VALIDACIÓN Y CONTRAEJEMPLO

R. E. D´Andrea, A. Cañibano, P. Sastre Vázquez
Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería. Rosario, Provincia. de Santa Fe.Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs.As. Facultad de Agronomía. Azul, Argentina
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar, pasava2001@yahoo.com.ar, mac@faa.unicen.edu.ar
Nivel Superior. Lenguaje Matemático

Palabras clave: Validación. Proposiciones falsas. Proposiciones verdaderas. Contraejemplo**.**

Resumen
El objetivo de este trabajo es analizar la actitud del estudiante de Ingeniería a la hora de validar proposiciones falsas. A los efectos de estudiar el comportamiento mencionado se diseñó una actividad. La consigna del trabajo, consistió en determinar el valor de verdad de una serie de proposiciones y probar (sostener) tal valor de verdad, en cada caso. Dentro de ése conjunto de proposiciones algunas, resultaban verdaderas y otras falsas. Entre las proposiciones presentadas algunas estaban referidas a un universal infinito y otras a un universal finito. Esto no es un simple detalle, es esencial a la hora del establecimiento de las conclusiones, porque el proceso de validación para proposiciones verdaderas varía según el referencial. La presencia de proposiciones verdaderas fue a los efectos de comparar la actitud del estudiante frente a los dos tipos de proposiciones. Los resultados revelan que al validar los estudiantes actúan de formas muy similares, ya se trate de proposiciones falsas como de proposiciones verdaderas. En ambos casos, los estudiantes sólo son capaces de generar pruebas en las cuales se exhiben aleatoriamente ejemplos con los que se pretende mostrar la validez de las proposiciones.

Introducccíón
El objetivo de este trabajo es analizar la actitud del estudiante de Ingeniería a la hora de validar proposiciones. Debe destacarse que a la hora de validar proposiciones verdaderas opera desde el empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), sustituyendo la ó las variables de la proposición por ejemplos elegidos aleatoriamente, sin criterio alguno. Esto último es esencial para establecer una comparación entre ambas acciones.

El estudiante, frente a la exhibición de un contraejemplo por parte de un docente, ¿No podría considerar que se trata de un caso particular?; ¿Realmente tiene conciencia acerca de la acción que está llevando a cabo?; ¿O procede de manera similar a la validación de proposiciones verdaderas de forma compulsiva y de manera no meditada?

El principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001) describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos. En un primer nivel (o representación inicial), las personas se representan, inicialmente mediante modelos, las posibilidades verdaderas, dejando para hacer explícitas en un momento posterior el resto de la información. Si las personas no suelen representarse lo que es falso, es necesario explicar cómo hacen para imaginar situaciones falsas cuando se les pide. En otro lugar (Santamaría y Espino, 2000) se puede proponer un procedimiento que podría usarse en tales situaciones: el heurístico de negación. Su funcionamiento sería muy simple. Si se le pide a alguien que exprese el caso en que una proposición es falsa, producirá la representación inicial de la situación en que es verdadera y entonces la negará. Como cualquier heurístico, el de negación es adecuado en la mayoría de los casos (de ahí su utilidad).

Se podría citar un ejemplo muy elemental pero representativo: La diferencia entre conjuntos. La reacción usual del estudiante para probar que esta operación no es conmutativa, es pensar en la propiedad de conmutatividad, y generar un ejemplo consistente en dos conjuntos. La idea es que este realizará la diferencia en uno y otro orden para ver finalmente que ambas operaciones ofrecen resultados diferentes. Por ende, la secuencia de razonamiento consiste en pensar primero la conmutatividad y luego efectuar una comparación para ver que la propiedad no se cumple para el ejemplo propuesto.

Es de destacar que el conductor del aprendizaje, debe inducir o guiar al estudiante en la búsqueda de contraejemplos, haciendo notar ésta puede conducir en muchos casos, como podría ocurrir para el ejemplo comentado precedentemente, a situaciones donde la demostración de la validez de la proposición no se alcanzara. Precisamente, este es el momento crucial del proceso de validación de una proposición falsa. Comprender que cuando una proposición en matemática es verdadera en ciertas ocasiones, y en otras no, entonces es falsa. No tiene validez universal.

“Un contraejemplo es un elemento perteneciente al dominio de una determinada afirmación que no verifica lo afirmado.” (Calvo Pesce, 2001, p.49). Balacheff (1990) considera que las consecuencias de la exhibición de un contraejemplo, puede generar diferenciaciones, según que este recaiga sobre la conjetura, la prueba de la falsedad con la utilización del mismo, o sobre los conocimientos o los fundamentos racionales de estos. Manifiesta además que la superación de la contradicción, manifestada propiamente por el contraejemplo, pueda atribuirse a la crítica o al rechazo de este. En base a lo postulado precedentemente, y continuando con el análisis, este autor analiza algunas respuestas que puede tener un estudiante frente a la presentación de un contraejemplo. Encuentra que el estudiante puede presentar algunas de las siguientes actitudes: 1) ninguna reacción, 2) rechazo del contraejemplo, 3) rechazo de la conjetura y 4) modificación de la conjetura. A continuación se describen brevemente cada una de las posibles actitudes descriptas precedentemente.

1) *Ninguna reacción*: El estudiante admite la existencia de excepciones a la regla.
2) *Rechazo del contraejemplo*: Correctamente o no, el ejemplo pierde su carácter refutador por no cumplir ciertas condiciones. En ocasiones estas condiciones son las establecidas en la definición de la estructura conceptual que se presenta y de allí se deriva una provechosa reconsideración de los atributos involucrados en la definición en cuestión.
3) *Rechazo de la conjetura*: esta respuesta, menos usual que lo deseable, cuando es acompañada del análisis de los motivos del fracaso de la conjetura puede dar pistas sobre cómo mejorarla. Por otro lado, también se da esta respuesta en el marco del “empirismo ingenuo” (si un par de ejemplos basta para fundar una conjetura, otro puede refutarla)

4) *Modificación de la conjetura:* que puede ser superficial (para contemplar el contraejemplo) o profunda (para asimilar las razones de fondo de la refutación), pasa en gran parte de los casos por la reducción del dominio de validez de la conjetura mediante la introducción de una condición adicional.

Es de destacar que a veces ocurre que la verdad de ciertas proposiciones queda establecida, en el sentido en que son verdaderas salvo una pequeña cantidad de casos excepcionales, cuya exclusión explícita del dominio de aplicación del resultado lo harían absolutamente verdadero. Esta idea aparece también en la obra *Pruebas y Refutaciones* cuando se habla de "tres tipos de proposiciones: las verdaderas, las falsas sin esperanza y las esperanzadoramente falsas" (Lakatos, 1978, p. 43); este último tipo se puede mejorar convirtiéndolas en verdaderas al añadirles una cláusula que enuncie las excepciones.

Una experiencia con un grupo de estudiantes

A los efectos de estudiar la actitud del estudiante de Ingeniería a la hora de validar proposiciones falsas, se diseñó una actividad. La consigna del trabajo, consistió en determinar el valor de verdad de una serie de proposiciones y probar (sostener) tal valor de verdad, en cada caso. Dentro de ese conjunto de proposiciones algunas, resultaban verdaderas y otras falsas. Entre las proposiciones presentadas algunas estaban referidas a un universal infinito y otras a un universal finito. Esto no es un simple detalle, es esencial a la hora del establecimiento de las conclusiones, porque el proceso de validación para proposiciones verdaderas varía según el referencial. La presencia de proposiciones verdaderas fue a los efectos de comparar la actitud del estudiante frente a los dos tipos de proposiciones. La confección de los ejercicios apuntó a proposiciones falsas, excepto tres. La presencia de las tres verdaderas tenía como objetivo analizar la comparación de la actitud del estudiante frente a los dos tipos.

Entre las proposiciones verdaderas es esencial destacar el universal al que se remitía el cuantificador. Así, el universal de una de ellas resulta un conjunto finito, posible de ser contado físicamente. En los otros dos casos se consideraron conjuntos infinitos: el conjunto de los reales y el conjunto de los enteros. De forma análoga, se consideraron los referenciales de las proposiciones falsas.

Las proposiciones verdaderas propuestas apuntaron a cuestiones simples de probar. En la proposición 3, se podía sostener la verdad de la proposición por la definición de valor absoluto únicamente o su interpretación geométrica. La proposición no requería una prueba con argumentación, ya que se trataba de una consecuencia inmediata de la definición de valor absoluto. La proposición 7. en cambio, requiere una breve argumentación para sostener la verdad de la misma. A continuación se presentan los ejercicios propuestos a los 114 estudiantes que ingresaron a carreras universitarias de Ingeniería de diferentes especialidades, los cuales se encontraban realizando un curso de Cálculo en una variable y otro de correlación horizontal de Álgebra:

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, y luego sostener (probar) en cada caso tal valor de verdad. Considerar para algunos casos que: $B = \{x \in N / 2 \leq x \leq 9\}$

$$1. \forall x \in B: x + 5 < 12; \quad 2. \forall x \in B: x \; es \; primo;$$

$$3. \forall x \in R: |x| \geq 0; \qquad 4. \forall x \in B: x^2 > 1;$$
$$5. \forall x \in B: x \; es \; par; \quad 6. \forall x \in R: x^2 - x < 0; \quad 7. \forall a \in Z: a \; es \; par \; entonces \; a^2 \; es \; par$$

Resultados y discusión

Figura 1

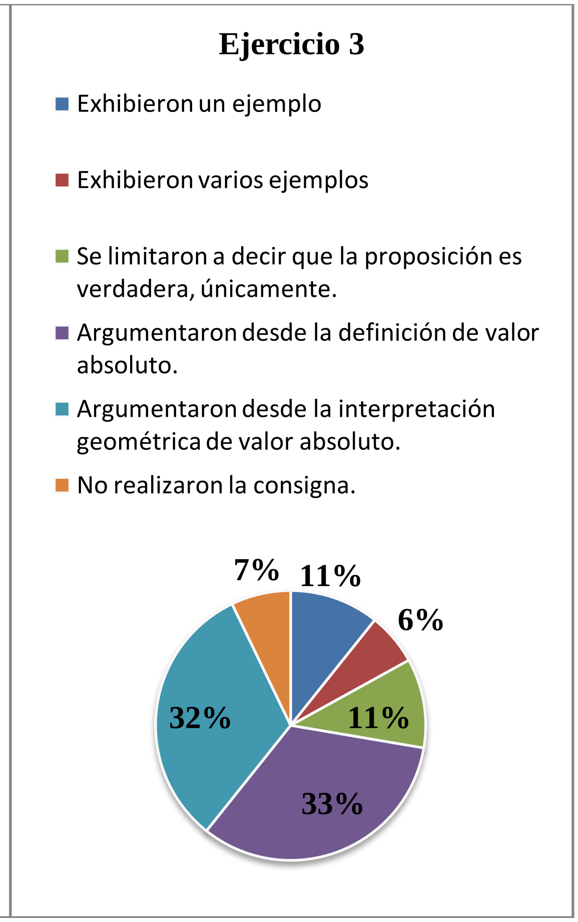

Figura 2

La figura 1 muestra el gráfico correspondiente a los resultados obtenidos por los estudiantes en los ejercicios 1, 2, 5 y 6 . La particularidad de estos ejercicios es que las proposiciones a analizar por los estudiantes eran falsas. Los resultados revelan que el 72% de la población analizada exhibió un ejemplo para sostener la falsedad de la proposición. El 9% exhibió varios ejemplos. Esto puede interpretarse como una acción de inseguridad en la cual el estudiante puede creer ingenuamente que al exponer varios ejemplos, refuerza la verdad o falsedad postulada. El 12% se limitó únicamente a sostener que la proposición es falsa sin realizar acción alguna para sustentarlo. Mientras que el 7% no respondió a la consigna.

La figura 2 muestra el gráfico correspondiente a los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 3. En este caso el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial corresponde al conjunto de los reales. El 65% justificó la verdad, pero no a través de la exhibición de ejemplos. Algunos lo hicieron desde la definición de valor absoluto; otros desde la interpretación geométrica de la misma definición. El 11% procedió según el *empirismo ingenuo*, exhibiendo un ejemplo aleatoriamente sin criterio alguno. El 6

% exhibió varios ejemplos como reforzando con esta acción, el sostén de la verdad. El 11% se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. El 7% no respondió a la consigna.

Figura 3

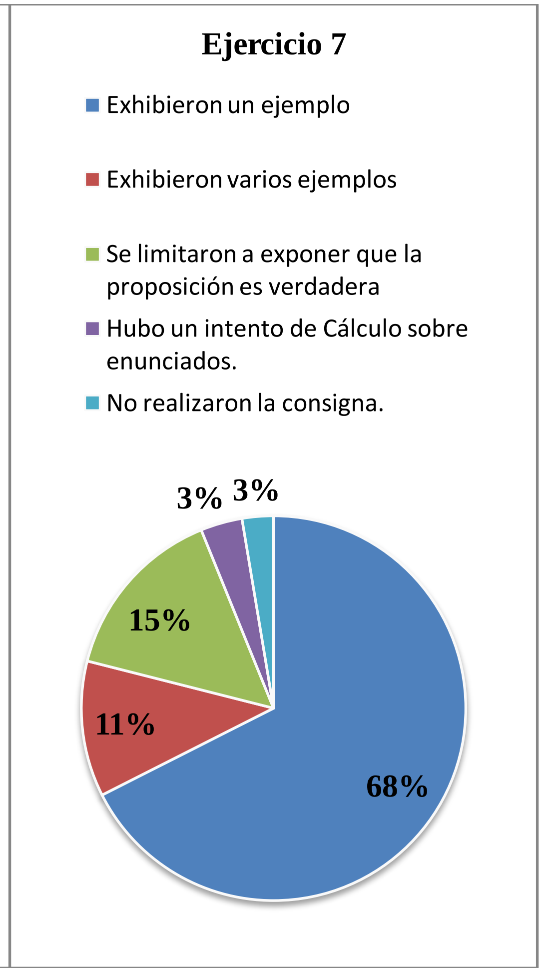

Figura 4

En la figura 3 se presenta el gráfico correspondiente a los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 4. En este ejercicio, el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial corresponde a un conjunto finito posible de ser contado físicamente. El 53% procedió chequeando uno por uno los valores del conjunto B, para sostener la verdad de la proposición. El 11% procedió según el *empirismo ingenuo*. Un porcentaje idéntico, de forma análoga a como hizo con la falsedad, exhibió varios ejemplos como reforzando con esta acción, el sostén de la verdad. El 11%, se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. Mientras que el 6%, sostuvo la verdad justificando coloquialmente, aludiendo a que los elementos del conjunto superaban a 2, por ende su cuadrado superará a la unidad. El 8% no respondió a la consigna.

En la figura 4 se representan los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 7. En este ejercicio, el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial es el conjunto numérico de los enteros. El 68 % procedió según el *empirismo ingenuo* para sostener la verdad de la proposición. El 11% procedió según el *empirismo* *ingenuo* también pero exhibiendo varios ejemplos como en ejercicios anteriores. El 15% se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. El 3 % no respondió a la consigna. El 3% realizó un intento de experimento crucial. Respecto a esto último, Balacheff (2000) postula en su clasificación acerca de los modos de demostrar que puede presentar un estudiante, el denominado experimento crucial. Este describe que se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Conclusiones

A la hora de validar proposiciones falsas, un importante porcentaje de estudiantes exhibió el contraejemplo que prueba la falsedad propuesta. Asimismo, a la hora de validar proposiciones verdaderas, un porcentaje similar también exhibió un ejemplo para probar la validez de la proposición.

Frente a proposiciones verdaderas con un referencial finito posible de ser contado, también en gran medida, los estudiantes supieron como operar analizando la verdad o falsedad de la proposición con cada uno de los elementos del conjunto. Pero frente a proposiciones verdaderas con un referencial infinito, un ínfimo porcentaje supo que el sostén de tal proposición necesitaba de una prueba. Esta reacción fue diferente frente a una proposición verdadera con referencial infinito. Un gran porcentaje supo sostener esa verdad justificando adecuadamente, pero a la hora de tener que sostener con una prueba, el estudiante es posible o no que tenga conciencia de ello pero si la tiene, no sabe cómo abordarlo. Puede hacerlo, si el sostén es una justificación pero no una argumentación.

Resumiendo, el estudiante de Ingeniería a la hora de validar proposiciones falsas, lo hace de la misma forma que frente a proposiciones verdaderas. El estudiante no puede generar una prueba que vaya más allá de una exhibición aleatoria de ejemplos que hagan verdadera a la proposición. La cuestión radica en que aparentemente no dilucida la diferencia entre ambas acciones.

Frente a proposiciones falsas, la reacción es similar, proponen un ejemplo en ciertos casos, o varios y ellos con esta acción saben que es suficiente para establecer la falsedad de una proposición. Desconocen que el constructo utilizado se denomina contraejemplo, pero su acción es la necesaria para sostener tales procesos de validación. Asimismo, es evidente que esta acción, para ellos, es la misma que para validar proposiciones verdaderas, de manera que la acción epistemológica de validación no cambia según la proposición sea verdadera o falsa. Pero la acción descripta precedentemente es equivalente a la que utilizan para validar proposiciones verdaderas. Significa entonces que para ellos la validación pasa simplemente por exhibir ejemplos aleatorios que “encajen” o “funcionen” en el caso de proposiciones verdaderas, o todo lo contrario en el caso de proposiciones falsas.

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente.* Bogotá: Universidad de Los Andes.

Balacheff, N. (1990). Beyond a Psiyological Approach: the Psycology of Mathematics Education. *For the learning of Mathematics*, 10 (3), 2 – 8.

Calvo Pesce, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra, Barcelona.

Johnson–Laird, P.N. (2001). Mental models and deduction. *TRENDS in Cognitive Science*, 5 (10), 434 – 442.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

Santamaría, C. y Espino, O. (2000). Truth and falsity in propositional reasoning: the negation heuristic. En J. A. García-Madruga, N. Carriedo y M. J. González Labra. *Mental Models in reasoning.* Madrid: UNED.