

## DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO SOBRE LA PROPORCIONALIDAD EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

RIVAS Mauro, GODINO Juan, KONIC Patricia y CASTRO Walter

Universidad de Los Andes Mérida-Venezuela. Universidad de Granada España.

Universidad de Río IV Argentina. Universidad de Antioquia Colombia

[mauro@aula.ve](mailto:mauro@aula.ve); [jgodino@urgr.es](mailto:jgodino@urgr.es); [pkonic@gmail.com](mailto:pkonic@gmail.com); [wfcastro82@gmail.com](mailto:wfcastro82@gmail.com)

### RESUMEN

Con el fin de evaluar el desarrollo del conocimiento sobre proporcionalidad en una muestra de futuros profesores de primaria, realizamos la comparación entre los resultados de sus actuaciones en dos pruebas; una prueba inicial de diagnóstico y otra final de control, que incluyeron ítems-problemas sobre proporcionalidad. Estas pruebas fueron aplicadas al inicio y al final del primer cuatrimestre de la carrera de magisterio, respectivamente, en cuyo periodo se desarrolló un proceso de instrucción que incluyó el estudio de ese tema. El proceso de investigación se inició con una revisión de la literatura especializada, la que contribuyó a fijar las siguientes variables: estrategias de resolución de problemas, reconocimiento de situaciones proporcionales o no-proporcionales, argumentos empleados para justificar situaciones proporcionales o no-proporcionales. En correspondencia con estas variables los ítems incluidos en las pruebas se diseñaron para evaluar a los futuros profesores en los siguientes aspectos: (a) cómo resuelven un problema proporcional de valor faltante, (b) cómo justifican la proporcionalidad en una situación proporcional, (c) cómo reconocen problemas pseudo-proporcionales, y (d) cómo justifican la no-proporcionalidad/proporcionalidad en una situación pseudo-proporcional. Para el estudio de los ítems de ambas pruebas y las respuestas dadas por los sujetos se utilizaron herramientas de análisis epistémico y cognitivo propuestas por el enfoque ontosemiótico. Los resultados obtenidos, en la muestra considerada, indican que luego del proceso de instrucción efectuado no se observó un progreso sostenido en torno al conocimiento de la proporcionalidad. Esto se confirmó al observar las estrategias de resolución empleadas al resolver dos problemas de valor faltante.

**Palabras Clave:** Proporcionalidad, formación de profesores, análisis epistémico y cognitivo, situaciones proporcionales y pseudo-proporcionales.

## **PROBLEMÁTICA Y MARCO TEÓRICO**

Una de las metas de la escuela es lograr, en los estudiantes, el desarrollo del conocimiento sobre la proporcionalidad. Tal desarrollo debería proveer de competencias que permitan resolver exitosamente problemas que incluyen la proporcionalidad. Más aún, tal desarrollo, debería posibilitar la distinción entre situaciones proporcionales y no-proporcionales (Fernández & Llinares, 2011; Lamon, 2007). No obstante, parece que la escuela no está logrando esa meta, puesto que se ha reportado en diversas investigaciones que personas de diferentes edades tienen dificultades para resolver problemas de proporcionalidad y para distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2007; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010; Lamon, 2007). Asimismo, conscientes de este problema, diversos grupos de investigación han asumido el estudio de esta problemática (Fernández & Llinares, 2011; Modestou, Elia, Gagatsi & Spanoudis, 2008; Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2008).

En el ámbito de la formación de profesores, el problema del desarrollo del conocimiento sobre la proporcionalidad, sigue siendo un asunto pendiente por resolver (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012, Rivas, Godino & Castro, 2012). En este trabajo se informa sobre el desarrollo de ese conocimiento, en una muestra de futuros profesores, luego de concluido el primer cuatrimestre de su formación, periodo durante el cual se estudia la proporcionalidad, con unas fuertes limitaciones, en cuanto al tiempo asignado para tal estudio, en el correspondiente plan de formación.

En este orden de ideas, asumiendo el desarrollo “natural” de las actividades regulares de ese periodo, nos planteamos las siguientes preguntas: (a) ¿cómo resuelve el futuro profesor un problema de valor faltante proporcional?, (b) ¿qué explicación provee sobre las condiciones que le permiten considerarlo como un problema proporcional?, (c) ¿cómo reconoce problemas no proporcionales?, y (d) ¿qué explicación provee sobre las condiciones que le permiten considerarlo como un problema no proporcional?.

## **OBJETIVOS**

En este estudio se trata de observar y describir el desarrollo del conocimiento sobre la proporcionalidad del futuro profesor, después de un proceso de instrucción específico.

Situados en el contexto de ese proceso de instrucción, y asumiendo de manera “natural” los procedimientos y acciones comúnmente realizadas en el mismo, nos hemos planteado los siguientes objetivos:

**O.1:** Identificar las estrategias de resolución utilizadas por los futuros profesores para resolver problemas de valor faltante proporcionales.

**O.2:** Describir los argumentos utilizados por los futuros profesores para reconocer una situación proporcional involucrada en un problema de valor faltante proporcional.

**O.3:** Determinar si los futuros profesores identifican una situación no proporcional en problemas pseudo-proporcionales.

**O.4:** Describir los argumentos utilizados por los futuros profesores para reconocer una situación no proporcional involucrada en problemas pseudo-proporcionales.

## MARCO METODOLÓGICO

Esta investigación forma parte de un proyecto de investigación en proceso en el que se estudia el desarrollo del conocimiento de la proporcionalidad en una muestra de futuros profesores. El diseño instruccional llevado a efecto, dirigido al logro de ese desarrollo, ha comprendido: (a) realización de un diagnóstico inicial (b) desarrollo de un proceso de instrucción, descrito en la Figura 1, y (c) aplicación de una prueba de control con el fin de valorar los conocimientos adquiridos por los futuros profesores.

El proceso de instrucción desarrollado comprende:

1. El desarrollo de una sesión de clase, en la que se incluye la aplicación de la prueba diagnóstico y la puesta en juego una trayectoria didáctica que involucra:
  - ♦ Presentación de las consignas.
  - ♦ Exploración personal
  - ♦ Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida.
  - ♦ Presentación y discusión
  - ♦ Institucionalización por el formador, explicitando los conocimientos pretendidos
2. Lectura de materiales sugeridos:
  - Fernández, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.
  - Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J.D. Godino (Dir.), *Didáctica de la Matemática para maestros* (pp. 5-123). Granada: Universidad de Granada. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino>. Específicamente lo concerniente a: Dificultades errores y obstáculos (pp. 73-76).

- Godino, J.D. & Batanero, C. (2004). Proporcionalidad. En J.D. Godino (Dir.), *Didáctica de la Matemática para maestros* (pp 271-286). Granada: Universidad de Granada. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino>.
- 3. Tutoría sobre las lecturas sugeridas por el formador y atención por medio de la web.
- 4. Aplicación de la prueba de control.

Figura 1: Proceso de instrucción llevado a efecto.

En este sentido, el estudio realizado en torno a ese diseño instruccional comprendió los siguientes momentos: (a) análisis epistémico de los ítems de una prueba diagnóstica, (b) aplicación de la prueba diagnóstica a la muestra, (c) análisis cognitivo de las respuestas dadas por la muestra a la prueba diagnóstica, (d) observación del desarrollo del proceso de instrucción que comprende el estudio de la proporcionalidad, (e) elaboración y análisis epistémico de los ítems de una prueba de control, (f) aplicación de la prueba de control a la muestra y (g) análisis cognitivo de las respuestas dadas por los sujetos de la muestra a los ítems respectivos. Las herramientas de análisis epistémico y cognitivo utilizadas en este estudio han sido propuestas por el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero & Font, 2007).

Por razones de espacio, en este documento, sólo referiremos a algunos resultados de la aplicación de las pruebas de diagnóstica y de control, específicamente pretendemos dar respuesta al primer interrogante planteado (cómo resuelve el futuro profesor un problema de valor faltante proporcional), lo cual corresponde con el logro del objetivo **O.1**, antes formulado.

*Participantes:* Los participantes constituyen un muestra de tipo incidental (León & Montero, 2003), en la que el grupo de sujetos está previamente constituido por la condición de estar iniciando la carrera de magisterio en el curso y grupo seleccionado. La muestra se encuentra conformada por 59 sujetos.

*Instrumentos:* En el desarrollo de esta investigación se han aplicado dos instrumentos: una prueba diagnóstica o inicial y un ítem de una prueba de control. La prueba inicial, corresponde a la que comúnmente es utilizada por el profesor formador, para diagnosticar los conocimientos previos que tienen los futuros profesores sobre la proporcionalidad. Esta prueba está concebida, de acuerdo con el profesor formador, para diagnosticar los siguientes tópicos: (a) resolución de problemas de valor faltante proporcionales, (b) uso

de tablas y representaciones gráficas en torno a la proporcionalidad, (c) situaciones problema proporcionales y no proporcionales, y (d) conocimiento didáctico inicial en torno a la proporcionalidad. En este sentido, el cuestionario está constituido por cuatro ítems, cada ítem está dirigido a evaluar cada tópico referido, respectivamente. En el Anexo A presentamos un ejemplar de la Prueba inicial y en la Figura 2 una transcripción del ítem 1, el cual es un problema de valor faltante proporcional, cuyos resultados de aplicación son considerados en el presente informe.

- 1) Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

---

Figura 2: Ítem de la prueba inicial considerado en este informe

El segundo instrumento es parte de un ítem (número 6) de una prueba de control, aplicada al final del primer cuatrimestre, del primer año de la carrera de magisterio. El ítem (número 6) de la prueba de control está dirigido a evaluar tres aspectos relacionados con el desarrollo del conocimiento sobre la proporcionalidad, a saber: (1) resolver situaciones de proporcionalidad del tipo valor faltante, (2) resolver situaciones de proporcionalidad de razón unitaria y (3) distinguir entre situaciones proporcionales y no proporcionales. En este sentido, las situaciones propuestas son: en el problema (a) una situación proporcional de valor faltante, en el problema (c) una situación proporcional de razón unitaria y en los problemas (b) y (d) dos situaciones pseudo-proporcionales. En el Anexo B se presenta un ejemplar de esa prueba de control y en la Figura 3 se puede ver una transcripción del ítem 6 en cuestión. Para efectos de este informe, en esa transcripción, sólo se ha incluido el problema (a), el cual es un problema de valor faltante proporcional, cuya resolución involucra un procedimiento de mayor complejidad que el requerido por el problema planteado en el ítem 1 de la prueba inicial.

6. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no.
  - 6.1. Determinar cuáles de las situaciones descritas a continuación pueden considerarse como de proporcionalidad. Explicar con detalle las condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad, o que no es de este tipo.
    - (a) Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a 1'80 € la caja, ¿Cuánto costarán 12 paquetes?

...

6.2. Resuelve aquellas situaciones que has considerado como de proporcionalidad.

Figura 3: Parte del ítem de la prueba de control considerado en este informe

**RESULTADOS**

Los resultados que presentamos a continuación se basan en los análisis de las respuestas dadas por los estudiantes. Por razones de espacio, nos limitaremos a presentar los resúmenes de las respuestas dadas a dos ítems (uno de la Prueba inicial: ítem 1, uno de la Prueba control: problema (a)) los cuales informan sobre los tipos de resolución puestos en juego por los sujetos al dar respuesta a dos problemas proporcionales de valor faltante.

En la Tabla 1 se presentan los resultados correspondientes al ítem 1 de la prueba inicial. Se observa en esa tabla el predominio de uso de la regla de tres como procedimiento de resolución, tanto en las respuesta correctas (53/59 sujetos, 89,8%), como en las respuestas incorrectas (3/59 sujetos, 5,1%). El uso de otros procedimientos de resolución es muy bajo (3/59 sujetos, 5,1%).

Tabla 1: Frecuencias de los tipos de resolución utilizados para el ítem 1.

Tipo de resolución	N	%
Uso de una ecuación de proporcionalidad	2	3,4
Uso de la regla de tres	53	89,8
Razonamiento aditivo	1	1,7
Procedimiento incorrecto asociado al uso de la regla de tres	3	5,1
Total	59	100,0

En la Tabla 2 presentamos los resultados de los tipos de resolución puestos en juego por los sujetos de la muestra en el problema (a). Estas respuestas corresponden con la parte 6.2 del ítem en cuestión (Figura 3). Se observa en la Tabla 2, el uso de la regla de tres como procedimiento de resolución que presenta la mayor frecuencia, tanto en las respuestas correctas como en las incorrectas (22/59 sujetos, 37,3%). Esta tendencia se acentúa si se agrega a este grupo los que utilizan la regla de tres y otro procedimiento, y

se restan los sujetos que no proveen de ningún tipo de resolución; al hacer esto se observa que más de la mitad de los sujetos (29/51; 56,9%) tiende a utilizar la regla de tres como procedimiento de resolución.

Tabla 2: Frecuencias de los tipos de resolución del problema (a)

Calificación	Tipo de resolución	N	%
Correcta	Regla de tres	13	22,0
	Regla de tres y otro procedimiento	6	10,2
	Ecuación de proporcionalidad	1	1,7
	Reducción a la unidad	4	6,8
	Reducción a la unidad y otro procedimiento	4	6,8
	Tabla de proporcionalidad	2	3,4
	Multiplicación y división	7	11,9
	Subtotal	37	62,7
Incorrecta	Regla de tres	9	15,3
	Regla de tres y otro procedimiento	1	1,7
	Ecuación de proporcionalidad	2	3,4
	Multiplicación y división	2	3,4
	Subtotal	14	23,7
	Considera la situación como no proporcional	7	11,9
	No Responde	1	1,7
	Total	59	100,0

Asimismo, se deben notar dos aspectos de interés; el primero es la presencia de esos 8 sujetos (13,6%) que no resuelven el problema, donde 7 de ellos (11,9%) consideran erróneamente que la situación propuesta en el problema (a) no es de proporcionalidad, el segundo es que se ha diversificado el uso de los tipos de resolución haciéndose

presentes, aunque con bajas frecuencias, las siguientes: ecuación de proporcionalidad (3/59; 5,1%), reducción a la unidad (8/59; 13,6%), tabla de proporcionalidad (2/59; 3,4%), multiplicación y división (9/59; 15,3%).

## DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El objetivo **O.1** refiere a la identificación de estrategias de resolución utilizadas por futuros profesores para resolver problemas de valor faltante proporcionales. En este sentido, se observa que para el ítem 1, de la prueba inicial (Tabla 1), 56/59 sujetos (94,9%) lo resuelven correctamente, haciendo un uso predominante de la regla de tres como estrategia de resolución (53/56; 94,6%). Mientras que en la resolución del *problema (a)*, de la prueba de control (Tabla 2), se observa que 37/59 sujetos (62,7%) lo resuelven correctamente, predominando nuevamente el uso de la regla de tres como procedimiento de resolución (19/37; 51,4%). Se debe señalar que el uso de la regla de tres también se presenta como predominante en las respuestas incorrectas del problema (9/14; 64,3%). Asimismo, se registra una actuación de los sujetos menos efectiva en la prueba de control que en la prueba inicial, al tiempo que se manifiesta una mayor diversidad de tipos de resolución en la prueba de control.

Estos resultados conducen a reconocer que no se ha registrado, por medio de las resoluciones dadas al ítem y el problema considerado, un desarrollo en el conocimiento de la proporcionalidad de los sujetos de la muestra. Consideramos que la tendencia a una actuación menos efectiva en la resolución del problema (a) se debe a que en él se plantea una situación de mayor complejidad en relación con la planteada en el ítem 1 del primer instrumento.

Por otra parte, en las respuestas dadas al problema (a), se pone de manifiesto una diversidad de tipos de resolución, que no se hicieron presentes en la resolución del ítem 1. Esta manifestación puede deberse a varias causas, entre las que se reconocen al menos dos: (1) la diferencia entre el enunciado/complejidad del ítem y el problema considerado, y (2) el efecto del proceso instruccional llevado a efecto.



## CONCLUSIONES

Los resultados indican que los futuros profesores manifiestan preferencia por el uso de procedimientos basados en reglas para resolver problemas proporcionales. El uso de este tipo de procedimientos puede dar lugar a una solución correcta sin que tenga lugar el razonamiento proporcional que corresponde (Lamon, 2007).

El cambio en el enunciado del problema, al ser más complejo, parece incidir en el tipo de resolución adoptada por los sujetos y parece influir en su reconocimiento como una situación proporcional. No obstante, el tipo de resolución adoptado puede estar en relación con el proceso de instrucción que ha tenido lugar.

Estos resultados parecen indicar la falta de un desarrollo adecuado del conocimiento sobre la proporcionalidad por parte de los futuros profesores, que dé lugar a procedimientos apropiados de resolución de problemas de valor faltante.

Finalmente, estas manifestaciones indican que ese desarrollo no ha sido logrado por medio del proceso de instrucción llevado a efecto. Ello sugiere la necesidad de revisar el diseño e implementación de dicho proceso, en particular el tiempo asignado al estudio del tema en el plan de formación correspondiente.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Ben-Chaim, D., Keret, Y. & Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.
- Fernández, C. & Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1), 67-80.
- Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2010). How do proportional and additive methods develop along primary and secondary school? En M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 353-360). Belo Horizonte: PME.

Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

León, O. & Montero, I. (2003). *Diseño de Investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A. & Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39 (3), 313–324.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Revista Bolema*, 26(42B), 559-588.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311-342.

**Anexo A: Prueba inicial o diagnóstico**

**MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA**

**NOMBRE:**

\_\_\_\_\_

- 1) Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

[Ítem 1 enmarcado por nosotros]

- 2) ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales? (Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes)

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	28	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla en diagramas cartesianos.

- 3) De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
- Lado del cuadrado y su superficie
  - Lado del cuadrado y su perímetro
  - Edad y altura de las personas

Justifica tu respuesta usando una tabla para cada caso.

- 4) Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

*Anexo B: Prueba de control*

MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA

1º A de EDUCACIÓN PRIMARIA

**EXAMEN, Primer Parcial**

NOMBRE	DNI	FIRMA

- La noción de número natural y sus usos. Enuncia y explica los axiomas de Peano.
- Describe las reglas que caracterizan los sistemas de numeración aditivo, multiplicativo y posicional.
  - Construye un sistema aditivo de base 7, inventando los símbolos necesarios, y utilízalo para expresar el número  $1634_{(10)}$ .
  - Haz las transformaciones necesarias para convertir el sistema aditivo que has inventado en un sistema posicional de base 7 y vuelve a escribir el número 1634 en el nuevo sistema posicional de base 7.
- Efectúa la siguiente sustracción de números expresados en base 12:  
 $8AB30419 - 538A168B$
  - Describe y explica cómo funcionan los dos algoritmos para realizar una sustracción designados habitualmente como, “con llevada escrita” y “tomar prestado”, refiriendo la explicación al caso de la resta anterior.
  - Indica las propiedades aritméticas y del sistema de numeración decimal en que se basan ambos algoritmos.
- Cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es 6 cm. ¿a qué altura inicial se lanzó la pelota?

- 1) Resuelve el problema; 2) Explica la solución utilizando alguna representación gráfica; 3) Explica la solución utilizando notación algebraica.

5. Resuelve las siguientes cuestiones:

- a) ¿Son decimales los números  $1'3456789$  y  $27'454545 \dots$  (45 repetido indefinidamente). Justifica la respuesta.  
b) ¿Cuál es la fracción que es igual  $27'454545 \dots$  (45 repetido indefinidamente).  
c) ¿Es un número decimal el número cuya expresión decimal es  $4'58999\dots$  (una infinidad de 9)? Justifica la respuesta.  
d) Explica la diferencia entre “número decimal” y “expresión decimal de un número real”.

6. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no.

6.1) Determinar cuáles de las situaciones descritas a continuación pueden considerarse como de proporcionalidad. Explicar con detalle las condiciones que cumple cada enunciado para considerarlo como problema de proporcionalidad, o que no es de este tipo.

- a) Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a  $1'80 \text{ €}$  la caja, ¿Cuánto costarán 12 paquetes?  
b) Si un bebé aumenta de peso 3 Kg. en tres meses ¿cuánto aumentará en el primer año?  
c) Un banco no paga interés anual por el dinero que cada cliente ingresa en él. Si un cliente ingresa  $1.500 \text{ €}$ , ¿cuánto dinero tendrá en su cuenta después de 2 años si no ha hecho nuevos ingresos? ¿Cuánto dinero tendrá si en lugar de  $1.500 \text{ €}$ , hubiera ingresado  $3.000 \text{ €}$ ?  
d) Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo le llevará comer 24 pasteles?

6.2) Resuelve aquellas situaciones que has considerado como de proporcionalidad.

[Ítem 6 enmarcado por nosotros]