LA TRANSFORMADA Z COMO UNA DISCRETIZACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Juan Carlos Bressan, Ana Ferrazzi de Bressan
bressanjuancarlos22@gmail.com
Niveles terciario y universitario

Palabras clave: Transformadas Z y de Laplace, Delta de Dirac, Distribuciones.

Resumen
Resulta frecuente que en ingeniería, física, química y economía se trabaje con fenómenos que podrían representarse mediante modelos dinámicos continuos, pero que cuando deben ser analizados se efectúa su observación en períodos determinados de duración constante, que los transforman en modelos dinámicos discretos. Mientras que los modelos dinámicos continuos se resuelven con ecuaciones diferenciales, los discretos utilizan ecuaciones en diferencias finitas. Queremos encontrar la relación entre las herramientas que permiten la obtención de las soluciones de las ecuaciones que modelan ambos sistemas dados con condiciones iniciales, determinando la relación entre las transformadas de Laplace y Z, que se utilizan en su resolución.
El objetivo de este trabajo es exhibir una forma de obtener la discretización de la función continua $f(t)$ mediante la introducción de la delta de Dirac, para a partir de ella, definir la serie que permite obtener la función generalizada $\hat{f}(t)$. Así aplicando a $\hat{f}(t)$ la Transformada de Laplace obtenemos la Transformada Z de la sucesión de la función discretizada. A su vez relacionaremos algunas propiedades de la transformada de Laplace con las de la Z, aplicando las de aquélla a $\hat{f}(t)$, o a variantes de la misma. Con esta técnica relacionaremos las propiedades de linealidad, de traslaciones por retroceso y avance, y de las derivadas primeras de ambas transformadas.
Si bien puede presentarse mayor dificultad al probar estas propiedades de la transformada Z a partir de las de Laplace, la utilidad radica en ver el paralelismo entre lo experimental y el cálculo, pues en ambos se discretizan funciones continuas.

Introducción

Resulta frecuente que en ingeniería, física y economía se trabaje con fenómenos que podrían representarse mediante modelos dinámicos continuos pero que cuando deben ser analizados se procede a su observación en períodos determinados de duración constante, que los transforman en modelos dinámicos discretos. Las sucesiones de los valores muestrales de funciones continuas incógnitas, medidos a intervalos constantes de tiempo, generan ecuaciones en diferencias finitas. De allí surge la relación entre los sistemas dinámicos continuos y los discretos y las transformadas de Laplace y Z que se utilizan respectivamente en su resolución cuando se fijan condiciones iniciales.

La dificultad que se presenta para pasar de la transformada de Laplace de una función continua a la Z de una función discreta radica en la necesidad de utilizar la delta de Dirac, que no es función sino una distribución. Sin entrar en la teoría de las distribuciones, veremos los resultados de la delta de Dirac, que nos interesan para este trabajo.

La delta de Dirac

La delta de Dirac resulta fundamental por sus aplicaciones en las áreas de observación de fenómenos y de experimentación. De las funciones causales de fenómenos continuos se toma una sucesión de valores muestrales correspondientes a lecturas que pueden ser al inicio de cada intervalo de duración constante de tiempo. La herramienta que permite la discretización a nivel teórico de la función continua es la delta de Dirac, que a los fines de este trabajo se eligió para inducirla el enfoque del libro de Edwards-Penney. pág. 341-344.

Para obtener la delta de Dirac la función elegida es $h_{a,\varepsilon}(t)$ que en el intervalo $[a\,;a+\varepsilon]$ el área que limita es 1 y que fuera de él la función es nula. Así, si $a \in R$ y $\varepsilon > 0$, tomamos

$$h_{a,\varepsilon}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & si\ t\in[a\,;a+\varepsilon]\\ 0 & si\ \ t\notin[a\,;a+\varepsilon]\end{cases}. \quad (2.1). \quad \text{Luego,} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h_{a,\varepsilon}(t)dt=\int_{a}^{a+\varepsilon} h_{a,\varepsilon}(t)dt=\int_{a}^{a+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,dt=1.$$

Sea ahora cualquier función f continua en $[a\,;a+\varepsilon]$. Por el teorema del valor medio del cálculo integral, existe un $\zeta \in [a\,;a+\varepsilon]$ tal que $\int_{a}^{a+\varepsilon} f(t)\,dt=\varepsilon\ f(\zeta)$. Luego,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} h_{a,\varepsilon}(t)f(t)\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{a+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f(t)\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{a+\varepsilon} f(t)\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\ f(\zeta). \qquad (2.2)$$

En consecuencia, como $\zeta \in [a\,;a+\varepsilon]$ y $\varepsilon \to 0^+$, entonces $\zeta \to a^+$. Puesto que $f(t)$ es continua en $[a\,;a+\varepsilon]$ resulta $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\ f(\zeta)=\underset{\zeta\to a^+}{lím}\ f(\zeta)=f(a)$. Así,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} h_{a,\varepsilon}(t)f(t)\,dt=\underset{\zeta\to a^+}{lím}\ f(\zeta)=f(a). \qquad (2.3)$$

Representaremos el $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} h_{a,\varepsilon}(t)f(t)\,dt$ mediante la integral simbólica $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(t)f(t)\,dt$, donde $\delta_a(t)$ es la llamada *delta de Dirac* en $t=a$, que no es función sino que adquiere sentido por la integral simbólica antes definida. De esta forma definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(t)f(t)\,dt=:\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{a+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f(t)\,dt=f(a). \qquad (2.4)$$

Observemos que por la expresión (2.4), llamada propiedad de filtrado, estamos utilizando que $\underset{t\to a^+}{lím}\ f(t)=f(a)$, es decir, la continuidad por la derecha de $f(t)$ en $t=a$.

La forma utilizada para introducir la delta de Dirac es ventajosa al trabajar con funciones causales y ver las relaciones entre las propiedades de las transformadas de Laplace y Z.

Por otra parte $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} \delta_a(t)f(t)\,dt + \int_{a}^{a^+} \delta_a(t)f(t)\,dt + \int_{a^+}^{+\infty} \delta_a(t)f(t)\,dt$, en donde $\int_{-\infty}^{a} \delta_a(t)f(t)\,dt = \int_{a^+}^{+\infty} \delta_a(t)f(t)\,dt = 0$. Así $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t)f(t)\,dt = \int_{a}^{a^+} \delta_a(t)f(t)\,dt$ (2.5).

En nuestros desarrollos posteriores no se trabajará con intervalos negativos de integración. Luego por (2.5) si $a \geq 0$ y f es continua por la derecha en $t = a$, tendremos que

$$\int_{a}^{a^+} \delta_a(t)f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} \delta_a(t)f(t)\,dt = f(a). \qquad (2.6)$$

Así, si $a \geq 0$ y $g(t) = f(t)\,e^{-st}$, con $f(t)$ continua por la derecha en $t = a$, obtendremos

$$\int_{a}^{a^+} \delta_a(t)\underbrace{f(t)\,e^{-st}}_{g(t)}\,dt = \int_{0}^{+\infty} \delta_a(t)\underbrace{f(t)\,e^{-st}}_{g(t)}\,dt = g(a) = f(a)\,e^{-sa}. \qquad (2.7)$$

Si $a = nT$ con $n \in N \cup \{0\}$, resultan respectivamente de (2.6) y (2.7) las siguientes igualdades que utilizaremos al relacionar la transformada Z con la de Laplace:

$$\int_{nT}^{(nT)^+} \delta_{nT}(t)f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} \delta_{nT}(t)f(t)\,dt = f(nT). \qquad (2.8)$$

$$\int_{nT}^{(nT)^+} \delta_{nT}(t)f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{0}^{+\infty} \delta_{nT}(t)f(t)\,e^{-st}\,dt = f(nT)\,e^{-snT} \qquad (2.9)$$

Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función real causal, seccionalmente continua para $t \geq 0$ y en módulo de orden exponencial. Llamamos operador transformada de Laplace de $f(t)$ a la función que le hace corresponder a f la función $F(s)$, con $s \in C$, definida por la integral impropia

$$L\left[f(t)\right] = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,e^{-st}dt = F(s) \qquad (3.1)$$

Este operador transforma la función *f* con dominio en *t*, generalmente el tiempo, en una función *F*, con dominio de frecuencia s en los complejos.

Recordemos que $f(t)$ será seccionalmente continua, cuando en cada intervalo finito $[a;b]$ sea posible subdividir la función en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales la función sea continua y sus correspondientes límites laterales en los extremos de cada subintervalo sean finitos. Por otra parte, $f(t)$ es en módulo de orden exponencial, si existe $k \in R$ tal que $\underset{t\to+\infty}{lím} \frac{|f(t)|}{e^{kt}} = l \in R$

Por (2.7), la transformada de Laplace de la función generalizada $g(t) = \delta_a(t)f(t)$ es

$$L[g(t)] = L[\delta_a(t)f(t)] = \int_0^{+\infty} \delta_a(t)f(t)\,e^{-st}dt = f(a)\,e^{-sa} = G(s). \qquad (3.2)$$

La introducción de la delta de Dirac en $t = a$, tomando el intervalo $[a; a+\varepsilon]$, nos permite utilizar la expresión integral (3.1) para cualquier función generalizada $g(t)$. Luego, $L[g(t)] = \int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-st}dt$, posibilita relacionar las transformadas Z y de Laplace.

Obtención de la Transformada Z a partir de la Transformada de Laplace

Para una función causal $f(t)$ desconocida, tomamos valores muestrales correspondientes a cada uno de los tiempos equidistantes $t = nT$ con $n \in N \cup \{0\}$, donde T es un valor constante de tiempo y suponemos que f es continua por la derecha para todo $t = nT$. Luego, obtenemos la sucesión $f(0), f(T), f(2T), ..., f(nT),...$ donde $f(nT)$ es el término genérico desconocido de la sucesión. Esta sucesión se denotará $\{x_n\}$ siendo $x_n = f(nT)$.

Sabemos que por definición $Z\{x_n\} =: \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{z^n} = X(z)$. Veremos su relación con la transformada de Laplace. Para aplicar a $\{x_n\} = \{f(nT)\}$ la transformada de Laplace debemos crear una función generalizada, $\hat{f}(t)$, que provenga de las mediciones realizadas de $f(t)$. Por aplicación de la delta de Dirac sabemos, por (2.8) que tomando $a = nT$, es

$$\int_0^{+\infty} \delta_{nT}(t)f(t)\,dt = \int_{nT}^{(nT)^+} \delta_{nT}(t)f(t)\,dt = f(nT) = x_n. \qquad (4.1)$$

Procedemos formalmente para obtener la suma de los términos de $\{x_n\} = \{f(nT)\}$. Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) = \int_{0T}^{(0T)^+} \delta_{0T}(t)f(t)\,dt + \int_{1T}^{(1T)^+} \delta_{1T}(t)f(t)\,dt + ... + \int_{nT}^{(nT)^+} \delta_{nT}(t)f(t)\,dt + ...$$. Luego por (4.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) = \int_0^{+\infty} \delta_{0T}(t)f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \delta_{1T}(t)f(t)\,dt + ... + \int_0^{+\infty} \delta_{nT}(t)f(t)\,dt + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \delta_{nT}(t)f(t)\,dt$$

De esta forma, la suma de los términos de la sucesión $\{x_n\} = \{f(nT)\}$ es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \delta_{nT}(t)f(t)\,dt. \qquad (4.2)$$

Si admitimos formalmente que $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\delta_{nT}(t)f(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nT}(t)f(t)\right]dt$, definiremos $\hat{f}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nT}(t)f(t)$ como la función generalizada que utilizaremos. De este modo,

$$\int_{0}^{+\infty}\hat{f}(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nT}(t)f(t)\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\delta_{nT}(t)f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\,. \qquad (4.3)$$

Aunque con la expresión anterior no tenemos los términos de la sucesión $\{x_n\}$, sin embargo por la integración formal de $\hat{f}(t)$ obtenemos su sumatoria, es decir, la serie generada por esta sucesión.

Ahora, le aplicamos la transformada de Laplace a esta función generalizada $\hat{f}(t)$ y considerando $z=e^{sT}$ resulta:

$$L\left[\hat{f}(t)\right]=\int_{0}^{+\infty}\hat{f}(t)\,e^{-st}dt=\int_{0}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nT}(t)\,f(t)\right]e^{-st}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\delta_{nT}(t)\,f(t)\,e^{-st}dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,e^{-snT}=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{f(nT)}_{x_n}\underbrace{\left(e^{sT}\right)}_{z}^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\;z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}=Z\{x_n\}=Z\{f(nT)\}.$$

De esta forma obtenemos que $L\left[\hat{f}(t)\right]=Z\{f(nT)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}=Z\{x_n\}$. (4.4)

Obtención de propiedades de la transformada Z a partir de las de Laplace

Una forma de relacionar las propiedades de la transformada de Laplace con las correspondientes de la transformada Z es a través de las funciones generalizadas, lo que permite ejemplificar la obtención de las propiedades de una a partir de las de la otra. En todas las relaciones que obtendremos, supondremos f y g funciones causales transformables Laplace.

Linealidad

Consideremos la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace:

Si $\alpha,\beta\in R$, entonces $L\left[\,(\alpha\ f+\beta\ g)(t)\right]=:L\left[\,\alpha\ f(t)+\beta\ g(t)\,\right]=\alpha\ L\left[f(t)\right]+\beta\ L\left[g(t)\right]$.

Si admitimos la validez de esta propiedad para las funciones generalizadas:

$$L\left[\,(\alpha\ f+\beta\ g)^{\wedge}(t)\right]=:L\left[\,\alpha\ \hat{f}(t)+\beta\ \hat{g}(t)\,\right]=\alpha\ L\left[\hat{f}(t)\right]+\beta\ L\left[\hat{g}(t)\right],$$

podemos obtener la propiedad de linealidad de la transformada Z:

Si $\{x_n\}=\{f(nT)\}$ y $\{y_n\}=\{g(nT)\}$, entonces $Z\left[\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}\right]=\alpha\ Z\{x_n\}+\beta\ Z\{y_n\}$.

Para deducir la relación entre las propiedades de linealidad de ambas transformadas recordemos que si $\alpha,\beta\in R$, entonces $\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=:\{\,\alpha\ x_n+\beta\ y_n\}$.

Las siguientes igualdades nos permiten probar la linealidad de la transformada Z, teniendo en cuenta que por (4.4) vale $Z\{(\alpha\ f+\beta\ g)(nT)\}=L[\ (\alpha\ f+\beta\ g)^\wedge(t)\ ]$. Así,

$$Z[\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}]=Z\{\ \alpha\ x_n+\beta\ y_n\}=Z\{\ \alpha\ \ f(nT)+\beta\ g(nT)\}=Z\{(\alpha\ f+\beta\ g)(nT)\ \}=$$
$$=L[\ (\alpha\ f+\beta\ g)^\wedge(t)\ ]=L[\ \alpha\ \hat{f}(t)+\beta\ \hat{g}(t)]=\alpha\ L[\hat{f}(t)]+\beta\ L[\hat{g}(t)]=\alpha\ Z\{x_n\}+\beta\ Z\{y_n\}.$$

De la igualdad entre el primero y último miembros obtenemos la propiedad buscada.

Relación entre el retroceso de t en la función $f(t)$ y el retroceso de n en la sucesión $\{x_n\}=\{f(nT)\}$

Nociones previas para el desarrollo de la relación

Para abordar esta relación utilizaremos las funciones *escalón unitario* en $t=a$, denotada por $U(t-a)$, y la función $g(t)=f(t-a)U(t-a)$, definidas por:

$$U(t-a)=:\begin{cases}0 & si\ \ t<a\\ 1 & si\ \ t\geq a\end{cases} \quad (5.1) \qquad g(t)=f(t-a)U(t-a)=:\begin{cases}0 & si\ \ t<a\\ f(t-a) & si\ \ t\geq a\end{cases} \quad (5.2)$$

Observemos que en (5.2) trasladamos la gráfica de $f(t)$ desde $t=0$ hasta $t=a$, quedando definida con valor nulo para $t<a$ (ver Figura 1). Por otra parte, en $g(t)=f(t-a)U(t-a)$ no podemos interpretar su expresión como un producto de dos funciones ya que $f(t-a)$ puede no existir para $t<a$.

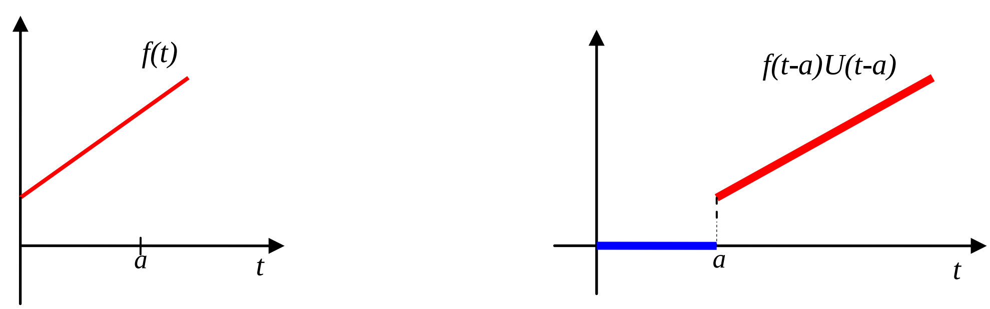


Figura 1: Representación del retroceso de $f(t)$, causado por la función escalón unitario o de Heaviside que define con valor cero los elementos de la imagen anteriores a $t=a$ conservando la forma de la gráfica pero desplazada.

Desarrollo de la relación de retroceso

Consideremos la propiedad de retroceso de la variable t de la transformada de Laplace:

Si $L[f(t)]=F(s)$ y $a\in R,\ \ a>0$, entonces $L[f(t-a)U(t-a)]=e^{-as}F(s)=e^{-as}L[f(t)]$.

Por su aplicación a $\hat{f}$ y $\hat{g}$ obtendremos la propiedad de retroceso de la transformada Z:

Si $\{x_n\}=\{f(nT)\}$ y $n_0\in N$, entonces $Z\{x_{n-n_0}\}=\dfrac{1}{z^{n_0}}Z\{x_n\}$.

Tomaremos en (5.2) la constante $a=n_0T$ obteniendo la función de variable continua:

$g(t) = f(t-n_0T)\,U(t-n_0T) =: \begin{cases} 0 & si \;\; t < n_0T \\ f(t-n_0T) & si \;\; t \geq n_0T \end{cases}$ (5.3), a fin de la aplicación de la transformada de Laplace a $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-n_0T)\,U(t-n_0T)$.

Recordemos que por (4.4) si $y_n = g(nT)$ entonces $L[\hat{g}(t)] = Z\{\hat{g}(nT)\} = Z\{y_n\}$. En este caso discretizamos $g(t)$ tomando en (5.3) $t = nT$ para $n \in N \cup \{0\}$. De esta forma la condición $t < n_0T$ se transforma en $nT < n_0T$, es decir $n < n_0$; análogamente $t \geq n_0T$ se convierte en $n \geq n_0$. Así resulta

$$y_n = g(nT) = f(nT-n_0T)\,U(nT-n_0T) =: \begin{cases} 0 & si \;\; n < n_0 \\ f(nT-n_0T) = x_{n-n_0} & si \;\; n \geq n_0 \end{cases}.$$

La sucesión $\{y_n\}$ así definida se obtiene de la traslación por retroceso en $n = n_0$ de la sucesión $\{x_n\} = \{f(nT)\}$. Esta sucesión $\{y_n\}$, que por abuso de lenguaje se denotará $\{x_{n-n_0}\}$, sufre un retraso de n_0 pasos en relación a la $\{x_n\}$. Por ejemplo, si $n_0 = 3$, $y_0 = y_1 = y_2 = 0$, mientras que $y_3 = x_{3-3} = x_0$, $y_4 = x_{4-3} = x_1$, $y_5 = x_{5-3} = x_2$, ...

Ahora aplicamos la propiedad de retroceso de la transformada de Laplace a la función generalizada $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-n_0T)\,U(t-n_0T)$, obteniendo

$$Z\{x_{n-n_0}\} = Z\{y_n\} = L[\hat{g}(t)] = L\left[\hat{f}(t-n_0T)U(t-n_0T)\right] = e^{-n_0TS}L\left[\hat{f}(t)\right] = \left(e^{ST}\right)^{-n_0} L\left[\hat{f}(t)\right].$$

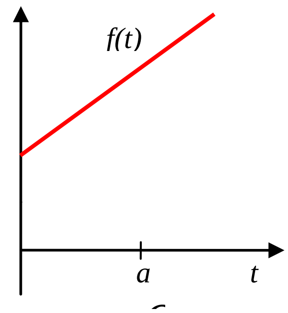
Luego, tomando $z = e^{sT}$, se llega a $Z\{x_{n-n_0}\} = Z\{y_n\} = z^{-n_0}L\left[\hat{f}(t)\right] = \dfrac{1}{z^{n_0}} Z\{x_n\}$. De la igualdad entre el primero y último miembros resulta la propiedad buscada.

Relación entre el avance de t en la función $f(t)$ y el avance de n en la sucesión $\{x_n\} = \{f(nT)\}$

Nociones previas para el desarrollo de la relación

Para abordar esta relación utilizaremos la función

$$h(t) = f(t)U(t-a) =: \begin{cases} 0 & si \;\; t < a \\ f(t) & si \;\; t \geq a \end{cases} \qquad (5.4)$$



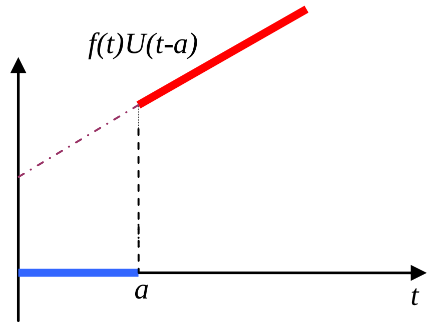


Figura 2: Representación del avance de $f(t)$, causado por el producto con la función de Heaviside, donde se pierde una parte de la gráfica de $f(t)$ que es reemplazada por la recta horizontal $y=0$ para $t \in [0;a)$.

En este caso $f(t)U(t-a)$ tiene sentido de producto para $t \geq 0$. El efecto de la función de Heaviside corta la gráfica de la función en $[0,a)$, anulando los valores de la imagen de $f(t)$ en dicho intervalo y conservando los valores de la imagen de $f(t)$ para $t \geq a$. Este efecto de la función de Heaviside se denomina avance, como exhibe la figura 2.

Desarrollo de la relación de avance

Consideremos la propiedad de avance de la variable *t* de la transformada de Laplace:

Si $a \in R$ y $a > 0$, entonces $L[f(t)U(t-a)] = e^{-as}L[f(t+a)]$. (5.5)

Por su aplicación a $\hat{f}$ obtendremos la propiedad de avance de la transformada Z:

Si $\{x_n\} = \{f(nT)\}$ y $n_0 \in N$, $Z\{x_{n+n_0}\} = z^{n_0}Z\{x_n\} - \left(z^{n_0}x_0 + z^{n_0-1}x_1 + \ldots + z\,x_{n_0-1}\right)$.

Para nuestros fines, despejando de (5.5) resulta: $L[f(t+a)] = e^{as}L[f(t)U(t-a)]$ (5.6)

Si $g(t) = f(t+a)$ y tomamos $a = n_0T$, obtenemos la función que utilizaremos $g(t) = f(t+n_0T)$. A continuación discretizamos en g la variable t haciendo $t = nT$ con $n \in N \cup \{0\}$ y obtenemos: $y_n = g(nT) = f(nT + n_0T) = f((n+n_0)T) = x_{n+n_0}$.

La sucesión $\{y_n\} = \{x_{n+n_0}\}$, se obtiene por el avance de la sucesión $\{x_n\} = \{f(nT)\}$ en $n = n_0$. Esta sucesión $\{y_n\}$ sufre un avance de n_0 pasos en relación a la $\{x_n\}$. Por ejemplo, si $n_0 = 4$, entonces $y_0 = x_{0+4} = x_4$, $y_1 = x_{1+4} = x_5$, $y_2 = x_{2+4} = x_6$ y, en general, $y_n = x_{n+n_0}$.

Ahora, si consideramos $h(t) = f(t)U(t-n_0T)$, al tomar $t = nT$ resultará $v_n = h(nT) = f(nT)U(nT-n_0T)$, de modo que los términos de la sucesión serán $v_0 = x_0 0 = 0$, $v_1 = x_1 0 = 0$, …, $v_{n_0-1} = x_{n_0-1}0 = 0$, $v_{n_0} = x_{n_0}$, $v_{n_0+1} = x_{n_0+1}, \ldots$

Aplicaremos la propiedad de avance (5.6) a la función generalizada $\hat{g}(t)=\hat{f}(t+n_0T)$, obteniendo: $L[\hat{g}(t)]=\underbrace{L\left[\hat{f}(t+n_0T)\right]}_{Z\{x_{n+n_0}\}}=e^{n_0Ts}\underbrace{L\left[\hat{f}(t)U(t-n_0T)\right]}_{Z\{v_n\}}$.

En consecuencia, $Z\{x_{n+n_0}\}=e^{n_0Ts}Z\{v_n\}$. Si $z=e^{TS}$, resulta $Z\{x_{n+n_0}\}=z^{n_0}Z\{v_n\}$. Así,

$$Z\{x_{n+n_0}\}=z^{n_0}Z\{v_n\}=z^{n_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n}{z^n}=z^{n_0}\left[\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{v_n}{z^n}+\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{v_n}{z^n}\right]=z^{n_0}\left[0+\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}\right]$$

En consecuencia, $Z\{x_{n+n_0}\}=z^{n_0}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}$. Para llegar al resultado final conviene expresar el segundo miembro mediante $Z\{x_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}$. Luego, descomponiendo la sumatoria resulta $Z\{x_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}=\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{x_n}{z^n}+\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}$. Luego, $Z\{x_n\}-\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{x_n}{z^n}=\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n}$. Así obtenemos que $Z\{x_{n+n_0}\}=z^{n_0}\left[Z\{x_n\}-\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{x_n}{z^n}\right]=z^{n_0}Z\{x_n\}-\left(z^{n_0}x_0-z^{n_0-1}x_1-\ldots-z\,x_{n_0-1}\right)$.

Derivadas de las Transformadas de Laplace y Z

Consideremos la propiedad de la derivada de la transformada de Laplace:

Si $F(s)=L[f(t)]$ y $g(t)=t\,f(t)$, entonces $\frac{d}{ds}L[f(t)]=-L[g(t)]=-L[t\;f(t)]$.

Por su aplicación a $\hat{f}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nT}(t)f(t)$ y $\hat{g}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nT}(t)g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nT}(t)\left(t\;f(t)\right)$, obtendremos la derivada de la transformada Z: $\frac{d}{dz}Z\{x_n\}=-\frac{1}{z}Z\{\,nx_n\}$.

La derivada de la transformada de Laplace aplicada a $\hat{f}$ afirma que $\frac{d}{ds}L\left[\hat{f}(t)\right]=-L[\hat{g}(t)]$.

Vimos que $Z\{x_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{f(nT)}_{x_n}\underbrace{\left(e^{sT}\right)}_{z}{}^{-n}=L\left[\hat{f}(t)\right]$. Como $z=e^{sT}$ es $\ln z=sT$, y $s=\frac{1}{T}\ln z$, luego $\frac{ds}{dz}=\frac{1}{Tz}$. Así, al efectuar la $\frac{d}{dz}Z\{x_n\}$ tendremos en cuenta que $Z\{x_n\}=L\left[\hat{f}(t)\right]$.depende de z a través de una variable de paso, intermedia, s. Por regla de la cadena llegamos a $\frac{d}{dz}Z\{x_n\}=\frac{d}{dz}L\left[\hat{f}(t)\right]=\frac{ds}{dz}\frac{dL\left[\hat{f}(t)\right]}{ds}=\frac{1}{Tz}\frac{dL\left[\hat{f}(t)\right]}{ds}$. Además por 4.2

$L[\hat{g}(t)] = Z\{g(nT)\} = Z\{nTf(nT)\} = T\,Z\{nf(nT)\} = T\,Z\{nx_n\}$. Luego, resulta la propiedad buscada $\frac{d}{dz}Z\{x_n\} = \frac{1}{Tz}\frac{dL\left[\hat{f}(t)\right]}{ds} = \frac{1}{Tz}\left[-L[\hat{g}(t)]\right] = \frac{1}{Tz}\left[-T\,Z\{nx_n\}\right] = -\frac{1}{z}Z\{nx_n\}$.

Observaciones finales

Creemos que esta presentación permite cumplimentar nuestro objetivo de exhibir la relación conceptual y operativa existente entre ambas transformadas. Para ello se dedujeron algunas de las propiedades de la transformada Z admitiendo la validez, para funciones generalizadas, de las correspondientes propiedades de Laplace. Si bien puede presentarse mayor dificultad al querer probar algunas propiedades de la transformada Z a partir de las correspondientes de las de Laplace, la utilidad radica en ver que la transformada Z proviene de una modificación de la función incógnita $f(t)$ de dominio continuo en el tiempo, por medio de una discretización de la variable independiente t , a través de la función generalizada $\hat{f}(t)$ en la que se utilizó la delta de Dirac, de la que utilizamos sus propiedades sin profundizar en la teoría de las distribuciones.

Referencias Bibliográficas

Eduards, Jr., C. H.; Penney, D. E.(1993). *Ecuaciones diferenciales elementales y Problemas con condiciones de frontera.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Glyn, J. (2002). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. México: Prentice-Hall.

Kreyszig, E. (2000). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. México: Limusa-Wiley.

O´Neil, P. (2004). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Thomson.

San Martín, J., Tomeo, V., Uña, I. (2005). *Métodos matemáticos, Ampliación de matemáticas para ciencias e ingeniería*. Thomson.

Schwartz, L. (1969). *Métodos matemáticos para las ciencias físicas*. Selecciones científicas.

Wunsch, A. (1999). *Variable compleja con aplicaciones*. Pearson Educación.

Zill, D. (1999). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson.