LOS SIGNOS EN MATEMÁTICA

P. Sastre Vázquez, R.E. D`Andrea
Universidad Nacional de la Provincia de Bs.As. Facultad de Agronomía. Azul. Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería. Rosario. Santa Fe. Argentina.
pasava2001@yahoo.com.ar, rodolfoedandrea@yahoo.com.ar
Nivel Superior. Lenguaje Matemático

Palabras clave: Signos. Lenguaje matemático. Significado. Interpretación.

Resumen
El lenguaje matemático es un elemento clave en el proceso de compresión de los objetos matemáticos. El lenguaje de la Matemática es preciso, está sujeto a reglas exactas y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus símbolos. El uso que se realiza de los signos en la educación matemática está ligado a la interpretación que se haga de ellos, por lo tanto es importante estudiar la relación existente entre los signos y los sujetos que los utilizan en los contextos específicos que les sirven para establecer su significado. En este trabajo se realiza una revisión sobre las diferentes concepciones sobre el significado de los signos, con el objetivo de brindar elementos teóricos que contribuyan de base para analizar y comprender las formas en que los estudiantes adquieren el significado de los signos matemáticos.

Introduccion
Los signos tienen dos contenidos: 1) eidético y 2) operacional. En un sistema, un signo 'significa', designa algo; todo sistema lo es porque sus signos poseen una carga semántica interior, ya que cuando se utiliza el signo es para comunicar algo a alguien, y el contenido de esta comunicación es, precisamente, el contenido eidético del signo. Por otro lado, un signo posee sentido operacional, en el sentido de que se sabe cómo puede ser utilizado". (De Lorenzo 1989, 186).

El sentido operatorio de un signo resulta de las relaciones y de las reglas sintácticas existentes en una lengua y que establecen cómo los signos se combinan en expresiones, y cómo pueden ser modificadas. El sentido eidético resulta de las reglas de significación y de determinación que establecen las relaciones existentes en una lengua entre los signos y los conceptos y los objetos representados por tales conceptos (Klaus 1969, Rastier 2005).

Tanto el conocimiento de las relaciones entre los signos y los objetos denotados por ellos (semántica), como el de las relaciones entre los signos entre sí (sintaxis), son muy importantes en relación a la correcta utilización del lenguaje matemático. Sin embargo, es necesario no olvidar que tanto un manejo correcto de la semántica como de la sintaxis contribuirán adecuadamente a la formación del estudiante, siempre y cuando éste sea capaz de interpretar correctamente el significado de los signos que utiliza. Así para asegurar que se produce un correcto uso de los signos matemáticos, un factor sumamente trascendental es tener la certeza que previamente que se haya logrado la apropiación del significado de los mismos. Esto pone de manifiesto la importancia de estudiar la forma en la cual se produce la interpretación, es decir de investigar en la pragmática desde un marco de una semiótica tridimensional, (signo, referente y sujeto) donde el eje se centra en el sujeto como interpretante.

Todo signo es una representación de algo. Así, representar es la operación más específica del signo. Sin embargo, esta representación sólo tiene existencia en la mente de quien la interpreta. Los signos funcionan como herramientas que hacen posible que pensemos, incluso también en lo que no vemos ni tocamos. Pensar es el principal modo de representar, e interpretar un signo es descubrir su significado. Se conoce un signo cuando se puede inferir lo que él significa. Este significado no sólo comprende los aspectos cognitivos sino también las actitudes, los valores, las emociones y todo tipo de connotaciones socioafectivas y culturales.

En este trabajo se realiza una revisión sobre las diferentes concepciones sobre el significado de los signos, con el objetivo de brindar elementos teóricos que contribuyan de base para analizar y comprender las formas en que los estudiantes adquieren el significado de los signos matemáticos.

¿Qué se entiende por signo? El término "signo" se emplea en vocabularios y contextos muy diversos. Eco (1995) lo define como algo que significa algo para alguien. Para Niño Rojas (1998) el signo existe si significa algo sobre algo de alguien y para alguien. Tanto Eco (1995) como Niño Rojas (1998) ofrecen definiciones sencillas, en las cuales se exteriorizan los tres elementos principales que definen al signo: el significante, el significado y el intérprete. Según la perspectiva de Avila (1990) se convierte en signo un hecho perceptible cuando se lo toma como representante de otro hecho distinto de sí mismo.

Charles Sanders Peirce (1839-1914) y Ferdinand de Saussure (1857-1913) fueron quienes sentaron las bases para el desarrollo de la ciencia semiótica actual. Según Vitale, A. (2002), ambos se ocuparon del signo y del símbolo en la misma época, sin entablar contacto directo entre ellos y ambos autores son referencia constante en el estudio semiótico y semiológico. El trabajo de ambos es complementario: mediante la semiótica Peirce estudió los procesos de lógica y pensamiento; y Saussure mediante la semiología estudió los procesos de semántica e interpretación de los signos lingüísticos

Concepción dualista del signo

Saussure (1945) sentó las bases de la semiología desde el estudio de la lingüística y la fonética; alcanzando por extensión a todo sistema de signos comunicativos; como ritos simbólicos, conductas de cortesía o señales convencionalmente aceptadas. Saussure, (1945) concibió al signo lingüístico como una "entidad psíquica de dos caras", compuesta por un *concepto o significado* y por una *imagen acústica o significante*. El signo lingüístico no une una cosa y un nombre, sino un concepto y una imagen acústica.

Saussure afirma que el signo lingüístico es arbitrario, es decir que el vínculo que une al significante (signo) con su significado es completamente arbitrario, inmotivado, y que no mantiene ninguna relación natural con el objeto designado. De este modo, las letras que componen una palabra han sido ligadas entre sí por ninguna relación objetiva. De aquí que el signo en sí mismo y su significado carecen de motivación lógica.

Al hablar de imagen acústica, no se refiere al sonido material, físico, sino a la imagen psíquica que el hablante-oyente se forma de los sonidos que le sirven de medio para la producción de los signos lingüísticos. Es de hacer notar que Saussure excluyó de su definición de signo lingüístico tanto el objeto mismo, la cosa nombrada o significada (el referente) como la efectiva materialidad física del propio signo. Por lo tanto, para Saussure, el signo lingüístico es una entidad psíquica une un *significado* (el concepto) con un *significante* (la imagen acústica), los cuales son tan solidarios el uno del otro, como las dos caras de una moneda.

Concepción triádica del signo

Para Peirce (1904) no es posible pensar sin utilizar los signos. Este autor estableció, utilizando como marco de referencia la lógica del pensamiento, las bases de la semiótica, entendiendo a ésta como un proceso lógico de interpretación del signo.

Según Peirce (1904) es imposible conocer a una cosa (objeto), en sí misma. Para él se conoce a través de signos (representamen, o sea lo que representa), los cuales se manifiestan en la mente del observador (interpretante) al percibir la cosa; signos que para ser interpretados son reconvertidos en otro sistema de signos. Así, la semiosis resulta de la operación entre tres elementos: el *signo (representamen*), *el objeto y el interpretante*. Según esta óptica, la semiótica es una vertiente de la lógica, por lo cual todos los contenidos mentales son signos, y todos los procesos mentales son procesos de semiosis.

La función representativa del signo no reside en su vínculo material con el objeto ni en que sea una representación del objeto, sino en que sea considerado como signo por un pensamiento. Ese signo creado es al que Peirce llamó interpretante del primer signo. Este signo está en lugar de algo, su objeto. El objeto es aquello por lo que está el signo, aquello que representa. Este tercer elemento convierte a la relación de significación en una relación triádica, pues el signo media entre el objeto y el interpretante, el interpretante relaciona el signo y el objeto, y el objeto funda la relación entre el signo y el interpretante. Todo signo es un representamen. El interpretante es el signo equivalente o más desarrollado que el signo original, causado por ese signo original en la mente de quien lo interpreta.

Signo matemático

Vergnaud, (1983 a; 1988; 1990; 1993; 1997), define concepto como un triplete de tres conjuntos C = (S, I, R) donde:

1) S es un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto;
2) I es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, o un conjunto de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto;
3) R es un conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y

representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para lidiar con ellas.

El primer conjunto (de situaciones) es el *referente* del concepto, el segundo(de invariantes operatorios) es el *significado* del concepto, en cuanto al tercero (de representaciones simbólicas) es el *significante*. Es claro entonces que para estudiar el desarrollo y el uso de un concepto, a lo largo del aprendizaje o de su utilización, es necesario considerar esos tres conjuntos simultáneamente. Según Vergnaud, conceptos y símbolos son dos caras de la misma moneda y se debería siempre prestar atención al uso que los alumnos hacen de los símbolos a la luz del uso que hacen de los conceptos.

Skemp (1999) al estudiar los símbolos matemáticos utilizó la idea de estructuras superficiales y estructuras profundas. Consideró que las estructuras superficiales son las formas de los símbolos y éstos se hallan concebidos para transmitir significados que son las estructuras profundas. En relación a la formación del concepto, una fuente de dificultades es la falta de comprensión de las estructuras profundas. Es así que Orton (1998) recomienda que el símbolo sea introducido como la etapa final de una secuencia de aprendizaje que se desarrolla a partir de la "personificación" concreta del concepto. De la misma forma, las ideas matemáticas deben ser secuenciadas y presentarse de forma tal que facilite el uso del conocimiento conceptual existente. También sugiere que se emplee con mucha más frecuencia el lenguaje oral antes de expresar las ideas en un simbolismo abreviado.

Para Skemp (1980) el término símbolo es sinónimo de representación. Este autor diferencia dos formas de símbolos matemáticos: símbolos visuales y símbolos verbales (nodos de imaginación). En los primeros incluye los 'diagramas de todas clases', en particular las figuras geométricas; en los segundos incluye la lengua natural y los símbolos algebraicos, a los cuales visualiza como una especie de "taquigrafía verbal" (palabra hablada como escrita).

Skemp, (1980) estudia la importancia que tiene los símbolos en la formación de conceptos en general y de los matemáticos en particular. Según este autor: "Un símbolo es un sonido, o algo visible, conectado mentalmente a una idea. Esta idea es el significado del símbolo. Sin una idea ligada, un símbolo es vacío, carente de significado" (Skemp, 1980, p.74).

Sfard (2000), intentando revelar por qué la Matemática resulta tan difícil para muchos, describe la siguiente circularidad: si el significado es función del uso, uno debe manipular un concepto para entenderlo (en este caso, manipular símbolos para comprenderlos y comprender cómo pueden facilitarnos la tarea), pero por el otro lado, ¿cómo podemos usar algo sin entenderlo? Sfard afirma que es precisamente esa circularidad lo que establece una seria trampa para los alumnos, pero es al mismo tiempo el combustible del proceso de aprendizaje. Este autor afirma que en este proceso, las formas y los significados, tal como son practicadas y vivenciadas por los alumnos, serían como dos piernas que hacen posible el caminar hacia adelante debido a que no están nunca en el mismo lugar, y en cada momento una de ellas esta por delante de la otra.

Expresiones algebraicas

Es común que se asimilen las locuciones “*expresiones algebraicas*” con *“lenguaje simbólico*”, como si estas dos expresiones fueran sinónimas. Así, cuando el docente solicita que se escriba un problema en términos de ecuaciones, en general, se refiere a esta acción como *“paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico”.* Sin embargo, en el marco teórico de Peirce, las expresiones algebraicas no son símbolos, sino que son iconos. Según Peirce (1895):

> […] una fórmula algebraica es un icono, convertido en tal por las reglas de conmutación, asociación y distribución de los símbolos. Puede parecer a primera vista que llamar icono a una expresión algebraica es una clasificación arbitraria, que podría también, o mejor, considerarse como un signo convencional compuesto. Pero no es así, pues una gran propiedad distintiva del icono es que por su observación directa pueden descubrirse más verdades relativas a su objeto que aquellas que bastan para determinar su construcción. De este modo, por medio de dos fotografías puede trazarse un mapa, etc. Dado un signo convencional u otro signo general de un objeto, para deducir alguna verdad distinta a aquella que significa explícitamente, es necesario, en todos los casos, reemplazar ese signo por un icono. Esa capacidad de revelar la verdad inesperada es precisamente aquello en lo que consiste la utilidad de las fórmulas algebraicas, de modo que el carácter icónico es el que prevalece. (Peirce, 1895, CP 2.279)

Si la expresión algebraica surge de escribir un problema en términos de ecuaciones, cada letra que conforma la misma representa una cantidad concreta, la cual es consecuencia de la convención establecida por quien traduce. Aun, cuando no haya interpretante, cada letra representa una cantidad, puesto cualquier interpretante que no conozca la convención establecida, asignará las letras a las cantidades adecuadas, ya que la expresión algebraica en su conjunto va a requerir que se asigne a cada una la cantidad correspondiente. Los signos +, =, etc., en las expresiones algebraicas, son símbolos en el sentido de Peirce. Resumiendo: 1) La expresión algebraica globalmente considerada es un *icono,* 2) las letras son *índices* y los signos +, =, etc. son *símbolos.*

Conclusiones

Los signos son un instrumento de información, conocimiento, comprensión, de gnosis. La función primera del signo es la de aparecer a la mente como una fuente de interpretación de aquello que expresa. El ámbito de utilidad del signo es la mente, el intelecto; pues la mente puede reconocerlo, discriminarlo, ordenarlo, decodificarlo, tomar información de él y asimilarlo: esto es comprensión, formación de conceptos.

Ante la presencia de un problema, los alumnos no deberían arrojarse de inmediato sobre los símbolos, sino que es deseable que adquieran el hábito de mirar el problema con sentido común, que bosquejen un gráfico o una figura. El docente es quien debe estimular la descripción de lo que ven y el razonar sobre ello. Ante la dificultad de los estudiantes para producir razonamientos informales, es el profesor el responsable de mostrarles cómo esos razonamientos son producidos, y que se puede ganar con ellos. Si el docente no les provee a esas actividades un “sello de aprobación”, entonces en el mejor de los casos el uso espontáneo del sentido común y la búsqueda de significados quedarán relegados a una preferencia mínima.

De lo expuesto anteriormente nacen las siguientes sugerencias para docentes, pretendiendo con ellas facilitar a los estudiantes el acercamiento a la apropiación del significado de los signos matemáticos:

1) Exponer cuándo y cómo los signos pueden y deben ser usados con el objeto de exhibir relaciones, generalidades y demostraciones que de otra manera permanecerían ocultas e invisibles.
2) Presentar actividades para desarrollar la capacidad para '*manipular*' y '*leer a través'* de expresiones simbólicas.
3) Evitar manipulaciones simbólicas automáticas.
4) Mostrar que es posible establecer relaciones simbólicas que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada.
5) Diseñar actividades para desarrollar la capacidad de seleccionar una representación simbólica adecuada al problema.
6) Crear conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la actividad matemática.
7) Realizar actividades que impliquen comparar significados con las intuiciones acerca de los resultados esperados y con la situación misma del problema.
8) Mostrar que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en distintos contextos.

Referencias Bibliográficas

Ávila, R. (1990). La lengua y los hablantes. México: Trillas.
De Lorenzo, J. (1989) Introducción al estilo matemático. Madrid: Tecnos.
Eco, U. (1995). *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Barcelona: Lumen.
Klaus, G. (1969). Semiotik und Erkenntnistheorie [Semiótica y teoría del reconocimiento]. Berlín.
Niño Rojas, V. M. (1998). Los procesos de la comunicación y del lenguaje. Santafé de Bogotá.
Peirce, C. S. (1895). That categorical and hypothetical propositions are one in essence, with some connected matter. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Traducción castellana de Sara F. Barrena. Fuente textual en CP 2.274-308.
Peirce, C. S. 1987. Obra lógico-semiótica. Edición de Armando Sercovich. Madrid: Taurus
Rastier, F. (2005). Semántica Interpretativa. México: Siglo XXI.
Saussure, F. (1945). Curso De Lingüística General. Buenos Aires. Editorial Losada.
Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel &K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design*. Mahwah, NJ: Erlbaum, pp. 37-98).
Skemp, R (1980). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Ediciones
Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. (Tercera edición). Madrid: Morata.

Vergnaud, G. (1983b). Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.)*Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes.* New York: Academic Press Inc.pp. 127-174.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.).*Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1ºSeminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. pp. 1-26.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.)

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique desMathématiques, 10* (23): 133-170.