RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN EL NIVEL MEDIO: EL CASO DE LAS FUNCIONES RACIONALES

María Paz Gazzola, María Rita Otero, Viviana Carolina Llanos
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As., Tandil, Argentina.
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
mpgazzola@gmail.com, vcllanos@exa.unicen.edu.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar
Nivel Medio

Palabras clave: Recorrido de Estudio e Investigación (REI). Funciones Racionales. Nivel Medio

Resumen

En este trabajo presentamos el diseño y algunos resultados parciales de la implementación de un nuevo dispositivo didáctico, los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) introducidos por Chevallard (2004, 2007, 2009). Estos dispositivos apuestan a la introducción de una nueva epistemología escolar que remplaza el paradigma de la "monumentalización" de los saberes por un paradigma de *cuestionamiento del mundo*. El REI diseñado permite estudiar las funciones racionales en el nivel medio. Se presentan algunos protocolos de los estudiantes que nos permiten caracterizar la Organización Matemática construida y se describe el diseño de la Organización Didáctica.

Introducción

En la actualidad, la enseñanza de la matemática se ha reducido al estudio de respuestas en lugar de cuestiones, lo que conduce al conocido fenómeno de la pérdida de sentido y monumentalización del saber (Chevallard, 2004, 2007). Este fenómeno didáctico llamado *monumentalización del saber* consiste en enseñar obras matemáticas como objetos ya creados, transparentes e incuestionables, a las que precisamente por su carácter monumental, solo se los puede visitar. El constructo Recorrido de Estudio e Investigación (REI), propuesto por Chevallard, es un dispositivo didáctico que maximiza la reconstrucción funcional de la matemática, como respuesta a situaciones problemáticas y que sitúa a las cuestiones Q en primera línea, como punto de partida del saber matemático.

En trabajos recientes (Llanos y Otero, 2010, Otero, Llanos, 2011) proponen un REI que parte de la cuestión generatriz Q_0: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes?* Las posibles respuestas a la cuestión Q involucran la tecnología del cálculo geométrico y generaron diferentes recorridos de estudio, como parte del REI (Otero, Llanos, 2011). Si se trata de la multiplicación de dos rectas, se genera un primer recorrido que permite reconstruir la Organización Matemática (OM_{FPD}) relativa a la función polinómica de segundo grado en el marco geométrico, geométrico analítico y algebraico funcional. Si se trata de varias rectas o combinaciones entre parábolas y rectas o entre parábolas, etc., se construye un recorrido de estudio que permite reconstruir la OM_{FP} de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales. (Otero, Llanos, 2011; Llanos, Otero, Bilbao, 2011). Por último, si se trata de la división de rectas, o de rectas y parábolas, o parábolas y rectas, o entre parábolas, se construye un recorrido, que permitiría construir la OM_{FQ} de las funciones racionales (Otero, Llanos, 2011, Gazzola, Llanos, Otero 2011).

Esta presentación se refiere al tercer recorrido, con el cual se pueden estudiar las funciones racionales en el nivel medio. Por cuestiones de espacio, presentaremos parcialmente el diseño y algunos resultados de la implementación del REI. Vamos a referirnos a cómo los estudiantes obtienen la representación gráfica y la representación algebraica de las funciones raciones, mediante la tarea de elaborar la respuesta a una pregunta que otorga sentido al estudio.

Marco Teórico

Adoptamos como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999, 2004, 2007, 2009), que ha definido con precisión los fenómenos denominados: *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las cuestiones que se estudian en la escuela media y ha propuesto los Recorrido de Estudio e Investigación (REI) como dispositivos didácticos para enfrentar estos problemas e instalar algunos elementos de la pedagogía del cuestionamiento del mundo (Otero, Llanos, 2011) . Un REI es un modelo general para el diseño y análisis de los procesos de estudio funcionales, esto es, de los procesos de estudio que permiten generar y desarrollar las praxeologías.

Al inicio de un REI hay una cuestión Q con un fuerte poder generador, que se denomina *cuestión generatriz*, la cual es capaz de generar numerosas cuestiones derivadas, cuyo estudio llevará a la (re)construcción de un gran número de praxeologías matemáticas, que surgirán como respuesta a las cuestiones que han requerido de su construcción. Se genera así, una cadena de cuestiones y de respuestas que son el corazón del proceso de estudio $P=(Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$, siendo Q_i todas las cuestiones que habitan dicho corazón ♥ y R_i las respuestas a estas cuestiones (Chevallard, 2007). La gestión de los REI, exige a los profesores de matemática y a los alumnos un cambio radical en su relación con el saber, pues este deja de ser algo que se sabe de antemano, para volverse una construcción (o reconstrucción) de común acuerdo, en el transcurso de la clase.

Metodología

La investigación es de corte cualitativo, etnográfico y exploratorio. Se quiere describir el dispositivo diseñado y su implementación analizando si permite construir las propiedades fundamentales de las funciones racionales con sentido para los estudiantes. Hay pocas investigaciones donde se llevan a cabo recorridos de estudio e investigación sin la creación de cursos alternativos a los habituales. En nuestro caso, el contexto es una escuela y dos aulas concretas del secundario, donde se busca desplazar la enseñanza tradicional. Los cursos fueron seleccionados intencionalmente por el equipo de investigación en el mismo Establecimiento Educativo, se trata en total de (N=59) estudiantes de 5[to] Año. Las implementaciones fueron realizadas por los investigadores, realizando observación participante y no participante.

Durante las implementaciones, se obtuvieron todos los protocolos escritos de los estudiantes, los cuales se retiran clase a clase, se escanean y se devuelven en la clase inmediata siguiente, para garantizar la continuidad de trabajo y para que ellos dispongan permanentemente de sus producciones. En todas las clases, se tomaron registros de audio “generales” que se completan con las notas de campo del profesor y de los observadores del equipo que no están a cargo del grupo de clase.

Las funciones racionales

Este posible REI derivado de Q_0, se genera cuando las curvas con las que se opera corresponden a funciones polinómicas, originando la reformulación $Q_{3.1}$: *¿Cuál es la gráfica más razonable que surge del cociente de dos funciones polinómicas si sólo se dispone de la representación gráfica de las mismas y la unidad en los ejes?* A partir de esta pregunta, se engendran numerosas cuestiones derivadas que permitirán el estudio de las características de las funciones racionales, con sentido para los estudiantes. Se ingresa así en un camino alejado del tratamiento tradicional escolar de la función racional, donde las representaciones gráfica y algebraica, se imponen por definición. En este REI los estudiantes construirán la representación gráfica, analizando y validando sus características. Para abordar esta cuestión el profesor propone dos situaciones, en la Situación 1 la gráfica de *q* resulta de la división geométrica de dos rectas mientras que en la Situación 2, se trata de una recta y una parábola. En ambos casos se requiere: *¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para q? ¿Qué características de la gráfica de q podrías justificar?* De esta manera, el REI comienza -igual que los recorridos que lo preceden- en el marco geométrico-funcional. La figura 1 presenta las situaciones 1 y 2.

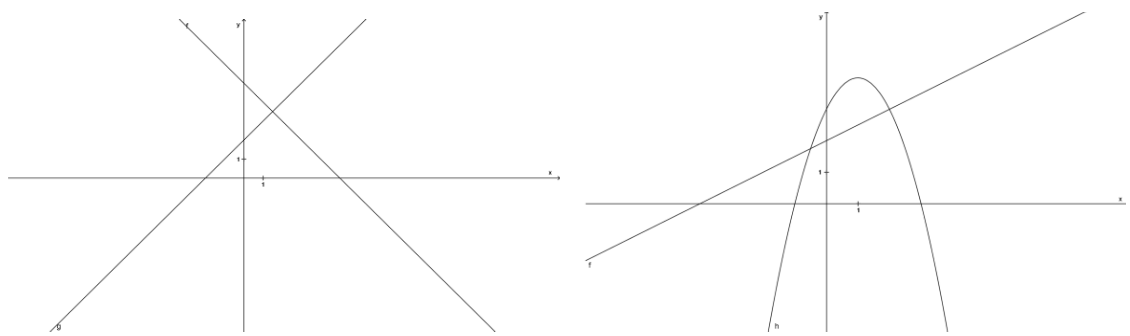

Figura 1: Gráficas correspondientes a las situaciones 1 y 2

Los estudiantes obtienen la curva más razonable para *q* identificando en primera instancia sus signos y los *puntos seguros* de *q* (relativos a los ceros, el uso del uno, el menos uno y la intersección de las funciones graficadas, donde *q* vale uno). Para obtener otros *puntos seguros* los estudiantes reformulan la técnica de la construcción geométrica que usaron en los recorridos anteriores, construyendo triángulos semejantes que aprovechan el dato de la unidad y formulando las proporciones correctas para cada ordenada del punto que desean obtener. Es decir que en este recorrido, hay que *trabajar la técnica* utilizada para la multiplicación de segmentos y adaptarla al cociente de los mismos. Como la multiplicación es conmutativa los estudiantes pueden utilizar indistintamente cualquier segmento para comenzar la construcción y obtener por resultado la multiplicación entre ellos, pero como la división no es conmutativa, es necesario repensar y validar una construcción diferente. Surge además, la necesidad de estudiar una característica fundamental de las funciones racionales: el caso en que el divisor es cero.

Entonces, se identifican los puntos donde la función divisor se hace cero y se analiza el posible comportamiento de la gráfica razonable para q en los puntos próximos al “cero del denominador”, debido a que en este punto no se puede obtener la gráfica de q. Llegados a esta instancia, los estudiantes y el profesor establecen un consenso acerca de cómo identificar este “problema” en la gráfica y sus variantes: que dividendo y divisor sean cero simultáneamente o no, lo cual permite entre otras cosas analizar la existencia de q y sus asíntotas.

El estudio deriva también en el análisis de si la gráfica hallada para q corresponde a la representación gráfica de una función o no. Para responder a esta cuestión, los estudiantes deben volver sobre la definición de función, y así pueden concluir que dicha definición se cumple para cualquier punto menos para aquel o aquellos donde la función denominador se hace cero, sin tener en cuenta, por el momento, lo que sucede en ese punto con la función numerador, situación que se analiza más adelante. De esta manera la gráfica realizada se corresponde con la representación gráfica de una función si excluimos del dominio los valores que anulan al denominador.

Los protocolos de los alumnos A22 y A24 muestran como los estudiantes obtienen la representación gráfica de q, identificando los signos, los *puntos seguros* y realizando la construcción geométrica para la obtención de *nuevos puntos seguros*. Se puede apreciar, además cómo identifican la asíntota vertical –como una recta por la cual la función “no pasa”- pero como se desconoce esta noción la anotan con signos de pregunta. Se aprecian también las proporciones que usan la unidad y establecen la pertinencia de los triángulos construidos.

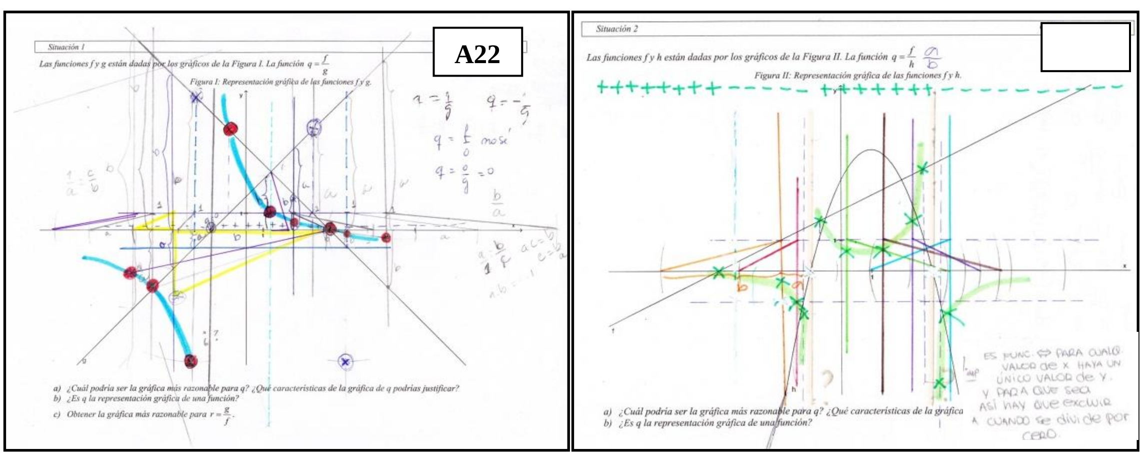

Figura 2: protocolos correspondientes a los alumnos A22 y A24 respectivamente.

Los estudiantes se preguntan por “fórmulas” que les permitan calcular los valores de q, como ya han hecho en los REI precedentes, formulan así la cuestión $Q_{3.2}$: *¿Qué posible representación algebraica resulta del cociente de funciones polinómicas?*

Dicha cuestión se estudia a partir de las situaciones 3 y 4, en las cuales se retoman los gráficos utilizados en las situaciones 1 y 2, agregando la información de los valores en los ejes y proponiendo algunos puntos pertenecientes a las funciones representadas gráficamente. Estas situaciones proponen los interrogantes: *¿Cuál es la expresión* *algebraica de q?, ¿es q una función?* En la figura 2 se muestran las situaciones 3 y 4 que constituyen el ingreso al marco algebraico-funcional.

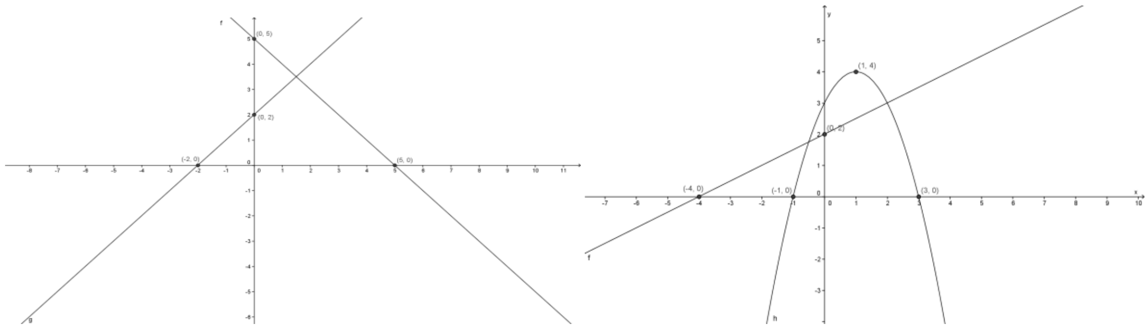

Figura 3: Gráficas correspondientes a las situaciones 3 y 4

Los estudiantes determinan primero las representaciones algebraicas de las curvas individuales, tarea con la que están familiarizados por los recorridos anteriores, e identifican a partir de las gráficas de qué función se trata. Luego realizan la división por diferentes caminos y encuentran dos obstáculos: en la situación 3, la división no es exacta, y los estudiantes no saben cómo proceder con el resto -expresan esto con signos de pregunta-; en cambio, en la situación 4 la división no puede realizarse, pues se trata del cociente de una función polinómica de primer grado por una función polinómica de grado dos. Así, expresan *q* como el cociente de las funciones cuyas representaciones algebraicas determinaron anteriormente y deciden que a lo sumo pueden obtener las expresiones de las funciones polinómicas *r* y *s* y expresarlas como $q = \frac{r}{s}$.

Se retoma también el problema de si la expresión de *q* corresponde a una función o no, lo cual conduce a los estudiantes a establecer un dominio de validez para que *q* sea una función. Lo que hemos consignado puede observarse en los protocolos de los alumnos A39 y A49 de la figura 4.

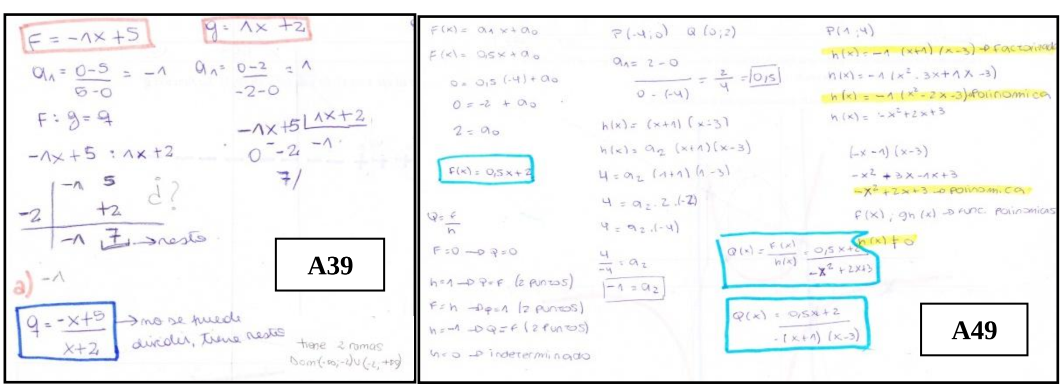

Figura 4: protocolos correspondientes a los alumnos A39 y A49 respectivamente.

Una vez producida la institucionalización de la función racional y de sus condiciones de existencia, se ingresa al problema de las asíntotas y los ceros. En las situaciones que continúan se retoma el análisis de los ceros de las funciones racionales y se realiza un análisis en profundidad de las asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) y de los puntos de discontinuidad, junto con un estudio de los casos de simplificación. El recorrido transita también por construir, explicar y justificar una técnica para realizar las operaciones con funciones racionales, tanto en el marco algebraico como analítico funcional, ingresando también en el estudio de las ecuaciones e inecuaciones racionales.

Conclusiones

Las implementaciones realizadas en los dos cursos de 5to Año de la escuela secundaria, muestran algunos resultados auspiciosos, tanto para la caracterización de la Organización Matemática como para el diseño de la Organización Didáctica, pues no solo permiten recuperar algunas técnicas construidas en los recorridos precedentes y adaptarlas a las nuevas situaciones, y así también obtener otras que permiten completar la OM relativa a las funciones racionales, sino que además, una enseñanza por REI instala modificaciones importantes en el contrato didáctico.

En lo referente a la OM, la implementación del REI ha permitido obtener la gráfica de q en el marco geométrico-gráfico utilizando la técnica del cálculo geométrico, identificando los puntos notables, los signos y analizando lo que ocurre en los puntos próximos a las asíntotas tanto verticales como horizontales.

Con relación al marco algebraico- funcional, se obtienen posibles representaciones para q mediante el cálculo algebraico del cociente de polinomios. Esto, no presentó problemas a los estudiantes pues obtienen la expresión algebraica de las funciones polinómicas representadas gráficamente en forma polinomica y si es posible, factorizada, y luego posibles representaciones algebraicas de q.

Los resultados han ganado viabilidad por los recorridos precedentes, aunque estos no son imprescindibles, pero si no existieran se afectaría la cronogénesis y la topogénesis.

En lo referente a la OD, una enseñanza por REI introduce cambios radicales en el contrato de estudio vigente en las instituciones escolares, con implicaciones fuertes en la topogénesis. El REI demanda a los estudiantes generar el conocimiento, compartirlo, decidir cómo y por donde seguir. Esto a su vez, exige resistencia a la frustración originada en las incertidumbres, y aceptar el papel de un profesor que comparte las responsabilidades sin asumir una posición dominante ni autoimponerse un papel de garante del saber y conocedor "por definición", el profesor es un media más en la clase. La mediación del profesor es ejercida fundamentalmente desde el diseño de las situaciones y la gestión del REI sus dialécticas inherentes. Estos cambios en el contrato también están viabilizados por la participación de los estudiantes en otros REI.

Referencias Bibliográficas

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2004) *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado el 12 de febrero de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Recuperado el 12 de febrero de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Recuperado el 12 de febrero de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr/

Gazzola, M.P.; Llanos, V.C.; Otero, M.R. (2011). Funciones Racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio e investigación (AEI). *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)* pp. 494-500. Tandil. NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA. Recuperado el 12 de febrero de 2014 de http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2010). "Evaluar y calificar: algunas reflexiones en torno a las actividades de estudio e investigación (AEI)". *Actas 2do Congreso Internacional de Didácticas Específicas: Poder, disciplinamiento y evaluación de saberes*. pp. 1-6. Recuperado el 12 de febrero de 2014 de http://www.unsam.edu.ar/escuelas/humanidades/didacticas_cede_2010/actas.htm

Llanos, V. C; Otero, M. R. (2011). Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas. *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)* pp. 501-508. Tandil. NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA.

Llanos, V. C.; Otero, M. R.; Bilbao, M. P. (2011). *Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI)*. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. Año 6 nº1, pp. 102-112. Argentina. Recuperado el 12 de febrero de 2014 de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.

Otero, M. R.; Llanos, V. C. (2011). Enseñanza por REI en la Escuela Secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones. *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM)* pp. 15-23. Tandil. NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA. Recuperado el 12 de febrero de 2014 de http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas