los apartados A y B es de 0 a 3 puntos y la del ejercicio de los apartados C y D es de 0 a 2 puntos. La duración de la prueba es de hora y media.

TIPOLOGÍA DE LOS EJERCICIOS

Hemos fijado varios criterios que nos sirven de guía para establecer la categoría asignada al problema. Aunque nos hemos guiado por esos criterios, cada problema, al hacerlo, y dependiendo, si hay más de uno, del método seguido, da lugar a una forma de resolución que lleva pareja unas dificultades concretas que ayudan a evaluarlo como E o D. Es por ello que en la categoría asignada a un problema hay siempre un nivel alto de subjetividad, pues aunque se apliquen los criterios establecidos para su calificación como E o D, los diferentes métodos de resolución del problema (el contexto de la resolución y el solucionador, experto o novato, que Perales (2000) los define como dos de las variables que pueden influir

en la resolución del problema²⁾ pueden dar lugar a diferentes vías de resolución más o menos difíciles y por lo tanto a catalogar el ejercicio de forma diferente. Ya se sabe que entra dentro de la pericia para resolver un problema el elegir una buena forma de abordarlo.

Además se han tenido en cuenta algunos de los principales errores que los alumnos cometen en la resolución de problemas como consecuencia de diversos tipos de dificultades inherentes al proceso de resolución (Juidías, 2007). En general los criterios que se han seguido para catalogar un ejercicio como estándar, (E), o como difícil, (D), han sido:

ESTÁNDAR (E)	DIFÍCIL (D)
La comprensión del texto del ejercicio es sencilla. No contiene dobles negaciones, datos superfluos o preguntas que no aparecen explícitamente.	El texto del ejercicio es difícil de comprender; es largo y farragoso, contiene una sintaxis que es expresión de conceptos lógicos redactados según el estilo tradicional de los textos de matemáticas, o lo que se pregunta no está señalado explícitamente.
El ejercicio es identificable con una parte del programa y con su técnica de resolución.	La ó las técnicas de resolución que permiten abordar el ejercicio no son claramente identificables.
La resolución es directa. Quiere esto decir, que para llegar a la solución no hay que resolver cuestiones colaterales, ni cuestiones concatenadas, sin las cuales sea imposible llegar a la solución.	Para su resolución se requiere de soluciones intermedias, sin las cuales no se puede llegar a resolver la pregunta clave del ejercicio.
La resolución no da lugar a cálculos largos y complicados.	Los cálculos a que da lugar pueden llevar al alumno a cometer errores que invaliden la solución del ejercicio e incluso a realizar un buen planteamiento del mismo.
El problema no contiene parámetros de los cuales dependa la solución.	El problema presenta un cierto aspecto teórico o de tipo general, por contener letras en lugar de números o parámetros que aparecen en los cálculos y de los cuales depende la solución.
	No está asociado con una parte concreta del programa, o requiere de conceptos estudiados en otros cursos e incluso de conceptos transversales asociados a otras asignaturas.

Tabla 1
Criterios para establecer una Tipología de problemas

2. Citado en Nortes (2010), p. 320.

Apliquemos estos criterios a algunos ejemplos³:

- *Ejemplo 1*: “Dada la función objetivo $z=5x+4y$, calcular su mejor valor condicionado a las siguientes inecuaciones ($2y-x \geq 0$, $y \leq 2x-3$)”. (ejercicio A2 de junio de 1995 de Matemáticas de CCSS).
Este ejercicio se asocia directamente con un problema de programación lineal del cual se conoce una única técnica de resolución, tipología E.
- *Ejemplo 2*: “Entre todos los rectángulos de área 1600 metros cuadrados, ¿cuál sería el más barato para rodearlo por una valla?”. (ejercicio B1 de junio de 1999 de Matemáticas de CCSS).
Se identifica con un problema de máximos y mínimos y una vez planteado los cálculos son sencillos, tipología E.
- *Ejemplo 3*: “En una ciudad, el 45% de los habitantes son hombres, el 80% mayores de edad, y el 30% hombres y mayores de edad. Si se elige una persona al azar, calcular: a) la probabilidad de ser mujer y menor de edad; b) sabiendo que es mujer, la probabilidad de que sea mayor de edad; c) la probabilidad de ser hombre o menor de edad”. (ejercicio C2 de junio de 2003 de Matemáticas de CCSS).
Es la sintaxis del problema la que esconde conceptos lógicos cuya comprensión es difícil de trasladar a fórmulas y tablas, tipología D.
- *Ejemplo 4*: “Sean las rectas R1 y R2 de ecuaciones: R1 ($x+y-2z=0$, $2x-3y+z=1$), R2 ($x=3t$, $y=1-2t$, $z=2+t$). Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta R1 y que pasa por el punto de intersección de la recta R2 con el plano π : $x-3y-2z+7=0$ ”. (problema B de junio de 2000 Matemáticas II).
Son varias técnicas y conceptos interrelacionados que hay que saber elegir, tipología D. Es decir aplicamos el criterio de que “La o las técnicas de resolución que permiten abordar el ejercicio no son claramente identificables”. No quiere esto decir que la técnica de resolución deba aparecer claramente ante los ojos del alumno (que es el caso de numerosos ejercicios), sino que no sea asociable a una o más técnicas de la parte del programa en el que está colocado. (Por ejemplo, una integral puede no estar asociada a un método concreto de resolución, pero lo está a las técnicas de integración; sin embargo un problema de geometría suele presentar numerosas posibilidades de abordaje que no consisten en la aplicación de técnicas mecánicas de resolución).
- *Ejemplo 5*: “La curva de ecuación $y=2x^2$ divide al cuadrado de vértices $V1=(0,0)$, $V2=(1,0)$, $V3=(1,1)$ y $V4=(0,1)$ en dos partes; se pide dibujarlas y calcular su área”. (problema D de junio de 2002 de Matemáticas II).

3. El estudio es el resultado de una investigación más amplia que ha constituido a su vez una parte de una Tesis Doctoral de título: “La Enseñanza de las Matemáticas del Bachillerato, los libros de texto y las Pruebas de Acceso a la UPV-EHU (1970-2008)”, que está en vías de publicación en la Universidad del País Vasco. En ella pueden consultarse más ejemplos de tipologías de ejercicios y de su clasificación.

Con este problema se inicia una serie que se ha prorrogado, con algunas variaciones, durante cuatro convocatorias. Los cálculos a que da lugar son largos y por lo tanto susceptibles de equivocación, tipología D.

ANÁLISIS DEL CONTENIDO DE LAS PRUEBAS Y CLASES DE EJERCICIOS

Vamos a establecer para cada una de las partes de la prueba una ejemplificación de las clases de ejercicios propuestos. En algunos casos damos criterios adicionales para establecer la tipología de los problemas pertenecientes a una clase y en otros proponemos algún ejemplo concreto, pero sin ánimo de ser exhaustivos.

a) Matemáticas II

Álgebra

De los dos ejercicios de álgebra, uno de ellos siempre es de:

- *Sistema de ecuaciones*: cuando el sistema de ecuaciones es 3×3 , con un parámetro en uno de los lados del sistema, que da lugar a una sola solución, el sistema se califica como E. Si el número de ecuaciones e incógnitas difiere, el parámetro se presenta en los dos lados del sistema y estas dos circunstancias dan lugar a que la resolución se complique: se cataloga como D (si no se complica, E). Cuando para el parámetro, o parámetros, se presentan dos posibles soluciones, se cataloga como D.

El otro ejercicio presenta una mayor variedad, que vamos a intentar clasificar⁴.

- *Sistema matricial*: ejercicios en los que hay un sistema matricial, simple, en el que se pide el cálculo de dos o más matrices, suelen ser del tipo E.
- *Propiedades de las matrices*: ejercicios en los que se pide calcular una matriz, en general de orden 2×2 , que conmuta con una dada; normalmente dan lugar a una resolución sencilla y se clasifican como E.
- *Cálculo de rangos*: ejercicios en los que se pide calcular el rango de alguna matriz que tiene uno o más parámetros, pero en la que es visible una combinación lineal entre filas o columnas; se catalogan como E.
- *Potencias enésimas*: cuando en el ejercicio se pide el cálculo de la potencia enésima de una matriz 2×2 ó 3×3 , que tiene una regla de formación sencilla, se califica como E.

4. Dentro de cada clase de problemas damos un criterio para cuando el ejercicio creemos que puede ser catalogado como de una determinada tipología, pero puede haber ejercicios que pertenezcan a la misma clase y que tengan una tipología diferente. Es decir la tipología de los problemas de una misma clase no es unívoca.

Geometría

En Geometría resulta difícil estandarizar los ejercicios. Salvo algún tipo de ellos que se presentan más de una vez, la mayoría tienen pequeñas diferencias entre sí.

- *Posiciones relativas*: hay varias cuestiones y ejercicios de posiciones relativas, tanto de rectas, como de rectas y planos, en general clasificados como E.
- *Perpendicularidad*
- *Puntos simétricos*: problemas de cálculo de puntos simétricos, que siempre ha habido en selectividad. Unos con respecto a un plano, otros con respecto a una recta.
- *Ejemplo 6*: “Sean el punto $P=(1, 2, a)$, $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x+y+2z - 3 = 0$. Calcular las coordenadas del punto simétrico de P con respecto al plano π ”. (junio de 2001, matemáticas II).

Es un problema clásico que pide el punto simétrico de uno dado con respecto a un plano; pero tiene una dificultad añadida, y es que el punto tiene una coordenada desconocida; es esto lo que lo hace D.

Análisis

En este apartado se incluyen ejercicios que tienen que ver con la derivación y sus propiedades.

- *Problemas de rectas tangentes a una curva*
- *Cálculo de límites (L'Hôpital) (no entran en la selectividad actual)*
- *Condiciones de derivabilidad*
- *Semiteóricos, con definiciones o teoremas y propiedades*
- *Asociar una función a su gráfica*
- *Dibujo de funciones (ó no) mediante ciertos cálculos (dominio, asíntotas, crecimiento,...)*
- *Ejemplo 7*: “Sea la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3}{4x^2 + 1}$$

Calcular sus asíntotas oblicuas”. (septiembre 99 problema C)

Da lugar a cálculos largos en los que se pueden cometer equivocaciones que invaliden el problema: tipología D.

- *Problemas clásicos de cálculo de máximos y mínimos*

Ejemplo 8: “Una ventana se compone de una parte rectangular y de un semi-círculo colocado sobre la parte rectangular. Si el perímetro total de la ventana es de 12 m, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la ventana para que pueda entrar la mayor cantidad de luz posible?”. (julio 2000 problema C)

Relaciona diferentes conceptos y fórmulas, además de dos variables puestas en el dibujo (H y R) no usuales o asociables a x e y, lo que dificulta su identificación como problema y su derivación y manejo: tipología D.

- *Derivabilidad de funciones compuestas o de ciertas funciones construidas a partir de otras*

Ejemplo 9: “De una función f se sabe que es derivable en todos los puntos de la recta real. Además se sabe que $f(0)=2$ y $f'(0)=-2$. Definimos las dos funciones siguientes:

$$g(x) = e^{f(x)} \qquad \text{y} \qquad h(x) = f(e^x)$$

¿Tenemos suficientes datos para calcular $g'(0)$? ¿Y para calcular $h'(0)$? Si la respuesta es positiva calcula los valores y si es negativa, di por qué no es posible. (julio de 2001 cuestión C)

Hay que utilizar la derivada de la función compuesta y relacionar varios conceptos: tipología D.

- *Determinación de la expresión analítica de una función, conociendo algunas de sus propiedades*
- *Estrategias de pensamiento*

Integrales

- *Cálculo de Primitivas*
- *Semiteóricas o propiedades*
- Ejemplo 10:* “Describir el método de integración por partes”. (septiembre de 95 cuestión D). No se pide demostrar: tipología E.
- *Cálculo de Áreas*
- *Determinación de los coeficientes de una función*
- *Sumas superiores e Inferiores, Particiones*
- *Otros*

Ejemplo 11: “Sea la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 10 - 3x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Dibujar (esquemáticamente) la función f y calcular los valores de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^1 g(x) dx \quad J = \int_{-1}^4 g(x) dx \quad K = \int_{-1}^4 g(x) dx \quad \text{'' (junio de 99 problema D)}$$

Se deben calcular tres integrales definidas cuyos límites de integración no coinciden con los de cada trozo de la función, por ello cada una de las integrales a calcular hay que descomponerla en sumas; nos parece que son dos dificultades que despistarán a muchos alumnos: tipología D.

Resolución de problemas

Es esta parte donde resulta más difícil agrupar los ejercicios por tipos, aunque algunos de ellos son similares y los agruparemos.

- *Problemas que se resuelven por el método de inducción*

El método de inducción contiene en el paso de $n-1$ a n una generalización y, a veces, exige unos cálculos con letras difíciles de realizar.

Ejemplo 12: Demostrar la fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales, *tipología D.* (junio de 95 problema E).

- *Problemas relacionados directamente con alguna de las partes del programa*
- *Problemas de Combinatoria*
- *Problemas de regularidades o que tienen pautas de formación*

La detección de las regularidades supone la realización de sucesivos intentos y un ápice de inspiración, que hace que si el problema es nuevo para el alumno resulte difícil de abordar en las condiciones de estrés y tiempo limitado en el que se le presentan. Tipología D.

Ejemplo 13: “Encontrar la última cifra de una expresión numérica $(2^{257}+5)$ ”. (septiembre de 95 cuestión E)

- *Cuestiones de teoría*
- *Problemas de letra*

Ejemplo 14: Es un clásico de la literatura, “Dos amigos tienen el uno 5 panes y el otro 3, se encuentran con un tercero que tiene ocho monedas y que se las entrega a cambio de repartir con él los panes, ¿cómo se debe hacer el reparto de las monedas?”. (junio de 97 problema 5)

La solución lleva implícita un razonamiento lógico que no es trivial: tipología D.

- *Problemas relacionados con la Física*
- *Problemas de Geometría*

- *Problemas de Propiedades de los Números (múltiplos, divisores, etc.)*

Ejemplo 15: “Se pide comprobar que n^2-1 es múltiplo de 8 cuando n es mayor que 3”. (junio de 97 cuestión 5)

Exige una demostración de tipo general a la que hay que llegar por tanteos sucesivos de forma que el punto de inspiración final puede que no llegue. Si no se ha trabajado este tipo de ejercicio en clase es difícil de resolver y además no está en la zona de desarrollo próximo de los alumnos en relación con la materia estudiada: tipología D.

- *Juegos o Problemas de Lógica*

b) Matemáticas de CCSS

Álgebra

- *Programación Lineal:* de los dos ejercicios que se proponen casi siempre uno de ellos es de Programación Lineal. Cuando el problema no contiene letra, sino que se refiere a la resolución de un problema ya planteado de P.L., cosa que sólo suele ocurrir en la convocatoria extraordinaria, lo hemos clasificado como E (excepción: cuando el dibujo de la región representa alguna dificultad añadida). Si el problema es usual, con letra, y las restricciones son desigualdades que son fácilmente obtenibles a través de la tabla que el alumno debe elaborar conteniendo la información del problema, también se han clasificado como E (excepción: cuando la región sea difícil de dibujar). Si el problema da lugar a restricciones difíciles de plantear o el problema es de difícil comprensión o no es usual, se ha clasificado como D.
- *Problemas de letra clásicos:* el otro problema de álgebra presenta una mayor variedad. Hay varios ejercicios de letra, problemas clásicos que dan lugar al planteamiento de un sistema de dos o tres ecuaciones, más usuales en la convocatoria extraordinaria, que hemos clasificado como E (excepción: cuando la comprensión del problema tiene alguna dificultad añadida).

Ejemplo 16: “Durante los D días que han durado las vacaciones de un alumno han ocurrido los siguientes hechos:

- a) Ha llovido en siete ocasiones ya sea por la mañana o por la tarde
- b) En cada una de las mañanas o tardes lluviosa, ha llovido una sola vez
- c) Los días en los que ha llovido por la mañana no ha llovido por la tarde
- d) El cielo ha estado sin nubes seis mañanas y cinco tardes

¿Calcular, razonándolo, cuál ha sido el número de días D que ha estado de vacaciones?”. (junio del año 96 problema A1)

Es un problema de lógica no usual que requiere estrategias de pensamiento y movilizar destrezas que nos llevan a clasificarlo como tipología D.

En la convocatoria ordinaria del 97 hay un problema de mezclas, que por no ser usual, también lo hemos clasificado como tipología D.

- *Ecuaciones con matrices*: los problemas con ecuaciones matriciales, que son muchos, generalmente los hemos clasificado como E, salvo algunos en los que hay que hallar más de una matriz inversa de orden 3 para su resolución.
- *Potencia enésima de una matriz*

Análisis

- *Cálculo de áreas*: cuando se trata de calcular el área de un recinto comprendido entre dos curvas simples, se ha calificado como E. Si el recinto presenta más de dos funciones, o es un recinto mixto donde deben calcular alguna ecuación, o la integral hay que dividirla en dos trozos, los hemos clasificado como D.
- *Extremos de una función*: los de cálculo de los extremos de una función en general se clasifican como E, salvo que la función sea complicada. Los problemas clásicos de máximos y mínimos en general se han clasificado también como E, salvo que el planteamiento no sea evidente, o contengan conceptos de economía o de otras ciencias y no sean de fácil comprensión para la generalidad de los alumnos.
- *Primitivas de una función*
- *Rectas tangentes*: los problemas que implican el cálculo de rectas tangentes se clasifican como E, siempre que sean directos y no incluyan parámetros o el cálculo de la recta tangente sea un elemento auxiliar para resolver el fondo del problema.
- *Propiedades de funciones*: cuando se trata de construir o definir alguna función a través de diversas propiedades de la misma, normalmente se han clasificado como D, porque contienen varios conceptos de diferente nivel de dificultad implicados en la resolución y que además están encadenados.

Probabilidad

Son más los problemas de probabilidad que se clasifican como D que como E, por gran diferencia. Estos problemas requieren en general del uso de fórmulas y conceptos previos para su resolución; así mismo, es necesario realizar diagramas en árbol, tablas etc. que facilitan la comprensión del problema y su resolución. Es por esto que para muchos alumnos presentan una dificultad añadida.

- *Problema variado de probabilidad*: suele haber un problema de probabilidad, digamos variado, que puede ser resuelto de varias formas distintas, con fór-

mulas o sin ellas. Cuando este problema tiene un enunciado simple y claro que da lugar a una resolución más o menos directa, con fórmulas o sin ellas, se han clasificado como tipología E. Cuando implican el cálculo de un parámetro esto supone un nivel superior de conceptualización y también se han clasificado como tipología D.

- *Fórmula de Bayes*: el segundo ejercicio suele ser un cálculo de probabilidades mediante la fórmula de Bayes, problema que ha aparecido en muchas convocatorias. Cuando el problema se entiende con facilidad y se pueden trasladar directamente los datos a un árbol y los cálculos no son complicados, la tipología es E. En los demás casos es D.

Estadística

Los dos ejercicios de Estadística son mucho más típicos que los de las demás partes.

- *Distribución Normal*: el primero es de la distribución normal y el segundo es de intervalos de confianza, estimación e inferencia.

El problema de la distribución normal, si tiene una lectura fácil y da lugar a un cálculo directo o a un manejo directo de las tablas, se ha clasificado como de tipología E. Esto ha sido así en la mayoría de los ejercicios.

Cuando la distribución que aparece en el problema es la binomial, la comprensión del problema tiene alguna dificultad y los cálculos se hacen aproximando por la normal, la tipología del ejercicio es D.

Ejemplo 17: “Un examen tipo test contiene 100 preguntas, cada una de las cuales admite cuatro respuestas, una correcta y las otras tres falsas. Si un alumno ha respondido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte más de 30 preguntas? ¿Y la de acertar menos de 15?”. (problema D1 de c. extraordinaria de 2002)

Cuando la comprensión del problema es fácil e inmediatamente se identifica con la distribución binomial, la tipología es E.

Si la distribución es normal, pero para el cálculo de alguno de sus parámetros se dan datos que hacen que el problema no sea directo, sino que a través de una probabilidad dada se deduce el parámetro que falta, la tipología es D.

- *Inferencia*: el segundo de los ejercicios de Inferencia suele ser sencillo, fácil de asociar a las técnicas de la inferencia y fácil de comprensión. Por estas razones han sido, en general, clasificados como de tipología E. Pero hay que reconocer que en algunos centros esta materia no se estudia, por falta de tiempo, con el necesario detalle y por ello a los alumnos no les resulta fácil de elegir este ejercicio, eliminándolo automáticamente.

TIPOLOGÍA DE LOS PROBLEMAS Y RESULTADOS DE LA SELECTIVIDAD

Tenemos un índice de la percepción de la dificultad de las partes de la prueba de Matemáticas II y Matemáticas Aplicadas a las CCSS II, en base a una encuesta de opinión⁵ enviada en el curso 2009-2010 a todos los centros de enseñanza del País Vasco. Esa percepción de la dificultad y la tipología de ejercicios de cada parte del examen de selectividad se recogen en las tablas siguientes:

	Álgebra	Geometría	Análisis	Integrales	Resolución de Problemas
Tipología	6D / 22E	8D / 20E	13D / 15E	11D / 17E	14D / 14E
Ratio (D/E)	0,27	0,4	0,87	0,65	1
Percepción de la dificultad	2,67	3,15	3,38	3,36	3,76

Tabla 2

Matemáticas II. Percepción de la dificultad y Tipología de problemas

	Álgebra y Programación Lineal	Análisis (incluye Integrales)	Probabilidad	Estadística
Tipología	7D / 21E	16D / 12E	15D / 13E	7D / 21E
Ratio (D/E)	0,33	1,33	1,15	0,33
Percepción de la dificultad	3,18	3,91	3,61	3,54

Tabla 3

Matemáticas Aplicadas a las CCSS. Percepción de la dificultad y Tipología de problemas

Como se deduce de las tablas, la percepción de la dificultad de las partes manifestada por los seminarios de profesores de Matemáticas prácticamente coincide con la ratio que se deriva de la tipología de ejercicios que hemos efectuado. En los centros se perciben como más fáciles las partes del examen con ratios D/E menores y la percepción de la dificultad aumenta en el mismo sentido que la ratio de problemas D/E.

Comparando los resultados de cada año con la tipología de problemas de ese año se concluye que:

“Los años MM están asociados a un número alto de ejercicios difíciles ($\geq 7D$), al igual que los años M ($\geq 4D$), es decir llevan asociados más ejercicios D que E; los años R llevan asociados más ejercicios E que D y los años B ó MB llevan asociados un número muy bajo de ejercicios D ($\leq 3D$)”

5. Forma parte de la Tesis Doctoral mencionada anteriormente.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

1. Se han propuesto unos criterios para establecer una tipología de los problemas de Matemáticas que han aparecido en las pruebas de acceso de la UPV-EHU. Para ello se han establecido dos tipos: problemas estándar o problemas difíciles. En esos criterios se recogen algunas de las dificultades que en la literatura sobre el tema se señalan como comunes para la mayoría de los estudiantes. Con la aplicación de esos criterios se ha intentado reducir la subjetividad que las tipologías de este tipo tienen. Aun así, el contexto y el carácter del solucionador (experto o novel) hacen imposible que la tipología sea unívoca.

La tipología propuesta por nosotros se ha contrastado mediante dos pruebas:

- Primero se ha contrastado la tipología de problemas resultante para cada convocatoria con los resultados obtenidos en las Matemáticas en esa convocatoria y se ha visto que un número alto de problemas de tipología difícil (D) estaba asociado con una calificación de los resultados de la convocatoria como de malos (M) y a la inversa, un número alto de problemas de tipología estándar (E) estaba asociado con unos buenos resultados en la convocatoria que era calificada como de buena (B).
- Segundo se han establecido para cada una de las partes que constituyen el examen de matemáticas las ratios globales de problemas tipificados como (D) entre los problemas tipificados como (E); ordenadas esas ratios de menor a mayor, se ha visto que la dificultad inherente a cada una de las partes se corresponde de manera casi perfecta con la percepción de la dificultad de cada una de las partes del examen que el profesorado tiene (manifestada a través de una encuesta al profesorado realizada por nosotros en el curso 2008-2009).

Por lo tanto esas dos pruebas nos permiten concluir que los criterios utilizados y la tipología de problemas que se deriva de ellos tienen validez.

2. Se han establecido para cada una de las partes en las que se descomponen los exámenes de Selectividad, las clases de problemas que suelen aparecer en esa parte. Se ha comprobado que en las Matemáticas II hay muchas más clases de problemas que en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Solamente en la parte de Álgebra se estipula que el primer problema será un sistema de ecuaciones. En la parte de Análisis han resultado 10 clases de problemas y en la de Resolución de Problemas 11 clases. Estas dos son las partes consideradas como más difíciles por el profesorado.

En Matemáticas de CCSS las clases establecidas son menores. Además tres de las cuatro partes del examen tienen establecido que el primer problema pertenezca a una clase, y el segundo a otra distinta: en Álgebra y Programación Lineal el primer problema es de Programación lineal y el segundo de Álgebra; en Probabilidad el primer problema es variado y el segundo suele ser de tablas de contingencia, diagramas de árbol o Bayes; en Estadística el primer problema es una distribución y el segundo es de inferencia. La parte de Análisis de Matemáticas Aplicadas a

las CCSS es considerada como la más difícil de las dos matemáticas y presenta cinco clases de problemas, menos que la correspondiente parte de Análisis de las Matemáticas II. Es decir la estandarización existente en Matemáticas Aplicadas a las CCSS es mucho mayor que la de Matemáticas II, pero aun así eso no basta para mejorar los resultados de esta asignatura.

3. Se ha ejemplificado con arreglo a los criterios establecidos una propuesta de tipología para los problemas de esas clases. Hemos visto que la tipología resultante para la serie total de años analizados es consistente con la percepción que tiene el profesorado sobre la dificultad de las partes de la prueba y también lo es con los resultados obtenidos en la prueba.

4. Relacionando la clasificación estadística del año en base a los resultados medios obtenidos en la asignatura, con la tipología de los problemas propuestos ese año, hemos concluido que:

- En la convocatoria ordinaria un número alto de ejercicios E da lugar a unos buenos resultados en las dos Matemáticas.
- En las dos asignaturas un número alto de ejercicios D da lugar a unos malos resultados.
- En las dos asignaturas cuando el número de ejercicios estándar es parecido al de difíciles, no se pueden predecir los resultados.

Se han dado, por lo tanto, unas pautas que pueden servir de guía para los responsables de las pruebas “y que tal vez” permitan ajustar mejor la tipología del examen con los resultados esperados. Esto es especialmente relevante para la asignatura de Matemáticas de CCSS, donde una tipología con más problemas estándar E seguramente haría que los resultados mejorasen.

Esperamos, por lo tanto, que nuestra clasificación pueda contribuir a aumentar el grado de homogeneidad de las citadas pruebas y también a su preparación, tanto por parte de los responsables de confeccionarlas, como de alumnos y profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarado, A. y González, M.T. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 73-84.
- Alsina, C. (2001). Las pruebas de acceso a la universidad (PAU) como brújula curricular. *Aula de Innovación educativa*, 105, 66-70.
- Boal, N., Bueno, C. y Leris, M. D. (2008). Las habilidades matemáticas evaluadas en las pruebas de acceso a la Universidad: un estudio en varias universidades públicas españolas. *Revista de Investigación Educativa, RIE*, 26, 1, 11-24.
- Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28, 3, 367-384.

- Espinel, M. C. y otros (2006). La inferencia estadística en la PAU. En *Actas XXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Tenerife: SEIO.
- Etxeberria, J. e Ibabe, I. (2005): *Análisis descriptivo de datos en Educación*. Madrid: La Muralla.
- Fernández, J. (2001). Una propuesta de problemas en las pruebas de acceso a la Universidad. *Epsilon*, 51, 583-590.
- García, I. y García, J. A. (2005). Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la P.A.U. En *Actas de las XI Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, 733-738. Gobierno de Canarias.
- Jiménez, F., Ollero, J. y Sánchez, B. (2000). Las probabilidades en las pruebas de acceso a la universidad. *Jornadas: matemáticos y matemáticas para el tercer milenio, de la abstracción a la realidad*. San Fernando.
- Juidías, J. y Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación* 342, 357-286.
- Miralles, I. (2009). Dificultad subjetiva de la prueba de Matemáticas de las PAU. ¿Qué eligen los alumnos??. Recuperado el 30 de octubre de 2009, de <http://www.xiv-jaem.org>
- Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad: errores significativos. *Educación siglo XXI*, 28, 1, 317-342
- Ruiz de Gauna, J. (2010). *La Enseñanza de las Matemáticas del Bachillerato, los Libros de Texto y las Pruebas de Acceso a la UPV-EHU (1970 – 2008)*. Tesis Doctoral.
- Universidad Politécnica de Madrid. (1008). *Aprendizaje Orientado a Proyectos*. Madrid: Servicio de Innovación Educativa UPM.