CÁLCULO DE LA DISTANCIA CON GEOMETRÍA ESFÉRICA

Alejandra Cañibano, Patricia Sastre Vázquez, Rodolfo D´Andrea
Facultad de Agronomía. UNCPBA- Argentina; Fac. de Ingeniería y Química- UCA. Argentina
mac@faa.unicen.edu.ar, psastre@faa.unicen.edu.ar, rodolfoeandrea@yahoo.com.ar
Nivel Terciario

Palabras clave: Distancia. Geometría esférica. Geometría no-euclídea. Distancia ortodrómica.

Resumen

Desde siempre, los estudiantes aprenden reglas y símbolos como si éstos estuvieran desprovistos de cualquier sentido o significado referencial y la Matemática sigue siendo no entendida como herramienta útil, ya sea a la hora de aplicarla o a la hora de verla reflejada en hechos cotidianos. Esto conduce a pensar que la principal razón, por la que los alumnos y las personas no aprenden ni han aprendido Matemática, no hay que buscarla en una supuesta dificultad de la misma respecto a su abstracción, sino más bien debido a la forma de enseñanza que se propone, a veces alejada de las situaciones contextuales. Con este trabajo se ha pretendido brindar elementos que sirvan al docente a la hora de mostrar la utilidad de la Matemática, como así también para revelar a los estudiantes que dependiendo del contexto debemos enmarcar nuestra tarea en una u otra geometría.

Introducción

Es evidente que más allá de lo que prescriben los programas de las asignaturas que involucran el concepto de función distancia, también se pone en evidencia la importancia de diferenciar y hacer conocer a los alumnos la matemática aplicada a situaciones concretas y enmarcadas en geometrías no euclídeas. Muchas veces debido a la gran separación existente entre puntos terrestres, es inapropiado realizar los cálculos de la distancia en el marco de la geometría euclidiana, la cual no considera la curvatura terrestre. En este trabajo se analiza la distancia ortodrómica, un concepto importante que se trabaja desde la geometría esférica; un término que se relaciona con la navegación o la astronomía por citar algunas ciencias. En el trabajo se muestra una situación concreta de dos puntos lo necesariamente separados entre sí y el cálculo de la distancia mediante la trigonometría esférica. . El objetivo de este trabajo es brindar elementos que sirvan al docente a la hora de mostrar la utilidad de la Matemática, como así también para revelar a los estudiantes que dependiendo del contexto debemos enmarcar nuestra tarea en una u otra geometría.

Las geometrías

Desde la época en que los antiguos realizaron travesías marítimas hacia otras tierras para realizar las conquistas, se buscó la forma navegar sobre el globo terráqueo (superficie esférica) en el menor tiempo posible, por lo que se necesitaba recorrer la menor distancia. Se conoce que en el plano la menor distancia corresponde a la línea recta (loxodromia); sin embargo, en una esfera no lo es, es la línea curva que une dos puntos cualesquiera, por lo que las distancias se calculan aplicando la trigonometría esférica.

La idea de distancia se puede establecer simplemente como la separación entre dos lugares del espacio o entre dos puntos de un mapa (Bosque Sendra, 2000). En el espacio continuo la distancia se puede expresar como una función matemática que, a partir de los valores de las coordenadas sobre unos ejes perpendiculares (x, y, z) que dan cuenta de la localización de cada punto, obtiene la separación (medida en las mismas unidades de longitud en que están expresados los ejes de coordenadas) que existe entre cada dos puntos o lugares.

En geometría euclidiana, la recta o la línea recta, se extiende en una misma dirección, existe en una sola dimensión y contiene infinitos puntos; está compuesta de infinitos segmentos (el fragmento de línea más corto que une dos puntos).

La geometría euclidiana, geometría que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional, plantea cinco postulados en su sistema:

1. Dados dos puntos se puede trazar una y solo una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.
5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

Si bien esta geometría es ventajosa para solucionar muchos de los problemas de la vida cotidiana de los individuos, la misma no es útil en muchos otros casos. Existen diferentes geometrías no-euclídeas surgidas en general de la supresión del quinto postulado de la geometría euclídea. Así, se llama geometría no euclidiana o no euclídea, a cualquier forma de geometría cuyos postulados y propiedades difieren en algún punto de los establecidos por Euclides en su tratado Elementos.

Si se consideran solamente espacios homogéneos, donde la curvatura del espacio es la misma en cada punto, y en los cuales los puntos del espacio son indistinguibles, se pueden establecer tres tipos de geometrías, (ver Figura 1):

- *La geometría euclidiana* satisface los cinco postulados de Euclides y tiene curvatura cero.
- *La geometría hiperbólica* satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y tiene curvatura negativa.
- *La geometría elíptica* satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y tiene curvatura positiva.

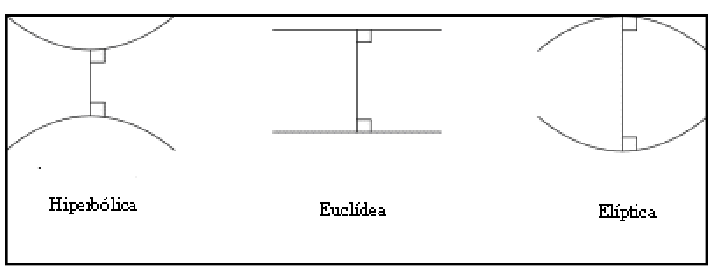


Figura 1

Si se admite la posibilidad de que la curvatura de la geometría varíe de un punto a otro se tiene un caso de geometría *riemanniana general*, como sucede en la teoría de la relatividad general donde la gravedad causa una curvatura no homogénea en el espacio tiempo, siendo mayor la curvatura cerca de las concentraciones de masa, lo cual es percibido como un campo gravitatorio atractivo ("Geometría no-Euclidiana, 2013).

La geometría esférica es el modelo más simple de la geometría elíptica, en la cual una línea no tiene ninguna línea paralela a través de un punto dado. Otro ejemplo es la geometría hiperbólica, en la cual una línea tiene dos paralelas, y un número infinito de ultra-paralelos, a través de un punto dado.

Si se quiere calcular la distancia *exacta* entre dos puntos de la superficie terrestre, hay que tener en cuenta la esfericidad de la tierra, luego, es necesario hacer uso de la geometría esférica y de algunos resultados de la trigonometría esférica.

La *geometría esférica* consiste del estudio de las propiedades de rectas, puntos, segmentos, y todas las figuras geométricas puestas en la superficie de una esfera. La geometría esférica es una geometría diferente a la clásica euclidiana la cual tiene importantes aplicaciones prácticas en la navegación tanto área como náutica, y en la astronomía.

En ella se sustituye el plano por la superficie de una esfera. Los puntos son iguales que en la geometría euclidiana, pero las rectas son los *círculos grandes,* aquellos que pasan por dos puntos opuestos (también se llaman *geodésicas*). La distancia más corta entre dos puntos no es el segmento sino el *arco* de un círculo grande.

Principales conceptos de la geometría esférica

La geometría de la esférica se basa en los conceptos de circunferencias máximas, circunferencias menores y arcos de estas figuras.

Se llama *circunferencia máxima* a la intersección de la esfera con un plano que contiene el centro de dicha esfera. Si el plano que interseca la esfera no contiene al centro, entonces la intersección del plano con la esfera es una *circunferencia menor.*

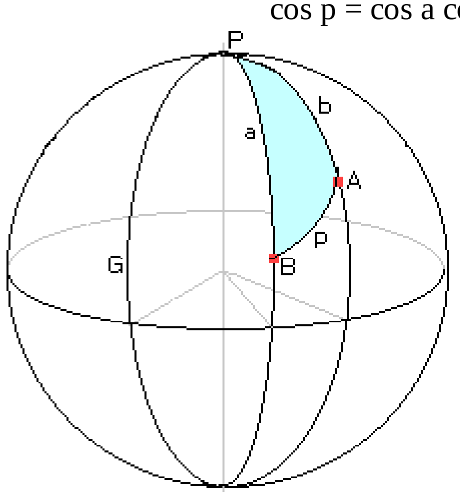
Distancia esférica: Dados dos puntos A y B de la esfera, se denomina distancia esférica entre ambos al menor de los arcos de extremos A y B de la circunferencia máxima obtenida mediante la intersección de la esfera con el plano que contiene al centro de la esfera y a dichos puntos. Si A y B son diametralmente opuestos entonces existirán infinitas circunferencias máximas que pasan por ellos, tomándose en este caso la semicircunferencia como distancia esférica entre ambos puntos. En la esfera el camino más corto para ir del punto A hasta el punto B se llama distancia Ortodrómica u Ortodroma y es igual a la longitud del arco AB sobre este círculo.

Triángulo esférico: está formado por dos segmentos de meridiano y un segmento del ecuador. Como cada meridiano forma un ángulo de 90° con el ecuador, la suma de los ángulos internos de este triángulo es mayor que 180°. Lo mismo se puede decir de todos los triángulos esféricos.

Entre las fórmulas que relacionan los elementos de un triángulo esférico se encuentra el Teorema del Coseno o Primera Fórmula de Bessel. El teorema dice que:

En todo triángulo esférico, ABC se verifica la siguiente relación: "El coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de sus senos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido"

$$\cos p = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos P$$



a = PB = 90° - latitud B (colatitud de B)

b= PA = 90° - latitud A (colatitud de A)

P = latitud B – latitud A

Si bien la *ortodrómica* es el camino más corto entre dos puntos de la superficie terrestre, esta conlleva el inconveniente de presentar un ángulo diferente con cada meridiano, excepto cuando dicha ortodrómica coincide con un meridiano o con el ecuador (Berrocoso, Ramírez, Enríquez-Salamanca y Pérez-Peña, 2003). Esto dificulta la tarea de trazar una ruta de navegación que siga la ortodrómica ya que obligaría a continuos cambios de rumbo. Cuando las distancias son grandes y la economía que supone seguir el camino más corto es significativa, se realiza una aproximación marcando una serie de puntos intermedios en los cuales se cambia de rumbo y entre los que se siguen las correspondientes loxodrómicas (Berrocoso et al. 2003). En general, los aviones no siguen las rutas ortodrómicas sino que deben seguir las rutas definidas por el control aéreo. Por lo tanto, la distancia real que recorren es mayor que la distancia ortodrómica, de un 15% más en los vuelos de medio recorrido y en un 4% en los vuelos de largo recorrido. Esto se refleja en términos de eficiencia energética expresada en litros.

Cuando la distancia entre dos puntos de la esfera es pequeña, la diferencia entre rutas *ortodrómica* y *loxodrómica* es también pequeña, y lo mismo sucede cuando siendo distantes aquellos puntos, se hallan próximos al ecuador o a un mismo meridiano. La diferencia es grande cuando los puntos se hallan en el mismo hemisferio, en latitud elevada y a gran diferencia de longitud, que es el caso típico de la ruta *ortodrómica*.

Distancia ortodrómica entre dos puntos de la superficie terrestre

El sistema de coordenadas geográficas es un sistema de referencia que utiliza las dos coordenadas angulares, latitud (Norte y Sur) y longitud (Este y Oeste) y sirve para determinar los ángulos laterales de la superficie terrestre (o en general de un círculo o un esferoide) ("Coordenadas geográficas", n.f.). Estas dos coordenadas angulares, medidas desde el centro de la Tierra, son de un sistema de coordenadas esféricas que están alineadas con su eje de rotación.

La definición de un sistema de coordenadas geográficas incluye un *datum, meridiano principal y unidad angular*. Estas coordenadas se suelen expresar en grados sexagesimales. La *latitud* mide el ángulo entre cualquier punto y el Ecuador. Las líneas de latitud son los *paralelos* definidos como círculos paralelos al ecuador en la superficie de la Tierra. La latitud es el ángulo que existe entre un punto cualquiera y el Ecuador, ángulo medido sobre el meridiano que pasa por dicho punto Aguilar (1980). La distancia en kilómetros a la que equivale un grado depende de la latitud, a medida que la latitud aumenta disminuyen los kilómetros por grado.

Las líneas de *longitud* son círculos máximos que pasan por los polos y se llaman *meridianos*. Para los meridianos, sabiendo que junto con sus correspondientes antimeridianos se forman circunferencias de 40.007 Km. de longitud, 1º equivale a 111,131 Km.

Como se dijo anteriormente, en la esfera, el camino más corto para ir del punto A hasta el punto B se llama distancia Ortodrómica u Ortodroma y es igual a la longitud del arco AB sobre este círculo (Fig 2). Ese camino representa también una curva continua y diferenciable cuyo vector tangente transportado paralelamente a lo largo de la curva sigue siendo tangente a la misma. Son las líneas más "rectas" posibles dentro de un espacio-tiempo curvado.

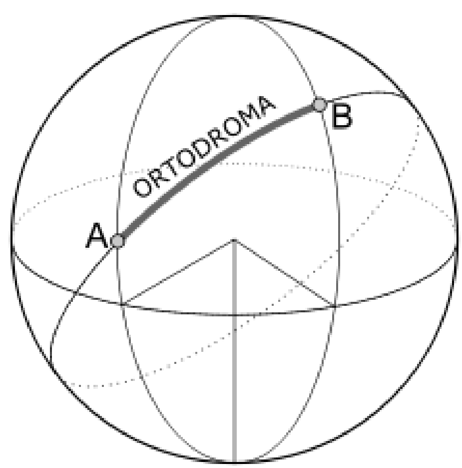


Figura 2

Cálculo de la distancia ortodrómica entre dos puntos de la superfície terrestre

La ortodromia posee tres puntos relevantes que son: el punto de salida (A), el punto de llegada (B) y el vértice que es el punto de mayor latitud, que puede estar dentro o fuera del arco considerado. Los puntos deben estar expresados mediante sus coordenadas geográficas, latitud y longitud y, la latitud puede ser expresada mediante su colatitud. La colatitud es el complemento de la latitud, es decir es el ángulo que forma la vertical del lugar con el eje Norte-Sur, o dicho de otro modo, el arco de meridiano terrestre comprendido entre el lugar y el polo geográfico más próximo. Por lo tanto, latitud + colatitud = 90º.

Entonces, supuestos dos destinos denominados Ay B, por ejemplo (Fig. 3):
(**A**) Buenos Aires: latitud 34° 36´ S (l_A); longitud 58° 22´ W (L_A) **Salida**
(**B**) Gibraltar: latitud 36° 7´ N (l_B); 5° 21´ W (L_B) **Llegada**

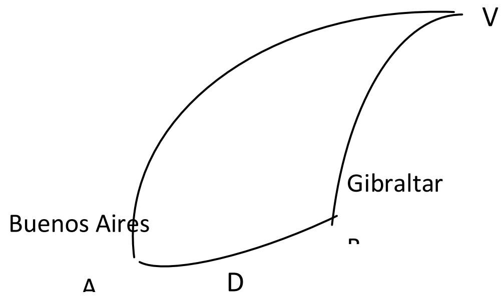


Figura 3

Al aplicar el teorema del coseno, obtendríamos para nuestro ejemplo:

$$\cos D = \cos B \cos A + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A \cos \Delta L$$

D: distancia que se desea conocer
ΔL: incremento de longitud (longitud del punto de salida – longitud del punto de llegada)
Por convención, haciendo uso de las colatitudes se obtiene:

$$\cos D = \operatorname{sen} l_B \cdot \operatorname{sen} l_A + \cos l_B \cdot \cos l_A \cdot \cos \Delta L$$

Otra cuestión a tener en cuenta es la ubicación de los puntos de salida y de llegada. En el primer término $\operatorname{sen} l_B \cdot \operatorname{sen} l_A$ si la ubicación de ambos puntos es Norte – Norte o Sur – Sur el término será positivo; si la ubicación de los puntos es Sur – Norte o Norte – Sur el término será negativo. Respecto al segundo término, $\cos l_B \cdot \cos l_A \cdot \cos \Delta L$ interesa el incremento de longitud ΔL. Si $\Delta L <$ 90° el término será positivo y si es $\Delta L >$ 90° será negativo.

Para este ejemplo el primer término será negativo y para el segundo término habrá que calcular el incremento de longitud ΔL = - 53° 01´
Entonces: $\cos D = \operatorname{sen} 36°7' \cdot \operatorname{sen} 34°36' + \cos 36°7' \cdot \cos 34°36' \cdot \cos(-53°01')$

D= 86,25509849

A este resultado se lo multiplica por 60 y se obtiene la distancia en millas náuticas (utilizadas para la navegación aérea y acuática). La milla náutica, equivalente a 1852 m, es una medida de convención que se estableció para simplificar las conversiones entre ángulos y distancias. Una milla náutica corresponde a un arco de un minuto de grado sobre la superficie terrestre. De ese modo ángulos y distancias en la superficie de la tierra son iguales. Una excepción a esta regla: un minuto de longitud es igual a 1 milla náutica, pero solamente cerca del ecuador

D= 5175,30591 millas náuticas.

Si el resultado se desea en kilómetros se lo multiplica por 1,852 (1 milla náutica = 1,852 km)

$$D = 9584,66 \text{ km}$$

Conclusiones

En la actualidad, debido en gran parte al enorme desarrollo de la tecnología, la enseñanza universitaria debe enfrentar nuevos desafíos. Entre las nuevas exigencias para una adecuada formación universitaria, se destacan el requerimiento social de profesionales que sean competentes en el ámbito nacional e internacional, capaces para hacer frente al proceso de Globalización. Desde el punto de vista pedagógico, surge el replanteo de la necesidad de las matemáticas, sus contenidos y la metodología de enseñanza, para lograr que los estudiantes tengan capacidad creativa, innovada y sean capaces de razonar adecuadamente para hallar la solución de problemas del área de desarrollo que les compete. En este marco, es claro que el proceso de enseñanza aprendizaje, debe adecuarse a la nueva realidad, es decir debe abandonar metodología tradicional, y adoptar otras nuevas, donde el principal actor del proceso sea el estudiante.

Camarena (1984, 1995) sostiene que, para apuntalar conceptos matemáticos en el nivel superior, es necesario presentarlos a los alumnos en diferentes contextos del área de conocimiento de la carrera profesional,

de situaciones de la vida cotidiana y de actividades de la vida laboral y profesional. Así, se debe impulsar un enfoque transdisciplinario de la enseñanza, en el cual el profesor de matemáticas coopera en la comprensión de los fenómenos de la naturaleza y en la resolución de problemas, cada vez mas complejos, que plantea la sociedad.

A pesar que la relevancia de la Matemática en la formación universitaria esta ampliamente reconocida, existe un alejamiento notorio entre los contenidos matemáticos y los de otras asignaturas. Esto conlleva a que los estudiantes muestren poco interés por las aplicaciones, desconociendo el hecho que a partir de estas es posible encontrar la solución a diversos problemas reales. Esto conduce a reflexionar sobre la necesidad de una transformación metodológica de la enseñanza de la matemática. El marco de estas nuevas técnicas y metodologías, debe tener al docente como facilitador que permita el desarrollo de las competencias de los estudiantes.
.

La enseñanza de la Matemática en contexto es adecuada para lograr este objetivo, ya que permite vincular a las matemáticas con las diferentes áreas de conocimiento. En el desarrollo de este trabajo se mostró cómo el profesor puede trabajar con la Matemática en determinado contexto para fomentar la transferencia de conocimientos matemáticos a otras disciplinas.

Referencias Bibliográficas

Aguilar Felix (1980). *Lecciones de Geodesia. Segunda Parte. Nociones de Astronomía Esférica y determinaciones geográficas.* La Plata: CEILP

Bosque Sendra, Joaquín (2000). *Sistemas de Información Geográfica*. Madrid. RIALP

Berrocoso M; Ramírez M.E.; Enríquez-Salamanca J.M.; Pérez-Peña, A. (2003). *Notas y Apuntes de Trigonometría Esférica y Astronomía de Posición.* Laboratorio de Astronomía y Geodesia. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cádiz.

Camarena, G. P. (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena, G. P. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*. Memorias del XXVIII Congreso Nacional Matemática Mexicana. México.

Coordenadas Geográficas. (s.f.). Recuperada Agosto 16, 2012 de http://www.aragon.es /estaticos/GobiernoAragon/Organismos/InstitutoAragonesJuventud/Documentos/B%C3%BAsqueda%20de%20COORDENADAS%20GEOGRAFICAS.pdf

Geometría no-Euclidiana. (2012). Recuperada Agosto 16, 2012 de http://es.cyclopaedia.net/wiki/Geometria-no-Euclidiana-1