PROBLEMAS EMPRESARIALES CON RESOLUCIÓN MATEMÁTICA

María Rosa Rodríguez, Aldo Mario Sota, Jesús Alberto Zeballos
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
marosarodriguez@arnet.com.ar
Niveles Terciario y Universitario

Palabras clave: Modelo matemático. Optimización. Decisiones económicas.

Resumen
El notable avance de las Ciencias Económicas en el campo de la investigación aplicada se dio a partir del uso creciente del lenguaje matemático. En consonancia con ello, el objetivo de este trabajo es modelar matemáticamente un problema de optimización, estructurando formalmente un saber empírico y resignificando epistemológicamente al saber matemático. Se integra la teoría con la práctica y los conocimientos matemáticos con los costos, beneficios y óptimo mesoeconómico. Se utilizan representaciones geométricas que explican con áreas de figuras planas temas económicos de interés. Con ello, intentamos generar en estudiantes y usuarios un nuevo significado operativo, predominando una metodología que explica y predice fenómenos económicos. Explicar acabadamente y predecir con exactitud es el *desiderátum* del conocimiento científico. En las ciencias empíricas, este es un ideal inalcanzable y la Matemática ayuda en la persecución de ese ideal.
Ahora bien ¿es cierto que los empresarios tienen en cuenta los resultados de las investigaciones de economistas y matemáticos? Aparentemente no, se guían menos por los análisis económicos que por una suerte de *intuición*.
Según estas reflexiones, ¿qué restaría para la docencia matemática? En este trabajo hemos propuesto modelos matemáticos para determinar los costos y beneficios, que permitirán a los docentes de Matemática de las Ciencias Sociales utilizarlo para promover el desarrollo de un pensamiento no lineal y una cierta intuición racional, capacitando a sus alumnos para encontrar múltiples alternativas de solución.

Introducción
Según un enfoque socio-formativo, el objetivo de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática consiste en formar personas competentes para el abordaje de tareas y resolución de problemas mediante números, algoritmos, procesos lógicos, estimación de resultados, construcción de modelos matemáticos y utilización de procedimientos del cálculo. Aquí se enfatiza la comprensión, la transferencia y la interrelación de conceptos, principios, teoremas, etc.; antes que la acumulación de datos inconexos, que adquieren nueva significación cuando se les confiere contenidos empíricos al cuantificar o dotar de relaciones formales a hipótesis y leyes de otros ámbitos científicos (Cantoral, 2006). Procedimiento instrumental que recibe comúnmente la denominación de “Modelo matemático”.

El objetivo de este trabajo es mostrar una solución matemática a problemas de costos y beneficios de una empresa. Tomamos como ejemplo de aplicación la industria citrícola de la provincia de Tucumán. Para lo cual, utilizamos representaciones geométricas que explican con áreas de figuras planas importantes conceptos económicos, dotando de valor

epistémico a la técnica de esas representaciones geométricas. Con ello intentamos generar en el estudiante y usuarios un nuevo significado operativo de tal técnica, predominando una tecnología que explica con figuras geométricas una veracidad económica (Covián, 2006).
El estudio de dichos costos y beneficios nos lleva a plantear un modelo de optimización a nivel mesoeconómico.

Demanda y Oferta Agregadas
Cuando se estudian los beneficios sociales se debe tener en cuenta, fundamentalmente, la Demanda Agregada. Esta depende básicamente de ciertos factores relevantes: ingreso de la población, precio de los bienes demandados, de los sustitutivos, de los complementarios, gustos de la población, clima, entre otras variables.

La curva de oferta agregada muestra la cantidad de producción que desean ofrecer las empresas a los diferentes niveles de precios. Resume las relaciones entre el mercado de bienes y el de factores (Sota, 1988).

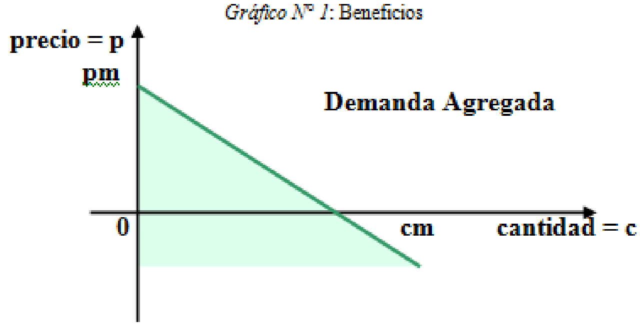
En este trabajo presentamos, en primer lugar, un modelo simple de “Costos y Beneficios” y luego exponemos un modelo de Óptimo a nivel Mesoeconómico, basado en conceptos algebraicos y geométricos elementales, ya que las gráficas de Demanda y Oferta Agregadas, consideradas en este análisis, son rectas. Para casos más generales, cuando sus gráficas son líneas curvas, se apela a cálculos avanzados, como el Cálculo Integral. Uno u otro modelo revelan acabadamente las relaciones matemáticas entre costos y beneficios, tanto de productores como de consumidores. El segundo modelo es más abstracto y formal; mientras que el primero es más intuitivo.

Las cantidades demandadas y las ofrecidas dependen de innumerables variables. Entre ellas, es fundamental para la Economía el precio. Razón por la cual, para los economistas el precio se ha constituido en la variable independiente, desde los tiempos de Alfred Marshall (1912). No obstante, el precio es graficado en el eje de las ordenadas, mientras que la cantidad producida de un bien en el eje de las abscisas. A pesar de ello el precio no pierde su condición de variable independiente. De todos modos *resulta indiferente tomar la cantidad demandada como una variable dependiente del precio o a la inversa.*

La Economía, por otra parte, limita el uso de los elementos matemáticos a los reales no negativos. Es absurdo pensar los bienes y servicios en cantidades o precios negativos (Fischer et alii, 1989).

Los gráficos siguientes muestran las relaciones entre precio y cantidad con las restricciones aludidas.

Gráfico Nº 1: Beneficios

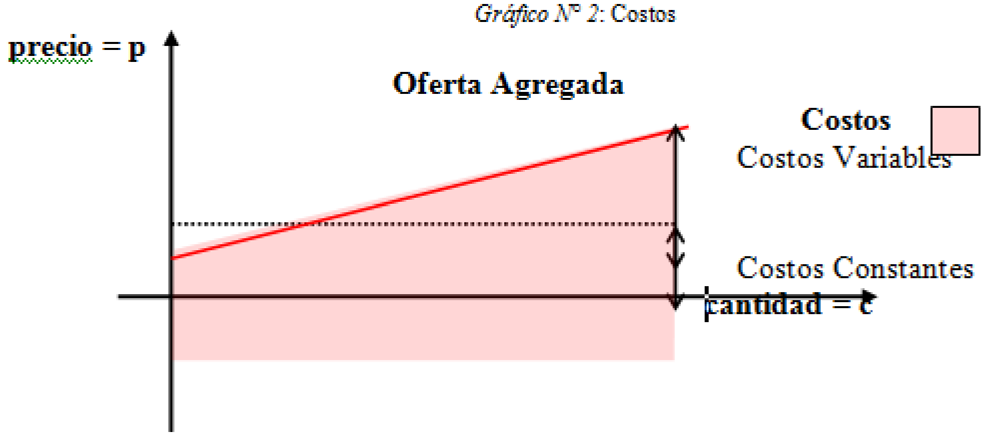


Cuando p = 0 : c = cm (cantidad máxima) ⟶ **“saciedad”**
Cuando c = 0 : p = pm (precio máximo) ⟶ **“abstinencia”**

El área de $\overset{\triangle}{\text{pm0cm}}$ = Beneficio, es la expresión en pesos del valor que la sociedad asigna al consumo de bienes a los niveles de saciedad y abstinencia.

Una disminución (o aumento) en el precio implica un incremento (o diminución) en la cantidad demandada.

Gráfico Nº 2: Costos

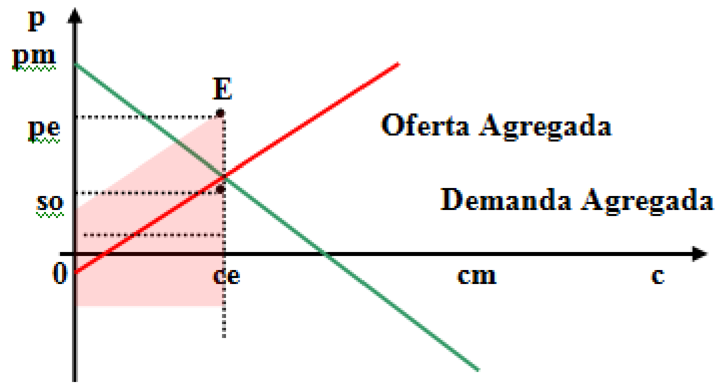


Modelo Matemático para Costos y Beneficios

La superposición de los gráficos de Demanda y Oferta muestra las relaciones geométricas y analíticas de los siguientes conceptos:

DA = Demanda Agregada de bienes y/o servicios por parte de la comunidad.
OA = Oferta Agregada de bienes y/o servicios para la comunidad.
pm = precio de abstinencia, cm = cantidad de saciedad
pe = precio de equilibrio.
a = coeficiente angular o pendiente de DA.
b = coeficiente angular o pendiente de OA.
ce = cantidad de equilibrio, so = costos constantes.
E = Punto de equilibrio u Óptimo Social.

Gráfico Nº 3: Equilibrio entre Costos y Beneficios



En el punto de equilibrio **E**, la comunidad demanda la cantidad ce y está dispuesta a pagar el precio pe.
Geométricamente, el Ingreso en el punto E es 0pmEce y el Costo es OsoEce
En consecuencia, el Beneficio será gráficamente soEpm
Parte del Beneficio constituye el excedente de los consumidores peEpm y el área soEpe representa el excedente de los productores.

La expresión matemática de las ecuaciones lineales de la Demanda y Oferta Agregadas son:

$$\mathbf{C_d = pm - a \cdot p} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{C_o = so + b \cdot p}$$

En equilibrio se igualan $\mathbf{c_d}$ con $\mathbf{c_o}$ y en consecuencia el precio de equilibrio será:

$$\mathbf{pe = \frac{pm - so}{a + b}}$$

El Beneficio representado por el área del soEpm se puede estimar, calculando el área del triángulo de base = pm – so y altura = ce $\mathbf{Bs = \frac{1}{2}\ (pm - so)\ ce}$

El Costo está representado geométricamente por el área de la figura 0ceEso

$$\mathbf{Cs = ce\ (\frac{pe + so}{2})}$$

El excedente de los consumidores es la diferencia entre la cantidad máxima que estarían dispuestos a pagar por la cantidad del bien que demandan y la que pagan realmente (Allen, 1978).

Gráficamente, es el área situada entre la recta de la Demanda Agregada y una línea horizontal que corresponde al precio de equilibrio. $\mathbf{Ex\ C = \frac{1}{2}\ (pm - pe)\ .\ ce}$

El excedente de los productores es la diferencia acumulativa entre el precio y el costo marginal de producción (Allen, 1978).

Gráficamente, es el área situada entre la recta de la Oferta Agregada y la línea horizontal correspondiente al precio de equilibrio.

$$Ex\ P = \frac{1}{2}\ (\ pe\ -\ so\ )\ .\ ce$$

Este modelo matemático puede aplicarse a cualquier industria: azucarera, minera, petroquímica, agroalimentaria, del bioetanol, del biodiesel, etc.

Aplicación a la Industria Citrícola

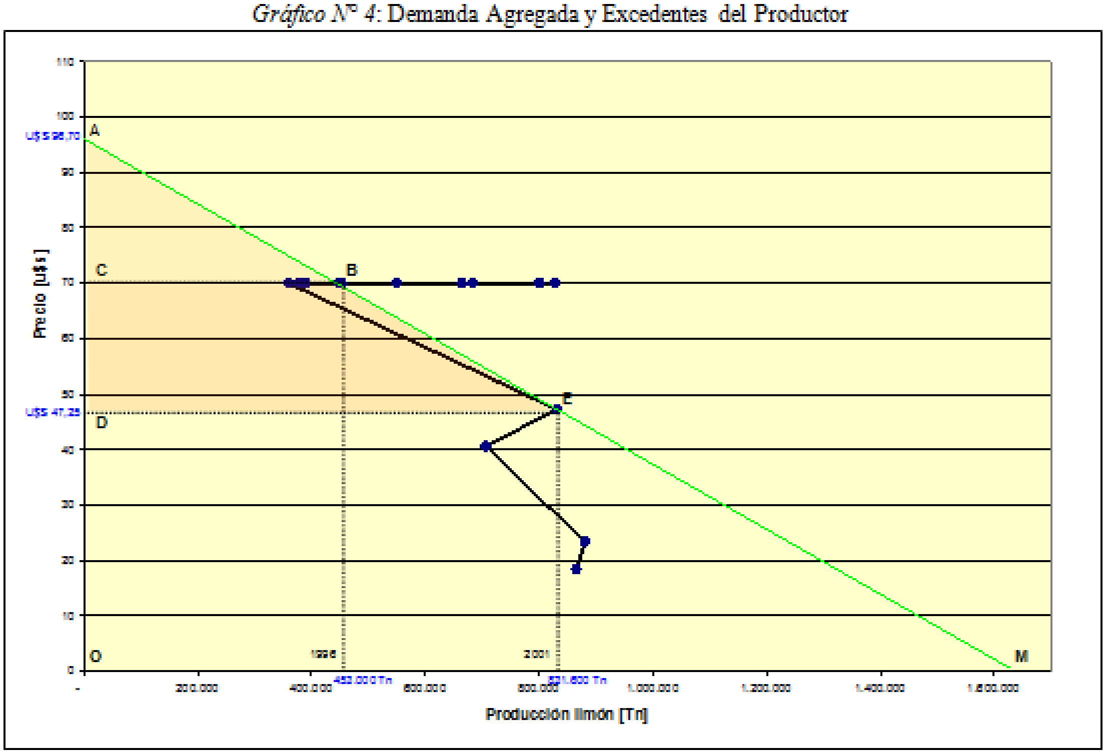
El trabajo de campo abarcó el periodo 1991 – 2005, que constituye el de mayor representatividad de la situación actual en la industria citrícola mundial. En ese lapso se produjeron los mayores cambios sociales y los más avanzados procesos tecnológicos.

De la información recogida se seleccionó: producción de materia prima (MP) limón, cantidad obtenida de coproductos (jugo, aceite esencial y cáscara seca) y sus respectivos precios expresados en dólares USA (U$S). Ello nos permitió estimar:

1) Demanda Agregada de MP limón por parte de la industria citrícola en el largo plazo (período 1991 / 2005)
2) Oferta agregada de los coproductos que provee la agroindustria citrícola en el largo plazo (período 1991 / 2005)

Siendo que la Demanda Agregada de la MP limón tiene una relación condicionada técnicamente con la Oferta Agregada, estimamos ambas funciones con la intención de medir aproximadamente los Costos y Beneficios que presenta la industria citrícola de Tucumán, en un horizonte de largo plazo y con proyecciones que sintetizamos así:

Gráfico N° 4: Demanda Agregada y Excedentes del Productor



El precio máximo de la materia prima limón de U$S 96,70 por Tonelada es hipotético ante el supuesto de que por distintas razones la cantidad producida de limón sea nula.

$$\mathbf{C_d = pm - a \cdot p \qquad \rightarrow \qquad C_d = 96{,}70 - 0{,}00006 \cdot p}$$

Es posible calcular el Excedente mínimo como Productor Demandante de Limón porque de los datos obtenidos se observa que los precios se mantuvieron constantes en U$S 70 por Tonelada en Argentina, durante los años 1991 – 2001, correspondientes a la vigencia del Plan de Convertibilidad

El Excedente Mínimo como Productor Demandante de MP = **Ex** $\mathbf{P_m}$ =Área de $\overset{\triangle}{ABC}$ =

$$= \frac{\mathbf{U\$S\ (96{,}70 - 70)\ \ 453.000\ Tn}}{2} = \mathbf{U\$S\ 6.047.550}$$ que ocurrió entre los años 1995 y 1996

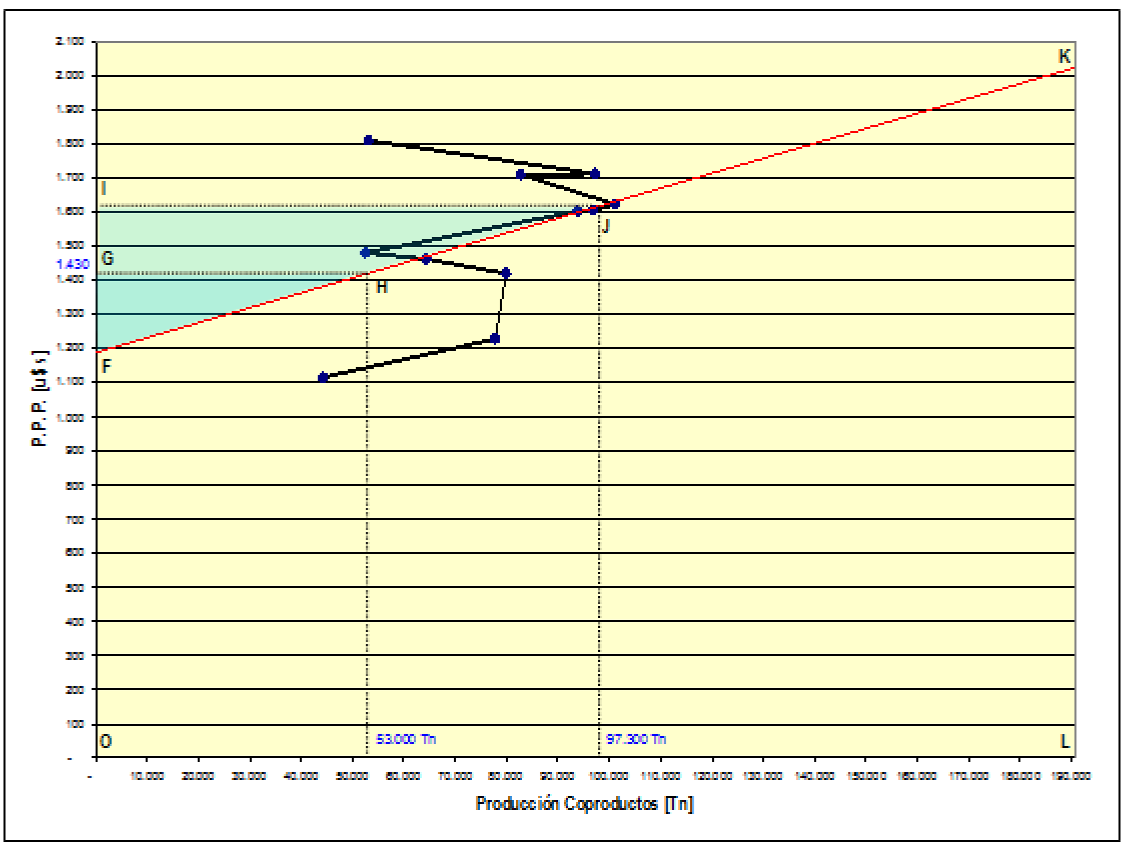
El Excedente Máximo como Productor Demandante de MP = **Ex** $\mathbf{P_M}$ = Área de $\overset{\triangle}{AED}$ =

$$= \frac{\mathbf{U\$S\ (96{,}70 - 47{,}25)\ \ 831.600\ Tn}}{2} = \mathbf{U\$S\ 20.561.310}$$ que ocurrió entre 2001 y 2002

El Excedente Máximo como Productor Demandante de limón se dio entre los años 2001 y 2002 debido a una fuerte devaluación, que estimuló la exportación de coproductos al resto del mundo.

Para graficar la Oferta Agregada de los coproductos, es necesario realizar un cambio de escala porque las variables asumen otra significación, comensurable con las variables del gráfico de la Demanda Agregada. Ellas son Produción de Coproductos y PPP (Precio Promedio Ponderado).

Gráfico Nº 5: Oferta Agregada de Coproductos - Excedentes del Productor Industrial



En este gráfico el punto J es equivalente a E, punto de equilibrio u óptimo.
Ante la presencia de varios coproductos de distintos precios y rendimientos (de esa única MP limón) es necesario calcular el Precio Promedio Ponderado (PPP), que resulta del cálculo del precio de cada coproducto, ponderado por la cantidad producida de cada uno.

$$\mathbf{C_o = so + b \cdot p \quad \rightarrow \quad C_o = 1200 + 0{,}004 \cdot p}$$

Es posible calcular el Excedente mínimo como Productor Industrial de coproductos sobre la base de la producción mínima que ocurrió entre los años 1995 – 1996.

El Excedente Mínimo como Productor Oferente de coproductos = **Ex $\mathbf{C_m}$** = Área de $\overset{\triangle}{\text{FGH}}$ =

$$= \frac{\textbf{U\$S (1430 - 1200) 53.000 Tn}}{2} = \textbf{U\$S 6.095.000} \text{ que ocurrió entre los años 1995 y 1996}$$

Donde 53.000 Tn = 11,7 % de 453.000 Tn de MP

El Excedente Máximo como Productor Oferente de coproductos = **Ex $\mathbf{C_M}$** = Área de $\overset{\triangle}{\text{FIJ}}$ =

$$= \frac{\textbf{U\$S (1.620 - 1.200) 97.300 Tn}}{2} = \textbf{U\$S 20.433.000} \text{ que ocurrió entre 2001 y 2002.}$$

Donde 97.300 Tn = 11,7 % de 831.600 Tn de MP

En consecuencia los Beneficios de la agroindustria citrícola (denominado análisis mesoeconómico), calculados anualmente, se computan sumando los excedentes mínimos y máximos respectivamente.

Estimamos estos Beneficios como Mínimos y Máximos, dentro del período tenido en cuenta para el estudio (1991-2005), obteniendo los siguientes resultados:

	Mínimo (Años 1995 - 1996)	Máximo (Años 2001 - 2002)
Excedente Productor Demandante MP	U$S 6.047.550	U$S 20.561.310
Excedente Oferente de Coproductos	U$S 6.095.000	U$S 20.433.000
Beneficio Social	**U$S 12.142.550**	**U$S 40.994.310**

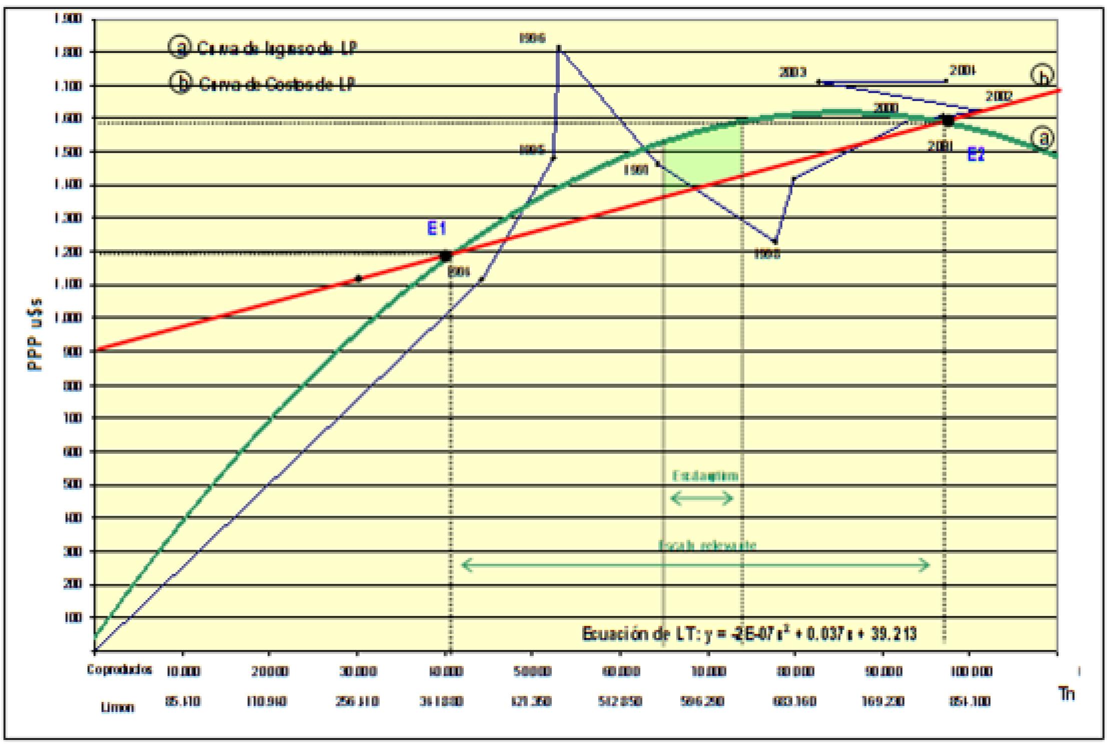
La demanda límite de MP limón, en el "precio cero" llegaría a una producción hipotética de 1.629.600 Tn. Para ello necesitaríamos contar con casi 43.000 hectáreas aptas de tierra, si se considera el rendimiento máximo alcanzado en el año 2005 de 38 Tn/Ha de limón.
Ampliar la frontera agrícola, significa habilitar un 26 % más de Has, es decir, pasar de 34.000 Has dedicadas al cultivo del limón a demandar 9.000 Has adicionales, a un precio promedio de U$S 6.000/Ha. Esto llevaría a una inversión de U$S 54.000.000 que resultaría casi imposible de concretar en los próximos 10 años.

Estos cálculos corroboran que el modelo propuesto representa razonablemente la Demanda de limón en el largo plazo y la frontera entre una producción límite de 1.629.600 Tn y un precio máximo de U$S 96,70/Tn.

Es probable que el precio de las tierras aptas para el cultivo (Tucumán va llegando a su frontera agrícola) se incrementen en gran medida debido a la demanda que provocan las inversiones para el cultivo de granos (maíz, soja) y caña de azúcar, que constituyen la materia prima para la producción de biocombustibles (bioetanol y biodiesel). Estas inversiones, con promociones fiscales y demanda asegurada ya comenzó en el año 2010.

Ahora bien ¿cuál es la escala relevante de producción, es decir, entre qué límites de máxima y mínima debería ubicarse la cantidad de coproductos elaborados, para estar dentro del tamaño económico o, dicho de otra manera, encontrar el Óptimo Mesoeconómico? Y ¿cuáles serían los niveles de actividad, precios y costos que determinen el Beneficio Máximo? En función de ese Beneficio Máximo ¿podremos calcular los costos e ingresos marginales que sean compatibles con los óptimos antes señalados?

Grafico N° 6. Ingresos y Costos de Coproductos



La función de Ingreso se ajusta por una función polinomial de grado 2.
Del gráfico surge que los costos se igualan con los ingresos en los puntos de equilibrio, bajo las premisas del análisis económico, conocido como "teoría de la firma". También, se observa que la curva de ingreso marginal va decreciendo como un reflejo de los mercados de competencia imperfecta. En efecto, para vender más hay que resignar precios.
Además, la industria citrícola tendría una escala relevante de producción entre E1 y E2 que corresponde a una producción mínima de poco más de 40.000 Tn de coproductos que requieren demandar casi 350.000 Tn de MP limón y una producción máxima de aproximadamente 97.000 Tn de coproductos que demandarían unas 830.000 Tn de MP. Los precios mínimos y máximos de los coproductos oscilarían entre U$S 1.200/Tn. y U$S 1.600/Tn.

El Óptimo Mesoeconómico se daría en una producción que oscila entre 65.000 Tn y 74.000 Tn de coproductos, que requerirían entre 550.000 Tn y 630.000 Tn de MP limón, respectivamente porque en la zona óptima, existe un punto donde se igualan los costos marginales e ingresos marginales del sector, ya que la recta tangente a la curva de Ingreso resulta paralela a la recta que define los costos.

Conclusiones

Los modelos matemáticos constituyen una versión simplificada de la realidad, a la que procuran explicar razonablemente y con el mayor grado posible de aproximación, considerando las características y variables más relevantes de los fenómenos.

El notable avance de las Ciencias Económicas en el campo de la investigación aplicada se dio a partir del uso creciente del lenguaje matemático.

Ahora bien ¿es cierto que los empresarios tienen en cuenta los resultados de las investigaciones de economistas y matemáticos? Aparentemente no, se guían menos por los análisis económicos que por una suerte de *intuición*. Según sus propias manifestaciones, hacen una apreciación lo más ajustada posible de sus costos y a esa magnitud le agregan un porcentaje, que *imaginan* aceptable por la demanda de los consumidores.

Entonces, ¿es inútil estudiar matemática, análisis económico, elaborar modelos, etc.?
Explicar acabadamente y predecir con exactitud es el *desiderátum* del conocimiento científico. En las ciencias empíricas, este es un ideal inalcanzable y la Matemática ayuda en la persecución de ese ideal.

Según estas reflexiones, ¿qué restaría para la docencia matemática? En este trabajo hemos propuesto modelos matemáticos para determinar los Costos y Beneficios, que permitirán a los docentes de Matemática de las Ciencias Sociales utilizarlo para promover el desarrollo de un pensamiento no lineal y una cierta intuición racional, capacitando a sus alumnos para encontrar múltiples alternativas de resolución.

Referencias Bibliográficas

Allen, R. (1978). *Análisis Matemático para Economistas*. Madrid: Aguilar.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). “Socioepistemología y Representación”. *Revista Relime.* México: CLAME.

Covián, O. (2006). “Estudio de la Construcción Social del Conocimiento Matemático en el Ejercicio de Prácticas de Profesionales”. *Resúmenes de la X Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Tlaxcala: Red de Cimates.

Fischer, S., Dornbusch, R. y Schmalensee, R. (1989). *Economía*. Madrid: Mac Graw Hill.

Sota, A. M. (1988). *Manual de Costos*. Tucumán: Ediciones El Graduado.