



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



La representación polinomial y el desarrollo del pensamiento matemático en la educación básica primaria

Helmer Jesús Ruiz Díaz
Secretaria de Educación del municipio de Popayán
Colombia
hjdiaz@unicauca.edu.co

Yilton Ovirne Riascos Forero
Universidad del Cauca
Colombia
yirifo@gmail.com

Resumen

En el taller se socializarán las estrategias que niños entre 8 y 11 años siguieron cuando se enfrentaron a una tarea que consideró situaciones alusivas a la representación polinomial de numerales escritos en el Sistema Decimal de Numeración (SDN). A partir del análisis de dichas situaciones y los resultados obtenidos se espera reflexionar y analizar posibles situaciones de enseñanza que consideren el pensamiento de los niños y aporte significativamente al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, estableciendo posibles relaciones con la construcción de ciudadanía, la identidad de género y la formación en valores. Dichas estrategias se obtuvieron en el marco de una investigación para optar el título de Magíster en educación, en la línea de educación matemática.

Palabras clave: Representación polinomial, estrategias, pensamiento matemático, construcción de ciudadanía.

Introducción

En el desarrollo sociocultural de todos los pueblos se contempla la responsabilidad por la formación de los futuros ciudadanos, procurando que se mantengan y mejoren las condiciones ancestrales que garantizan la supervivencia de los mismos. En esta dirección, una de las propuestas más implementadas se centra en los procesos de formación a los que se deben someter todos los niños y niñas pertenecientes a la sociedad.

De acuerdo a la ley 115 de 1994, en Colombia, las áreas obligatorias y fundamentales

para el logro de los objetivos en la educación básica son: Ciencias naturales y educación ambiental, Ciencias sociales (historia, geografía, constitución política y democracia), Educación Artística, Educación ética y valores, Educación física, Educación religiosa, Humanidades, Matemáticas y Tecnología e informática.

Con el propósito de ordenar, mejorar y contextualizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de cada una de estas áreas, el Ministerio de Educación Nacional, difundió los lineamientos curriculares para cada una de ellas. El enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana.

En particular, para el área de matemáticas, los lineamientos consideran: unos procesos generales (razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, modelación, comunicación, entre otros); unos conocimientos básicos (pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, cada uno con sus respectivos sistemas) y el contexto (ambientes que rodea al estudiante y que le da sentido a las matemáticas que aprende).

Entre los contenidos comprendidos dentro del pensamiento numérico se encuentra el concepto SDN, considerado como una herramienta matemática construida a través de una larga evolución histórica, clasificado dentro de los sistemas posicionales que involucra simultáneamente operaciones aditivas, multiplicativas y potenciadas.

Que los niños y niñas comprendan los procesos involucrados en la representación de numerales escritos en el SDN no es tarea fácil, muchos de los errores que los niños cometen al ejecutar los algoritmos de las operaciones se deben a la dificultad para que ellos comprendan dichos procesos. De ahí la importancia de explorar el pensamiento del niño, a través del seguimiento de estrategias, para conocer los procesos que siguen en la construcción del sistema de notación y enunciación de los números en un nivel más avanzado como lo es el del significado de representación polinomial de los mismos.

Dicha representación se refiere al hecho de que todo numeral escrito en el SDN, se puede representar como un polinomio en base 10, por ejemplo, el numeral 5.896, se puede ver como:

$$5.896 = 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

En la realización del taller se presentarán las estrategias que los niños desarrollaron cuando se enfrentaron a una situación que involucró aspectos de la representación polinomial, a partir de dichas situaciones se espera proponer posibles situaciones de enseñanza que involucren el pensamiento matemático de los niños y consideren posibles relaciones con otras variables que intervienen en la formación escolar de los estudiantes.

Diseño de la tarea

La tarea se diseñó tomando dos tipos de situaciones comunes para los niños. En la primera los niños leyeron expresiones que el investigador iba mostrando una a una, en la segunda el investigador dictó, expresiones similares, para que los niños las escribieran. Dichas expresiones fueron seleccionadas teniendo en cuenta operaciones que aparecen en un polinomio en base 10 como son: numerales, productos, sumas de productos y potencias

Se elaboraron 11 tarjetas en cartulina blanca, de forma rectangular de 31×3,5 centímetros cada

una, con las representaciones numéricas impresas en el tipo de letra Impact número 72. Cada tarjeta se enumeró en la parte posterior de tal forma que el investigador anunciaba el número de la tarjeta para iniciar la lectura.

La configuración de las expresiones consignadas en las tarjetas quedó de la siguiente manera: Tarjetas 1, 2 y 3, numerales de diferente orden; tarjetas 4 y 5, productos; tarjetas 6 y 7, potencias (3^4 , 328^{42}); Tarjetas 8 y 9, sumas de productos; tarjeta 10, expresión con sumas de productos y potencias ($8 \times 5^2 + 2 \times 3^4 + 6^5$) y tarjeta 11, representación polinomial de un numeral de cinco cifras ($8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$).

Estrategias de los niños y la propuesta del taller

Las estrategias seguidas por los sujetos participantes fueron:

Descomposición en dígitos, decenas, centenas y combinaciones entre ellas: se presentó, sobre todo en la lectura de los numerales de las primeras tarjetas

Introducción errada de marcas de potencia: se encontró resultados similares a los presentados por Otálora (2006), además se pudo detectar otras palabras que en el análisis fonológico no está ni como sufijo ni como prefijo, en este caso los niños mencionan el punto al leer un numeral, por ejemplo, al leer el numeral 353.234 dicen “trescientos cincuenta y tres punto, doscientos treinta y cuatro”.

Concatenación: apareció en la lectura de productos, potencias, suma de productos y polinomios. Para los niños no es relevante la posición de los números, por ejemplo, la expresión 3^4 la consideraron como un numeral y leyeron “treinta y cuatro”

Lectura de operaciones: se presentó en varias tarjetas, los niños leyeron los numerales de acuerdo a las operaciones incluidas en cada una de las tarjetas. En esta estrategia se destaca la lectura de la operación potenciación como una fracción, pues fue a la que más recurrieron los niños entrevistados.

Operaciones con los números: se destacan algunos niños que al observar en una tarjeta una multiplicación no leyeron la operación, sino que indicaron el resultado de dicha operación.

Lectura en la forma del SDN: los niños y niñas leen las expresiones de la forma usual en que se hace en el SDN, esta estrategia se presentó en todas las tarjetas.

Durante el desarrollo del taller, se pretende identificar y describir, la diferenciación de reglas implícitas en la construcción de conceptos matemáticos, en particular para la construcción de la representación polinomial, con la construcción de reglas implícitas y sus transformaciones en otros espacios aparentemente distintos, como por ejemplo en la construcción de ciudadanía.

Es decir, mostrando la importancia de la identificación de tales reglas en la comprensión matemática, identificar analogías en otros espacios de la vida de los niños, se intentará mostrar, metodológicamente, la importancia y aporte del trabajo lógico de comprender, identificar y aplicar esas reglas implícitas que se utilizan en contextos diferentes.

Como ya lo hemos mencionado, el objeto matemático que está en juego es el SDN, en particular su representación polinomial, contenido del pensamiento numérico, transversal a los otros pensamientos propuestos en los lineamientos, curriculares del Ministerio. Además, la enseñanza de dicho objeto se ubica desde los primeros años del ciclo de básica primaria.

Pero, ¿por qué la representación polinomial? Veamos, la expresión $5 \times 15 + 25 \times 8 + 3$ y la expresión $2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 6 \times 10^0$, ambas representan un número, pero la segunda lo hace con una cierta estructura que se hace necesario que los niños y niñas la fortalezcan para alcanzar una mejor comprensión del SDN; en ella se reconoce un orden que no lo hay en la primera expresión.

Es decir, cuando se pasa de una representación aditiva o aditiva multiplicativa a la representación polinomial de numerales, los niños y niñas tienen que establecer una estructura de orden que le exige diferenciar elementos de una disposición a la cual pertenecen todas las representaciones de numerales, como lo son los dígitos. Y esto es lo que en la vida diaria una persona tiene que hacer, reconocer y diferenciar elementos dentro de una estructura social a la cual pertenece tomando consciencia de la composición jerárquica que la conforma.

En la representación polinomial hay una estructura jerárquica ordenada, compuesta por una serie de elementos y operaciones básicas para los niños y niñas, como lo son la suma y la multiplicación que son fáciles de resolver, pero también hay elementos que representan diferentes jerarquías, no es lo mismo 10^3 que 10^2 , aunque ambos son 10, y cada que se hace uso de estas potencias, se recurre a un cierto orden lógico de implicación, de superioridad en términos de potencias de 10.

Como los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los que están sumergidos los niños y niñas no son claros, es preciso que, al acercarse a este tipo de cuestiones matemáticas, se presenten errores que muy probablemente estén relacionados con aspectos fundamentales de la vida cotidiana, entre ellos podemos mencionar la construcción de ciudadanía, la identidad de género y el contexto.

Es decir, hay una manifestación de errores cuando los niños están reproduciendo el conocimiento matemático que se ha puesto en el aula, esos errores se suscitan a través de unas estrategias que los niños y niñas desarrollan y esas estrategias conllevan a unos obstáculos y para tales obstáculos se pretenden identificarles una génesis, relacionada específicamente con alguna de las tres variables puestas en escena.

Poder identificar y relacionar cierto tipo de obstáculos, con alguna de las variables mencionadas, podría considerarse como un aporte significativo para la educación matemática, puesto que se dotaría a los profesores de elementos indispensables para el tratamiento de situaciones específicas en el aula.

Metodología para el desarrollo del taller

En un primer momento se presentará y socializará el procedimiento seguido durante el diseño y la aplicación de la situación, haciendo énfasis en la importancia de un buen diseño de situaciones para contribuir al mejoramiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en la educación básica.

Luego se describirán las estrategias encontradas durante el proceso investigativo y se hará un análisis de los resultados a la luz de la teoría de los campos conceptuales y las representaciones semióticas.

Finalmente se espera reflexionar sobre la importancia y utilidad que tiene el reconocimiento de los procesos y estrategias que siguen los niños cuando construyen un objeto matemático para tenerlo en cuenta en el diseño de situaciones de enseñanza.

Marco de referencia

La Representación en didáctica de las matemáticas

En didáctica de las matemáticas, las representaciones se centran particularmente en el conocimiento matemático. En el análisis de los procesos de aprendizaje y comprensión de los objetos matemáticos, las representaciones juegan un papel importante, en este trabajo dicho concepto se utilizó para argumentar el significado que los sujetos dan a los objetos representados.

En este sentido, se tuvo en cuenta los aportes de Piaget sobre la representación mental como la evocación de los objetos ausentes y la consideración del carácter figurativo y operatorio de la representación (Piaget, 1976). También, la noción de representación semiótica expuesta por Duval, que hace referencia a un sistema particular de signos y supone *“la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro”*. (Duval, 1999, pág. 27)

Por otra parte, Vergnaud (2006) considera la representación como actividad funcional, como un conjunto jerarquizado de procesos dinámicos, proponiendo una teoría en la cual le concede a las representaciones internas un papel determinante en la construcción de conocimiento por parte de los sujetos. La teoría de los campos conceptuales explica cómo el sujeto construye conocimientos permitiendo establecer relaciones y separaciones entre estos desde el punto de vista del contenido conceptual.

Estrategias

Cuando un sujeto se enfrenta a una situación determinada, es probable que tenga las competencias necesarias para resolverla o por el contrario que carezca de ellas (Vergnaud, 1990). En este último caso es donde emergen los esquemas mentales adquiridos y se combinan con otros para poder encontrar una solución a la situación propuesta. Este esbozo sucesivo de varios esquemas, va acompañado necesariamente de descubrimientos, y es en las acciones del sujeto que se pueden observar las estrategias seguidas durante el proceso de resolución de una tarea concreta.

El problema central del estudio psicológico de las estrategias consiste en determinar sus condiciones de éxito, en precisar los ajustes progresivos de los medios a los fines y en analizar su formación (Inhelder, 1978). Por lo tanto, el análisis de las estrategias cognitivas tendrá en cuenta los descubrimientos sucesivos del sujeto y las razones de las modificaciones operadas, es así como Inhelder (1978) denomina estrategia a *“todo sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptible de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, y que constituyen los medios para alcanzar el fin hacia el que tiende el sujeto”*. (pág. 7).

El sistema Decimal de Numeración

Como objeto matemático, *“el sistema de numeración se puede considerar como un sistema de representación de las cantidades”* (Terigi & Wolman, 2007, pág. 65), donde se involucra un proceso de diferenciación de los elementos y relaciones reconocidas en el objeto a ser representado y una selección de aquellos elementos y relaciones que serán retenidos en la representación.

El pensamiento matemático

El concepto de pensamiento matemático puede interpretarse de distintas maneras,

dependiendo del foco de atención y de los protagonistas implicados.

Cantoral y otros (2005), expone varios modos de entender el concepto de pensamiento matemático y, por tanto, de analizar el desarrollo del mismo. Por un lado, atribuyen el término de pensamiento matemático a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas. Por otro lado, entienden el pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas.

Estos autores concluyen expresando que el pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos, y por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. Desde esta perspectiva, el pensamiento matemático no encuentra sus raíces en las tareas propias y exclusivas de los matemáticos profesionales, sino que están incluidas todas las formas posibles de construcción de ideas matemáticas en una gran variedad de tareas. Por lo tanto, el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas.

En el último panel plenario que organizó el PME acerca del Desarrollo del pensamiento matemático intervinieron varios investigadores: Uri Leron, abordó el pensamiento matemático desde las relaciones entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento analítico, tratando de tender un puente que conecte ambos e indicando cómo dicha conexión puede ayudar a desarrollar el pensamiento matemático. Carolyn Maher expuso una noción de pensamiento matemático equiparable tanto al pensamiento que se pone en juego cuando resolvemos problemas como al proceso de razonamiento que conlleva dicha resolución.

Gabriele Kaiser analizó este pensamiento a través de los procedimientos de modelización, cuando se relacionan e interactúan el mundo real y el matemático. Y Frederick Leung lo determinó como un aprendizaje de tipo cultural, insistiendo en la idea de que los docentes deben motivar al alumnado para que se esfuerce y se interese en las actividades de índole matemática.

Por otra parte, la actividad matemática se ha caracterizado por la utilización de diversos sistemas de expresión y representación, es decir, a cada concepto matemático le corresponde una o varias representaciones específicas. Al respecto se debe tener cuidado para no confundir un objeto con su representación, como lo manifiesta Duval (1999) *“no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación”* (pág. 13)

En particular, el concepto de número está ligado a la noción de sistema, es decir no se hace referencia a conceptos numéricos sino a sistemas o estructuras numéricas. Entendiéndose por estructura numérica como *“el conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componer esos números y de unas relaciones, mediante las que se comparan dichos entes”* (Rico, 1996. p. 29).

Uno de los sistemas de representación o *“Modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas, mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados”* (Castro, Rico, & Romero, 1996. p. 23), mediante el cual se expresan estructuras numéricas es el Sistema Decimal de Numeración. Un estudio detallado de dicho sistema requiere abordar ciertas consideraciones sobre el número, sus operaciones y los sistemas numéricos.

Referencias y bibliografía

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanis, J. A., Rodríguez, R. A., & Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Castaño, J. (1995 - 1998). El sistema decimal de numeración. *Hojas pedagógicas, colección matemáticas, serie lo numérico*.

Castro, E., Rico, L., & Romero. (1996). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Research Forum XX Encuentro del International Group for the psychology of Mathematics Education*.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali : Artes gráficas Univalle.

Inhelder, B. (1978). Las estrategias cognitivas: Aproximación al estudio de los procedimientos de resolución de problemas. *Anuario de Psicología*(18), 3-20.

MEN. (8 de Mayo de 2014). Documento orientador - Foro Educativo Nacional 2014: ciudadanos matemáticamente competentes. Bogotá, Colombia.

Otálora, Y., & Orozco, M. (2006). ¿Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(003), 407-433.

Piaget, J. (1976). El papel de la imitación en la formación de la representación. En R. Zazzo, *Psicología y Marxismo* (págs. 135 - 143). Madrid: Pablo del Río, Editor.

Terigi, F., & Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 59-83.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2), 133-170.

Vergnaud, G. (2006). Representación y actividad: dos conceptos estrechamente asociados. *Teoría de la Representación y Educación Matemática*, (pág. 16). Madrid.

Apéndice A
Situación para recoger datos

643.785	➔ Numerales
92.684.836	
791.354.276.846	
8×10	➔ Productos
49×524	
3^4	➔ Potencias
328^{42}	
$12 \times 5 + 28 \times 34$	➔ Sumas y Productos
$8 \times 100 + 5 \times 10$	
$8 \times 5^2 + 2 \times 3^4 + 6^5$	➔ Polinomio
$8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$	➔ Polinomio en base 10

TARJETA	Dictado1: en la forma del SDN
1	Ochocientos cincuenta y siete mil, seiscientos cuarenta y dos
2	Ochenta y cuatro millones, trescientos veinticuatro mil, ciento cincuenta y siete.
3	Quinientos ochenta y cuatro mil, trescientos veinticinco millones, seiscientos cuarenta y ocho mil, quinientos treinta y nueve.
4	Nueve por diez.
5	Treinta y dos por cuatrocientos cincuenta y ocho.
6	Cuatro elevado a la tres.
7	Doscientos ochenta y cuatro elevado a la treinta y cinco.
8	Dieciocho por seis, más treinta y cuatro por cuarenta y siete.
9	Cinco por cien más nueve por diez.
10	Cuatro por seis elevado a la cinco, más ocho por cuatro elevado a la siete, más ocho elevado a la tres.
11	Siete por diez elevado a la cuatro, más nueve por diez elevado a la tres, más cinco por diez elevado a la dos, más seis por diez elevado a la uno, más cuatro por diez elevado a la cero.