

## MATEMÁTICAS DINÁMICAS CON GEOGEBRA

Agustín Carrillo de Albornoz Torres  
Universidad de Córdoba. España  
agustincarrillo@acta.es  
Enseñanza Secundaria. TIC, GeoGebra

### Resumen

Por diversas razones GeoGebra se está convirtiendo en un recurso TIC casi imprescindible en el aula. A las posibilidades que ofrece, hay que añadir su sencillez para comenzar a utilizarlo y sobre todo su continuo desarrollo, que hacen que en cada una de las nuevas versiones que aparecen ofrezca nuevas opciones, que hacen aumentar aún más su potencia y eficacia.

GeoGebra, no es solo geometría dinámica (Geo) o álgebra (Gebra), es mucho más, como queda reflejado en el título de esta conferencia, ya que es un software que permite realizar una nuevas matemáticas apoyadas sobre todo por el dinamismo que ofrece.

El desarrollo de la conferencia estará centrado en ofrecer aplicaciones concretas de la utilización de GeoGebra a los distintos bloques de contenidos de Matemáticas para promover un cambio en la metodología de trabajo en el aula apoyado en el uso de las TIC y sobre todo de este programa que permite otro tipo de matemáticas dinámicas frente a la rigidez de los métodos tradicionales.

GeoGebra además es un programa con la etiqueta de software libre, disponible en distintas versiones, que está incluido en los computadores que los distintos gobiernos están facilitando al alumnado a través de sus planes de incorporación de las TIC al aula.

### Introducción

Poco a poco, estamos aprendiendo a entendernos con las tecnologías de la información y la comunicación, aunque quizás hemos tardado demasiado, no tanto en los ámbitos personales pero si en los educativos, en lograr que sean unas herramientas habituales.

A pesar de todos los esfuerzos institucionales que se están realizando para la incorporación de las TIC a los ámbitos educativos a través de distintos planes como ocurre en España con los proyectos Escuela 2.0, cuyos orígenes se remontan a 2002, o en Argentina con el programa CONECTAR IGUALDAD por el que se están distribuyendo computadores entre el alumnado y también entre el profesorado con el gasto que supone, los resultados no están siendo todo lo buenos que eran de esperar ante las expectativas que en todo momento ha despertado la incorporación de estos recursos.

A pesar del interés del profesorado y de contar con la motivación del alumnado la integración real de las TIC y el aprovechamiento de todas las posibilidades que ofrecen no se está consiguiendo o está siendo demasiado lento y pueden quedar frenados, como ocurrirá en España, por la situación de crisis económica por la que se ha suspendido la entrega de computadores a alumnos y profesores.

El computador con el que llevamos compartiendo horas de trabajo en la casa, no le dedicamos la atención que requiere en el aula, lo que supone no aprovechar las

posibilidades que ofrece para alcanzar una mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de nuestros alumnos.

En general, todo está a favor del cambio para incorporar las TIC al mundo educativo de manera que sea posible rentabilizar el esfuerzo económico, de manera que sea posible mejorar la escuela con nuevos recursos, acordes con la época actual, aunque como docentes debemos reconocer que cualquier cambio nos cuesta y por tanto se produce lentamente.

Si no queremos una escuela anticuada y estática, será necesario incorporar nuevos métodos y procesos, así como nuevos recursos entre los que se encuentran las TIC, sobre todo una vez que las escuelas cuentan con material suficiente para facilitar el acceso del alumnado a los computadores y en la mayoría de los casos, también a Internet.

Siempre es conveniente recordar alguna referencia sobre la importancia que los expertos en didáctica conceden a las TIC, como ocurre al leer los *“Principios y estándares para la educación matemática”* publicada por la NTCM (National Council of Teachers of Mathematics) que entre los seis principios para las matemáticas escolares que proponen, encontramos el *Principio de la tecnología* que considera la tecnología fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje, indicando que *la existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deberían aprender los alumnos, además de cómo aprenderlas mejor.*

Por tanto, queda claro que si las TIC no constituyen un recurso más en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, sobre todo en los denominados centros que cuentan con recursos suficientes, las razones tenemos que buscarlas en nosotros mismos, en el propio profesorado y en el tiempo y esfuerzo que nos cuesta afrontar cualquier cambio.

En los diseños curriculares de Educación Secundaria correspondientes a la provincia de Buenos Aires que he consultado para preparar esta conferencia, aparece una cita de Nicholas Burbules que considero muy a tener en cuenta, en la que dice: *“las nuevas tecnologías son herramientas demasiado valiosas para dejarlas fuera del aula. El imperativo es encontrar la conexión entre aquello que los jóvenes se sienten motivados y aquello que como educadores consideramos que tienen que hacer”.*

Aún más, en los mismos diseños curriculares como último objetivo para los cuatro cursos de Educación Secundaria encontramos: *“Incorporar, distintos grados de complejidad, la enseñanza de la matemática a través de las nuevas tecnologías de la información y de la conectividad (NTICX), a los fines de que sean utilizadas para el desarrollo de preguntas, formulación y tratamiento de problemas, así como para la obtención, procesamiento y comunicación de la información generada.”*

La referencia al uso de las TIC o NTICX se hace patente en el desarrollo de los contenidos y en bastantes ejemplos que en los diseños curriculares aparecen, con continuas referencias al uso de software o de Internet que se incrementan en el apartado correspondiente al *“uso de la calculadora”* en el que podemos leer: *“La calculadora y algún software específico,*

*son herramientas al alcance de los alumnos y de empleo cotidiano en la sociedad. En este Diseño Curricular su uso está presente en todos los ejes y núcleos sintéticos de contenidos ya que permitirá mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas. Al utilizar estas herramientas, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.”*

Algo está ocurriendo para que la convivencia entre TIC y educación no sea del todo llevadera. Demasiadas son las razones que impiden la utilización y por supuesto, la generalización de las TIC en el aula, aunque en este caso, cada vez son menos las de índole material.

Como razones podemos citar dos que consideramos quizás las más importantes: la excesiva dependencia del libro de texto y la formación del profesorado sobre todo en cuestiones didácticas que faciliten el uso de las TIC como recursos para favorecer el aprendizaje del alumnado.

La excesiva dependencia del libro de texto no favorece el cambio de metodología necesaria para incorporar las TIC, por lo que a pesar de los cambios en el currículum y en las ediciones de nuevos libros, el profesorado sigue manteniendo una enseñanza y una metodología tradicional por lo que resulta difícil incorporar nuevos elementos o cambiar determinados aspectos en el trabajo del día a día.

En cuanto a la formación del profesorado no basta con la formación técnica imprescindible para que domine un nuevo recurso o software, es necesaria una formación didáctica que favorezca su utilización y sobre todo que proporcione ideas para permitir que el alumnado aprenda con los nuevos recursos.

Quizás no estemos convencidos de las ventajas que aportan a la enseñanza, quizás a pesar de la variada oferta de formación aún consideramos que necesitamos más cursos o a lo mejor es que nos cuesta demasiado afrontar cualquier cambio en las tareas que día a día realizamos. Si creemos en la tecnología y la usamos a diario para otras tareas, no cabe más que perder el miedo para llevarla también al aula.

Continuando con nuevas referencias al Diseño Curricular de Educación Secundaria de la provincia de Buenos Aires que supongo que en sus aspectos generales tendrán bastantes coincidencias con los del resto de provincias, como ocurre en España con los diseños de las distintas comunidades autónomas, entre los objetivos de enseñanza aparecen, entre otros, los siguientes:

- *Promover el trabajo autónomo de los alumnos.*
- *Estimular el establecimiento, comprobación y validación de hipótesis por parte de los estudiantes, mediante el uso de las herramientas matemáticas pertinentes.*
- *Promover el trabajo personal y grupal, valorando los aportes individuales y colectivos para la construcción del conocimiento matemático.*

Para alcanzar estos tres objetivos considero que las TIC constituyen un excelente recurso y programas como GeoGebra facilitarán el trabajo del profesor para hacer una matemática diferente, sobre todo más dinámica.

Sin despreciar las posibilidades que pueden ofrecer otros programas, GeoGebra ha supuesto una revolución importante, por las posibilidades que ofrece y porque está en continuo desarrollo, añadiendo nuevas opciones gracias al trabajo desinteresado de muchos usuarios, a lo que tenemos que añadir otra característica importante, la de ser software libre y por tanto gratuito para cualquier usuario.

### **GeoGebra para una matemática más dinámica**

GeoGebra es GEOMETRÍA y ÁLGEBRA aunque debido a los avances del programa, en los últimos años, las nuevas versiones ofrecen opciones para trabajar cualquier contenido los distintos bloques de las Matemáticas, especialmente en niveles educativos de Educación Secundaria y Bachillerato, sin olvidar los niveles inferiores ya que incluso existe una versión específica para Educación Primaria.

A la sencillez que ofrece GeoGebra se unen otras características importantes, entre las que se encuentra que es un software libre, lo que facilita su descarga e instalación en cualquier computador(<http://www.geogebra.org>), su continua evolución con nuevas versiones o con cambios casi diarios gracias al trabajo de los numerosos usuarios con los que cuenta en todo el mundo.

Además, desde su Web es posible descargar el programa para su instalación bajo distintos sistemas operativos, incluidas versiones denominadas portables, que como su nombre indica se podrán llevar en un pendrive y por tanto, ejecutar sin necesidad de instalación.

Aunque es evidente que GeoGebra no tiene la exclusividad como programa para la enseñanza, ofrece una gran variedad de opciones que permiten su uso, no solo para dibujar o construir, sino también, como veremos a través de algunos ejemplos, permitirá proponer al alumnado tareas de investigación y experimentación, que en la mayoría de los casos no requerirán demasiados conocimientos técnicos; bastará con conocer algunas herramientas básicas y algunos comandos para afrontar distintas tareas con este software.

Para los entusiastas de este programa, GeoGebra representa una importante revolución que con el tiempo lo convertirá en una herramienta que ofrecerá los recursos necesarios para trabajar todos los bloques de contenidos y por tanto, no será necesario recurrir a otros programas de geometría, otros de cálculo simbólico, a una hoja de cálculo y otros de estadística, ya que todos estarán integrados en GeoGebra o al menos dispondremos de las opciones necesarias para no echarlos de menos.

Expondré a continuación algunas actividades con diferentes niveles de dificultad, aunque siempre buscando la sencillez, para que cada profesor en su utilización pueda llegar hasta donde considere oportuno.

Estas actividades intentan ofrecer una idea de lo que es posible hacer con GeoGebra, con la seguridad de que ustedes con sus conocimientos e imaginación serán capaces de realizar grandes construcciones y sobre todo aprovechar en su aula las posibilidades de este programa como recurso TIC para trabajar las matemáticas de otra forma y con otra metodología, al menos más dinámica. En ocasiones, cuando se afronta la incorporación de las TIC al aula se recurre a Internet para encontrar ideas o propuestas que ayuden ante este reto.

Al buscar estas actividades o ejemplos realizados con GeoGebra y publicados por otros profesores, encontraremos una gran variedad (actividades con GeoGebra hay alrededor de 102.000 y las páginas sobre GeoGebra alcanzan un total de 2.640.000), de las que unas nos resultarán demasiado simples y otras, la mayoría nos llamarán la atención por su espectacularidad, lo cual nos llevará a utilizarlas cuanto antes en nuestro aula.

471

Posiblemente, después de varios intentos con este tipo de actividades, nos plantearemos que han aprendido nuestros alumnos y poco tiempo después, terminaremos valorando si ha merecido la pena este esfuerzo y en la mayoría de los casos abandonaremos la idea de trabajar con las TIC al menos por el momento. Pensemos que al incorporar cualquier recurso sin una programación previa, lo que hacemos es improvisar, lo que nos llevará a no alcanzar los objetivos planteados.

Es evidente que ante la incorporación de un recurso TIC como es el caso de GeoGebra se requiere una formación técnica para las que en ocasiones bastará con participar en algún curso de formación que ayude a dar los primeros pasos. No es conveniente abusar de la formación técnica obviando la formación pedagógica que es la realmente importante ya que será la que permita al docente aprovechar los recursos y sacar todo el partido posible para que sus alumnos aprendan.

Por tanto, formación técnica sí, pero solo la justa y necesaria para iniciarnos en el uso de GeoGebra (o de cualquier otro recurso) y sobre todo no improvisar, planteando distintas sesiones de trabajo con propuestas y actividades sencillas que ayuden no solo al profesor, sino también al alumnado a familiarizarse con el programa y que faciliten que poco a poco sea posible enfrentarse a nuevos retos.

Este planteamiento no supone olvidarnos de las estupendas actividades disponibles en Internet, todo lo contrario, sabemos que están allí y que en su momento las podremos utilizar.

Pensemos que si comenzamos planteando actividades que requieren demasiados conocimientos previos entre ellos, muchos comandos o instrucciones, los alumnos dedicarán todos sus esfuerzos a la parte técnica y por tanto, el aprendizaje de los contenidos planteados será mínimo. Siguiendo lo indicado con anterioridad, comenzaremos con actividades sencillas para las que la formación técnica sea mínima.

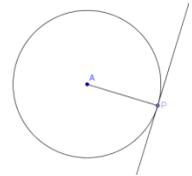
Por ejemplo, al comenzar a trabajar en el aula bastaría con indicar en una primera sesión que vamos a utilizar un programa de geometría en el plano, en el que a partir de unos

objetos básico (punto, segmento, recta, circunferencia, polígono, etc.) se podrán establecer relaciones entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, pertenece, ...), destacando el significado del dinamismo de la construcción, lo que significa que al cambiar las condiciones iniciales de los objetos que intervienen se mantienen las relaciones existentes entre ellos, siempre que la construcción sea correcta.

Un primer ejemplo que ayudará a conocer algunas instrucciones de programa puede ser la construcción de la recta tangente a una circunferencia por un punto de ella. Una vez dibujados los objetos iniciales (circunferencia y punto sobre ella) tendremos dos opciones.

Por un lado, utilizar la herramienta Tangentes que dibujará directamente la recta buscada y por otro, quizás más didáctica, la que permite establecer alguna relación matemática o propiedad geométrica que cumple la recta tangente como es que es una recta perpendicular al radio que pasa por el punto en el que se desea trazar.

Si la construcción se realiza a través de la primera opción, el proceso sería al contrario, primero construirla y posteriormente intentar averiguar la relación existente entre los objetos.



Conociendo pocas herramientas será posible plantear pequeñas investigaciones, pero no por ello menos interesantes, como la siguiente.

### Actividad

*Dibuja un punto A en el plano e intenta averiguar cuántas circunferencias puedes construir que pasen por A.*

*A continuación, dibuja un nuevo punto B para responder a la cuestión siguiente ¿cuántas circunferencias pasan por A y B?*

*¿Cómo la has construido? ¿Hay más de una, ¿tienen alguna característica común?*

*Ahora un poco más complicado, dibuja un nuevo punto C para determinar cuántas circunferencias pasan a la vez por A, B y C.*

*Y si en lugar de tres puntos, incluimos un nuevo punto D, ¿cuántas circunferencias se pueden construir que pasen por los cuatro puntos?*

Cuando comenzamos el trabajo con GeoGebra, sobre todo en un curso de formación para el profesorado me gusta plantear la siguiente actividad para valorar la ventajas que ofrecen las TIC frente a los métodos tradicionales como puede ser la pizarra.

### Actividad

*Dibuja un triángulo ABC y construye la circunferencia circunscrita.*

*Una vez construida la circunferencia circunscrita investiga las cuestiones siguientes: ¿Qué condiciones o qué tipo de triángulo hará que el circuncentro sea un punto interior del triángulo?*

*¿Cuándo será un punto exterior?*

*¿Y cuándo el circuncentro será un punto del perímetro del triángulo?*

*¿Hay algún triángulo en el que el circuncentro coincide con uno de los vértices?*

Después de la circunferencia circunscrita a un triángulo vendría la construcción de la circunferencia inscrita. Esta actividad es ideal para que los usuarios, en este caso nuestros alumnos, comprendan el significado de construir frente a dibujar.

Poco a poco hemos utilizado distintas herramientas de GeoGebra, en la mayoría de los casos sin excesivas necesidades técnicas ya que cada herramienta se emplea de manera similar a como se haría cuando se utiliza una regla y un compás, lo que hace que su uso sea intuitivo.

Continuando con las construcciones geométricas podemos proponer una nueva actividad de investigación, similar, al menos en parte, a la que podemos encontrar en su Diseño Curricular para el tercer año de Educación Secundaria al que he hecho referencia en varias ocasiones.

**Actividad**

*En un triángulo ABC construye los cuatro puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.*

*En cualquier triángulo se cumple que tres de los puntos anteriores están alineados, es decir están sobre una misma recta que se denomina recta de Euler.*

*Aprovechando las posibilidades de movimiento que GeoGebra ofrece intenta averiguar qué puntos son los que están alineados.*

*Intenta averiguar si los cuatro puntos notables pueden estar alineados. ¿Qué condiciones son necesarias para que esto ocurra?*

*De los cuatro puntos hay algunos que siempre están dentro del triángulo sea cual sea éste. Indica cuáles son.*

*¿Es posible que alguno de los puntos notables pueda estar situado sobre un lado del triángulo? Describe cuando ocurre y bajo qué condiciones.*

*Y con un vértice ¿puede coincidir alguno de los puntos notables? Indica de qué punto o puntos se trata y describe si hay alguna relación con el tipo de triángulo dibujado.*

*Describe qué ocurre cuando la recta de Euler pasa por un vértice.*

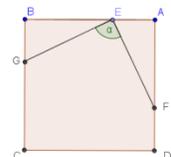
*¿Pueden coincidir los cuatro puntos notables? ¿Qué ocurre en este caso en el triángulo?*

En esta actividad, a partir de construcciones no muy complicadas se obtendrán los puntos notables del triángulo (circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro) y ya solo quedará manipular los objetos, en este caso, los vértices del triángulo, para observar lo que ocurre de manera que se pueda dar respuesta a las cuestiones planteadas.

En la siguiente actividad que encontramos en los Diseños Curriculares correspondientes al 3er año podemos aprovechar GeoGebra para lograr que el alumno se convenza de los resultados que previamente se habrán obtenido de manera analítica para los que la manipulación de la figura resultará esencial.

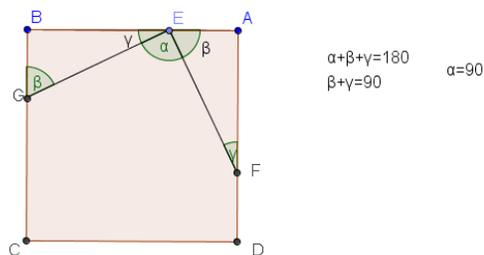
**Actividad**

*En la siguiente figura se tiene como datos que ABCD es un cuadrado, que los segmentos BE y AF, BG y EA son congruentes.*



Con estos datos encuentre argumentos que permitan asegurar que el ángulo indicado es recto.

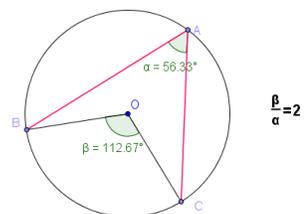
Para nosotros, la deducción del resultado es evidentemente fácil tal y como aparece en la siguiente figura:



La manipulación de la figura y la ventaja para el alumno de ver lo que quiere demostrar le convencerá mucho más que el simple resultado que ha podido obtener de manera analítica.

En determinados contenidos que se desarrollan en el aula estableceremos relaciones que evidentemente, por el nivel del alumnado, no demostraremos. Para este tipo de situaciones GeoGebra será de gran ayuda ya que la manipulación de una construcción permite deducir, que no demostrar, propiedades y relaciones geométricas.

Pensemos, por ejemplo, lo que tradicionalmente hacemos al establecer la relación entre ángulo inscrito y ángulo central en una circunferencia. Con pocos pasos, construiremos los dos ángulos y, aprovechando las opciones que GeoGebra ofrece para medir, fácilmente se establecerá la relación entre los dos ángulos.



Aunque la calculadora no la encontramos como herramienta en GeoGebra no significa que no exista, ya que bastará con realizar todos los cálculos necesarios a través de la línea de comandos, como hemos realizado en el ejemplo anterior con las medidas de los ángulos.

Entrada:

Objetos Libres

- B<sub>1</sub> = (1.06, 1.56)
- O = (3.32, -0.04)

Objetos Dependientes

- A = (4.94, 2.2)
- B = (0.58, -0.47)
- C = (4.77, -2.4)
- a = 5.11
- b = 4.61
- c: (x - 3.32)<sup>2</sup> + (y + 0.04)<sup>2</sup> = 7.67
- d = 2.77
- e = 2.77
- f = 2
- alpha = 56.33°
- beta = 112.67°

Aprovechando las opciones anteriores, podemos plantear nuevas investigaciones sobre los contenidos que acabamos de exponer.

**Actividad**

En la figura siguiente podrás observar una circunferencia y dos cuerdas AB y CD iguales.

A continuación:

Traza los radios OA, OB, OC y OD.

Mide los ángulos AOB y COD.

Deduce la relación existente entre los ángulos centrales que corresponden a dos cuerdas iguales.

Dibuja una circunferencia y dos cuerdas AB y CD que no sean paralelas y que tengan distinta longitud.

Dibuja a continuación las rectas perpendiculares a cada una de las cuerdas por el centro de la circunferencia.

Contesta las cuestiones siguientes:

¿Qué tipo de triángulos son AOB y COD?

¿Qué representa la perpendicular anterior en cada uno de los triángulos?

¿Por dónde pasa la perpendicular anterior con respecto a cada una de las bases?

Completa la propiedad siguiente:

La perpendicular por el centro de una circunferencia, trazada a una cuerda, divide a la cuerda en \_\_\_\_\_.

Algo similar ocurre cuando deducimos o exponemos otras relaciones, como por ejemplo las fórmulas de las áreas de algunas figuras planas. En ocasiones, nos limitamos a dar por cierta la expresión sin apenas dedicar tiempo a su justificación.

Por ejemplo, decimos “*el área de un paralelogramo es igual al área del rectángulo de igual base y altura*” y poco más. Si aprovechamos GeoGebra podemos realizar una construcción dinámica que nos permita mover el triángulo de un lado para llevarlo al otro, de manera que transformemos el paralelogramo en un rectángulo de igual área.



Intentad hacer lo mismo con el área de un triángulo para relacionarla con el área del paralelogramo construido sobre él.

Actividades similares a las expuestas anteriormente podemos encontrar en la Web elaborada por Manuel Sada cuya dirección es:

<http://docentes.educacion.navarra.es/msada/all/geogebra/areas.htm>

**Áreas de polígonos:**  
Figuras interactivas para deducir cómo calcular áreas.

	<a href="#">Rectángulo</a>		Triángulo: <a href="#">Figura 1</a> / <a href="#">Figura 2</a>
	<a href="#">Cuadrado</a>		Trapecio: <a href="#">Figura 1</a> / <a href="#">Figura 2</a>
	<a href="#">Rombo</a>		Polígonos regulares: <a href="#">octógono</a> , <a href="#">hexágono</a> , <a href="#">pentágono</a> <a href="#">...muchos polígonos regulares</a>
	<a href="#">Romboide</a>		Círculo: <a href="#">Figura 1</a> / <a href="#">Figura 2</a> / <a href="#">Figura 3</a> <a href="#">Circunferencia (longitud)</a>

Otro tipo de actividades que podemos realizar con GeoGebra son aquellas que permiten acercarnos a la realidad, incorporando a las construcciones imágenes de la vida cotidiana, planos, fotografías, etc., para trabajar sobre ellas.

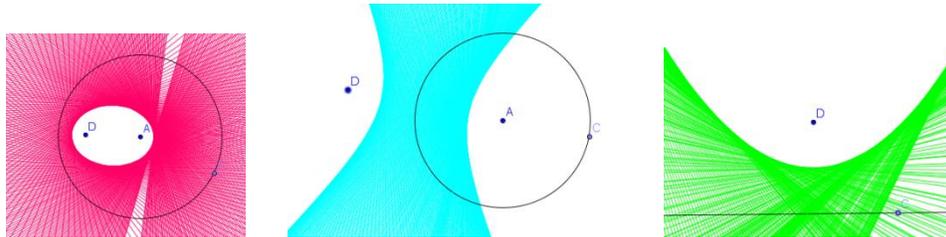
Ejemplos de actividades de este tipo podrían ser medir recintos, establecer recorridos por una ciudad o estudiar simetrías, entre otros.

**Actividad**

*Aprovechando los mapas y planos de Google, intenta obtener la superficie de la plaza que seguro reconoces.*



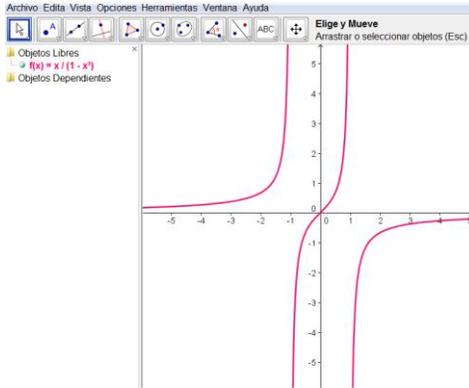
Son muchas las actividades de geometría que podrán realizarse con ayuda de este programa, aunque como no se trata de impartir un curso sobre GeoGebra, solo he intentado ofrecer algunas ideas, entre las que no quiero olvidarme de las opciones para la construcción de lugares geométricos así como las posibilidades de animación que al menos nos servirán para construir y animar la construcción de las distintas cónicas, siguiendo el procedimiento de pliegues (Diseño Curricular 5º año Educación Secundaria)



Dejamos las construcciones geométricas para exponer algunas actividades que permitirán desarrollar contenidos de análisis o de álgebra. Una primera aplicación que podemos dar a GeoGebra será como graficador de funciones.

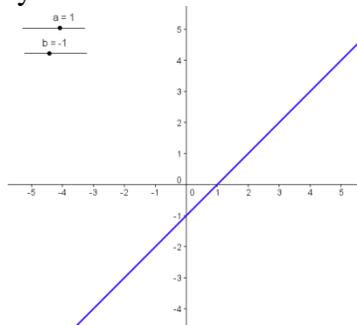
Para obtener la representación gráfica de una función solo hay que introducir su expresión en la línea de comandos.



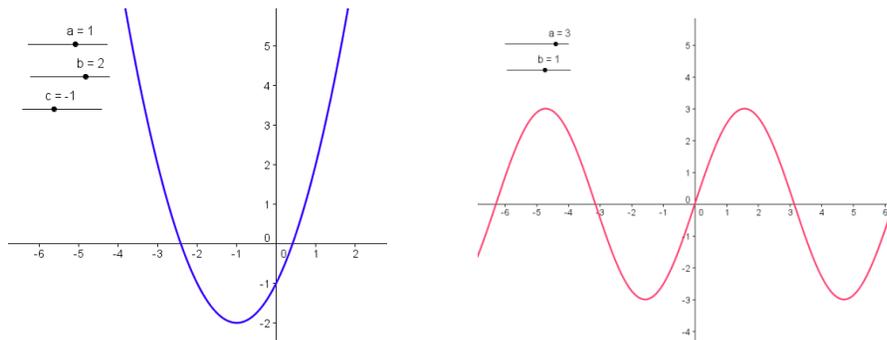


Aprovechando las posibilidades que ofrece la representación de funciones y la herramienta deslizador (crea una variable que tomará valores en un intervalo) se harán realidad construcciones en las que a partir de una función genérica se estudiará el significado de los coeficientes.

Por ejemplo, con pocos pasos representaremos la función afín  $y = a x + b$  para estudiar el significado de los coeficientes  $a$  y  $b$ .

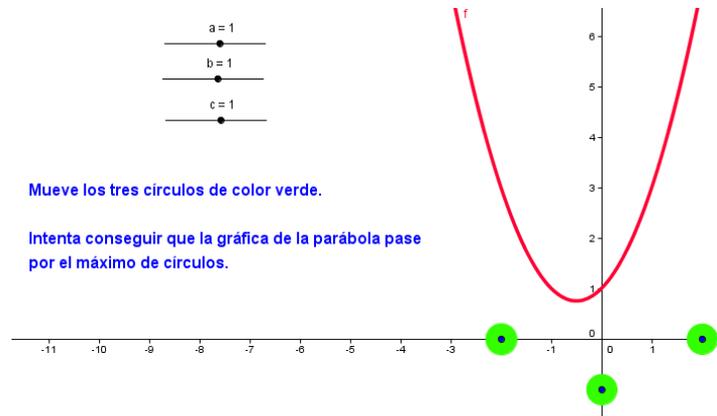


De manera similar y como he comprobado, con pocos pasos, en el ejemplo anterior, solo se han realizado tres acciones, se realizarán construcciones para estudiar otras familias de funciones.



Estas opciones nos facilitan proponer nuevos retos a través de actividades como la siguiente:

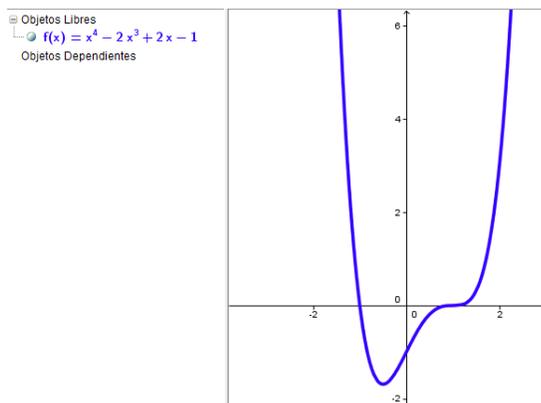
**Actividad**



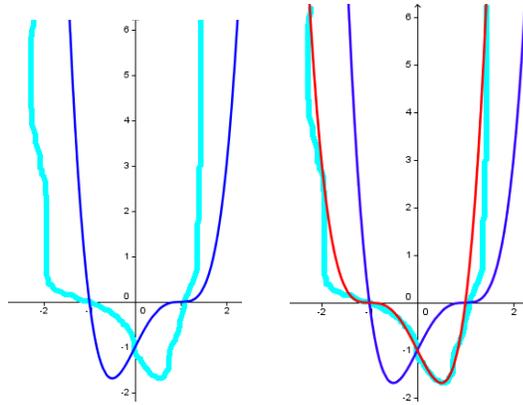
En los Diseños Curriculares a lo que en varias ocasiones me he referido, en el eje correspondiente a álgebra y estudio de funciones para el 4º año, pregunta a partir de varios ejemplos de funciones cuya gráfica aparece dibujada, ¿cuál será la representación de las funciones  $f(-x)$ ,  $f(x+1)$ ,  $f(x)+1$  o  $-f(x)$  entre otras?

Sin quitar el protagonismo que el lápiz y el papel tienen, GeoGebra ofrece otras posibilidades a las que se puede añadir algo más de motivación con el uso de las TIC.

Podemos afrontar este tipo de actividades representando una función, lo cual no es complicado en GeoGebra ya que bastará con escribir su ley de formación en la línea de entrada. Por tanto, apenas necesitamos conocer comandos del programa para lograr este primer paso.



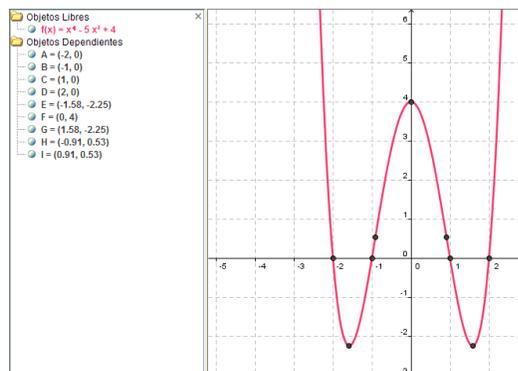
Una vez dibujada la función  $f(x)$ , pedimos a nuestros alumnos que utilicen la herramienta lápiz  para intentar dibujar el trazo de la función  $f(-x)$ , para posteriormente comprobar el resultado.



En este tipo de actividades es necesario convencer a los alumnos para que no hagan trampa ya que como hemos comprobado la función  $f(-x)$  se obtiene sin más que introducir dicha expresión en la línea de entrada.

Aunque es de esperar que las posibilidades de GeoGebra se ampliarán con las nuevas versiones, en breve será definitiva la versión 4.2 que incluye opciones para CAS, por ahora nos debemos conformar con el uso de algunos comandos para aplicarlos solo sobre funciones polinómicas de manera que sea posible determinar sus elementos característicos.

El uso de estos comandos es intuitivo, al igual que todo en GeoGebra, sobre todo en los aspectos relacionados con su sintaxis. Creo que nos resultará fácil determinar la acción que realizarán comandos como **Raíz**, **Extremo** o **PuntoInflexión**.



Para aplicar estos comandos podemos proponer actividades como la siguiente:

### Actividad

*La altura de un proyectil en función del tiempo está representada por la función:*

$$h(t) = -t^2 + 20t + 300$$

*(altura en metros,  $t$  en segundos)*

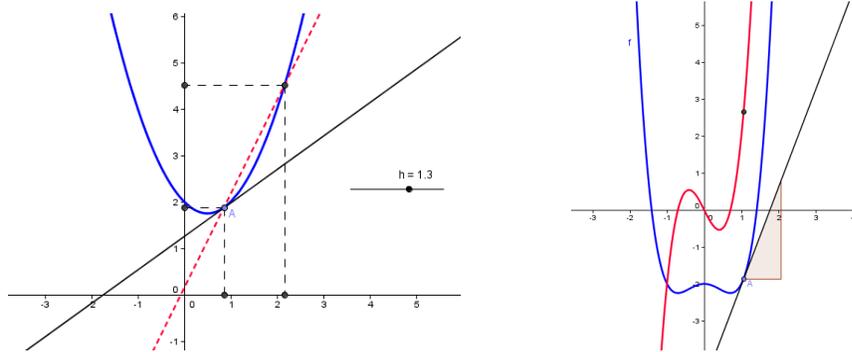
*Determina:*

1. *La altura desde la que se ha lanzado el proyectil.*
2. *La altura máxima que alcanza.*
3. *El tiempo que el proyectil está por encima de 175 m.*

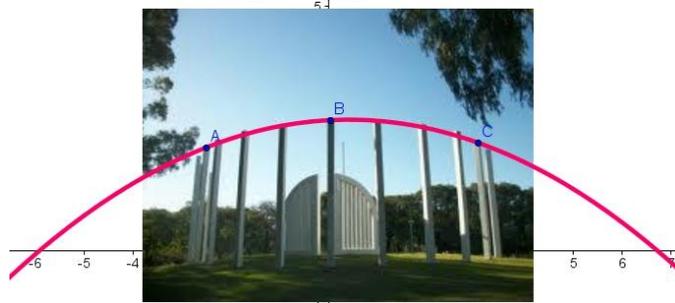
Casi sin ayuda, seremos capaces de obtener la función derivada, utilizando el comando adecuado.

Efectivamente, el comando es **Derivada** que devolverá no solo la expresión de la función derivada sino que además la representará gráficamente y **Derivada[f(x),n]** realizará la misma acción para la derivada de orden  $n$  de  $f(x)$ .

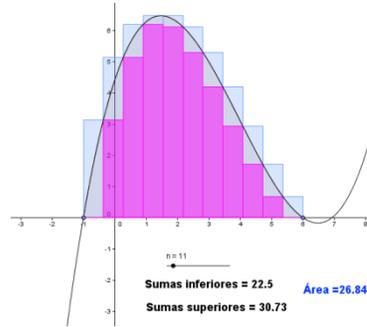
Combinando distintos elementos expuestos anteriormente podemos realizar una construcción para facilitar que el alumnado adquiera un concepto que puede resultar complicado como es la interpretación del significado del valor de la derivada en un punto como límite de las secantes o como valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto.



Además, tendremos la opción de recurrir a imágenes de la realidad para proponer investigaciones para encontrar curvas que las ajusten.



Para finalizar este bloque de actividades quisiera citar las posibilidades que ofrecen los comandos disponibles para el cálculo de integrales definidas y por tanto, para el cálculo de áreas que es de esperar que se amplíen también a integrales indefinidas en la nueva versión que incorpora CAS, así como las opciones que permiten representar las sumas inferiores y superiores que seguro serán de ayuda, al menos para facilitar la construcción y por supuesto para que resulte más sencillo la comprensión de los conceptos.

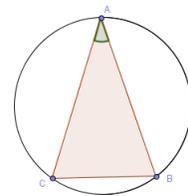


Si intentamos combinar algunos de los ejemplos anteriores, podemos afrontar nuevas investigaciones para las que las distintas opciones que ofrece GeoGebra pueden ser de gran ayuda.

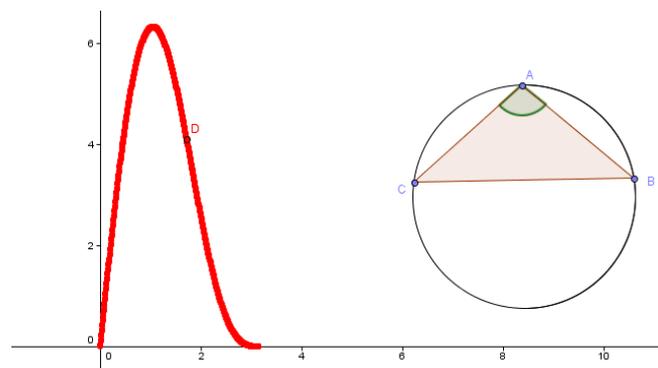
Recurriendo de nuevo a los diseños curriculares encontramos propuesto el siguiente ejemplo:

*Estudiar la relación entre el área del triángulo isósceles inscrito y el área del círculo. (4º año Educación Secundaria).*

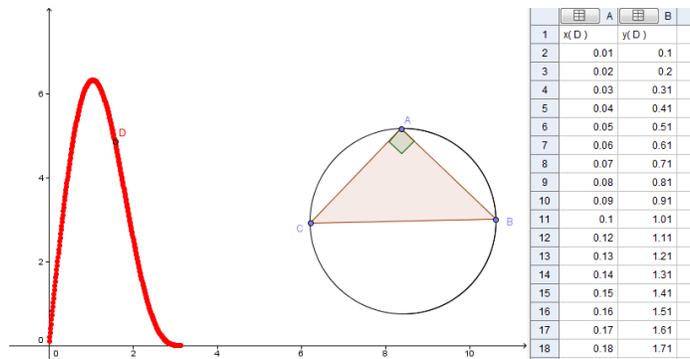
Podemos realizar distintas construcciones para obtener el triángulo isósceles inscrito en una circunferencia tal como aparece en la siguiente figura:



Una vez medido el ángulo en el vértice A, solo nos queda representar en los ejes el punto que relaciona el ángulo (abscisa) con el área del triángulo (ordenada). A continuación, activando el rastro de dicho punto y con ayuda de las opciones de animación automática, obtendremos la función que relaciona las dos variables anteriores que aparece en la figura siguiente:



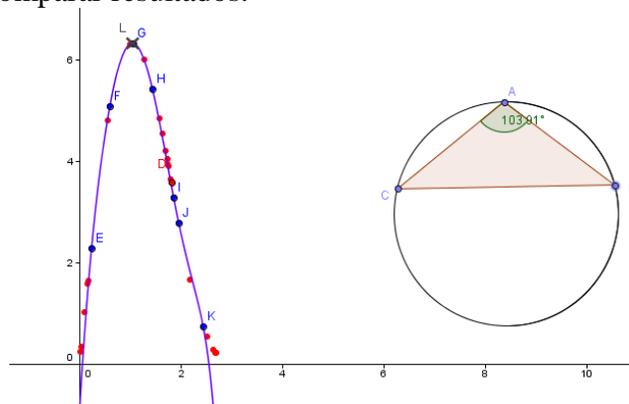
Utilizando las posibilidades que nos ofrece la hoja de cálculo podemos plantear la recopilación de los valores anteriores; para lo cual solo hay que activar la opción registro sobre hoja de cálculo del punto D. Después de volver a animar la construcción aparecerán los datos en la hoja de cálculo.



Aún son posibles nuevas actividades sobre este ejemplo con ayuda de GeoGebra.

Podemos planear que los alumnos intenten ajustar la función obtenida con una curva o con una función polinómica, marcando para ello, una serie de puntos correspondientes a los valores obtenidos en la hoja de cálculo o dibujando directamente sobre la representación de la curva obtenida.

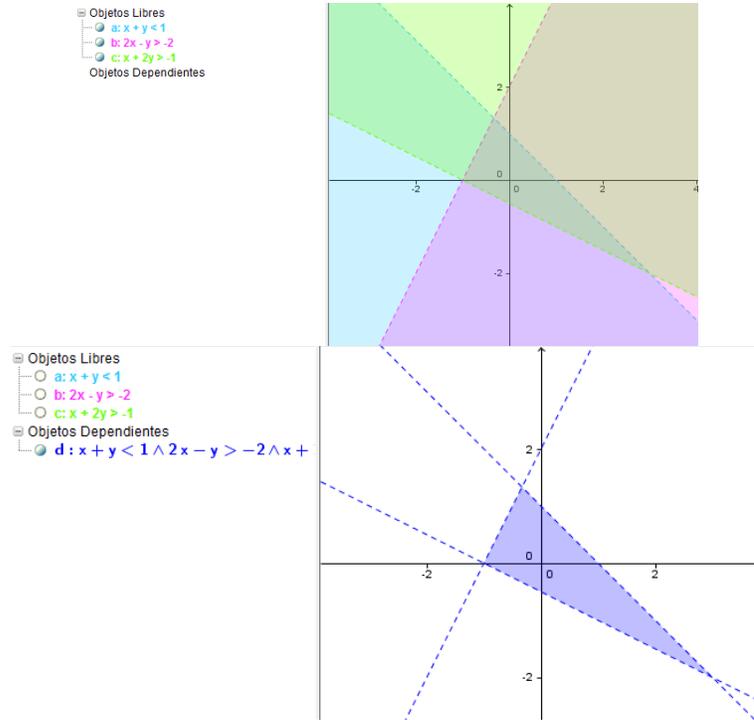
Como propuesta planteamos a los distintos grupos de alumnos que realicen ajustes con distinto grado para comparar resultados.



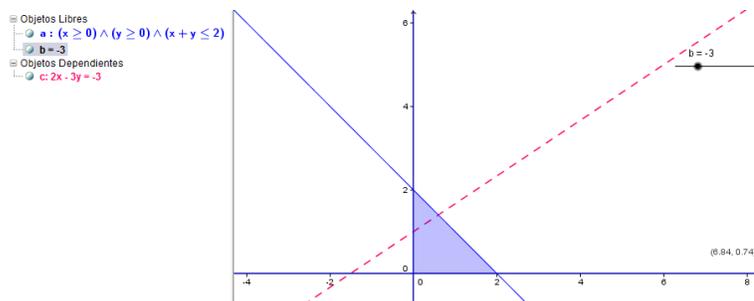
Por último, pediremos a los alumnos que comparen el máximo obtenido en el polinomio con el máximo obtenido en la hoja cálculo para el área del triángulo isósceles inscrito.

El dinamismo de GeoGebra y las distintas opciones que ofrece permiten que sobre un ejemplo sea posible trabajar distintos niveles de contenidos, lo que hace que se pueda adaptar al nivel de los alumnos.

Antes de adentrarnos en otros contenidos destaquemos que en esta nueva versión encontramos los comandos necesarios para entre otras tareas, representar inecuaciones y sistemas de inecuaciones.



Por tanto, a partir de estas nuevas funciones se podrán plantear actividades sobre programación lineal.



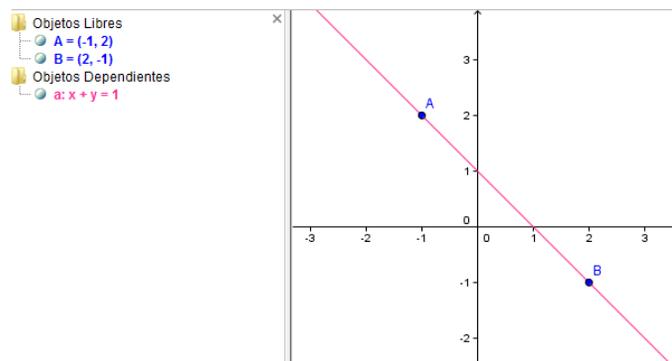
Aunque también está anunciada una versión de GeoGebra para 3D, por ahora nos conformaremos con trabajar en el plano; por lo que continuando con el desarrollo de actividades para los distintos bloques de matemáticas, a continuación nos dedicaremos a geometría afín y euclídea.

En este apartado lo primero que observaremos es que la forma de proceder de GeoGebra es similar a como estamos acostumbrados a hacerlo siguiendo la metodología que hemos denominado tradicional aunque bastante mejorada, sobre todo por las posibilidades y el dinamismo que nos ofrece este programa. Una vez activados los ejes de coordenadas y si lo deseamos, también la cuadrícula (rejilla) solo nos queda introducir objetos utilizando el puntero o a través de la línea de comandos.

Así, para introducir las coordenadas de un punto bastará con escribirlo en la forma  $A=(x, y)$ , siendo  $x$  e  $y$  los valores de la abscisa y la ordenada  $y$ , para introducir un vector, bastará con cambiar el nombre, utilizando una letra en minúscula  $u=(x, y)$ .

A partir de estos elementos básicos (puntos y vectores) ya se pueden construir otros elementos como por ejemplo una recta.

Para dibujar la recta que pasa por dos puntos  $A$  y  $B$  tendremos dos opciones. La primera es utilizar las herramientas ya conocidas, en este caso la herramienta Recta que pasa por dos puntos y la segunda será emplear el comando correspondiente, cuyo nombre no nos resultará complicado adivinarlo. Efectivamente, el comando será **Recta** que incluirá como argumentos los dos puntos que la determinan.



Podemos observar que no solo ha dibujado la recta sino que además nos ha dado su ecuación.

De manera similar y con el mismo comando se trazará la recta determinada por un punto  $A$  y por un vector  $u$  (**Recta**[ $A,u$ ]) o a través de la herramienta **Recta paralela** como recta que pasa por  $A$  y es paralela al vector  $u$ ).

Espero que después de todos los ejemplos expuestos hasta este momento, sobre todo quien no conociera GeoGebra, se haya convencido que no es complicado su uso y sobre todo, que haya sido capaz de animarles a trabajar con este software, para aprovechar las posibilidades que ofrece como recurso TIC para hacer otras matemáticas y para facilitar el aprendizaje de alumnado.

Sin más conocimientos técnicos será posible proponer actividades de geometría afín y euclídea en el plano como las siguientes:

### Actividad

*Los puntos  $A(-2, -1)$  y  $C(4, 3)$  son dos vértices opuestos de un paralelogramo. ¿Cómo podrías determinar los otros dos vértices? ¿Cuántos paralelogramos se pueden construir? Determina algunos que cumplan que los vértices  $B$  y  $D$  tengan coordenadas enteras.*

### Actividad

Dados el punto  $A(3,-1)$ , halla las coordenadas de otro punto  $B$  sabiendo que se encuentra en el eje de ordenadas y dista 5 unidades del  $A$ .

### Actividad

Dado el triángulo de vértices  $A(-2, 1)$ ,  $B(4, -2)$  y  $C(7,4)$ . Determina las ecuaciones de los lados. Ecuaciones de las medianas y las coordenadas del baricentro. Comprueba la propiedad del baricentro.

Y como en anteriores bloques, estas opciones permiten complicar las actividades y sobre todo, plantear investigaciones que requieran la manipulación de la construcción para deducir relaciones o propiedades de los objetos como ocurre en la actividad siguiente:

485

### Actividad

Dados los puntos  $A(1,0)$ ,  $B(1.5,2)$  y  $C(3,2)$ . Consideramos las rectas que cortan al segmento  $BC$ .

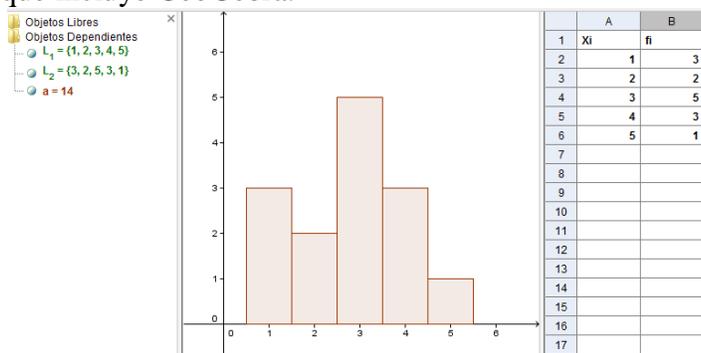
De las rectas que pasan también por el origen de coordenadas  $O$ , ¿Cuál es la que tiene mayor pendiente? ¿Cuál es la que tiene menor pendiente?

Y de las rectas que además cortan al segmento  $OA$ . ¿Cuál tiene mayor pendiente? ¿Cuál tiene la menor pendiente?

¿Y cual tiene la mayor ordenada en el origen? ¿Y la menor?

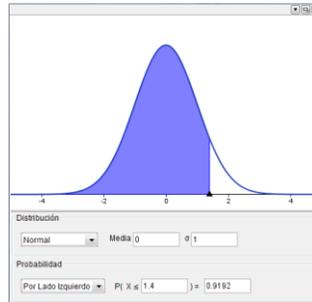
Aún nos queda otro bloque de contenidos como es la estadística y la probabilidad para los que también GeoGebra nos puede ayudar.

Quizás no sea la parte más desarrollada o avanzada del programa y puede resultar algo más complicada que el resto de opciones sobre todo por la notación que requiere para introducir los datos a través de listas, aunque también es posible simplificarla con ayuda de la hoja de cálculo que incluye GeoGebra.



Además, a partir de un conjunto de datos se podrán obtener los valores correspondientes a las medidas de centralización y de dispersión.

En la última versión de GeoGebra podemos encontrar las opciones necesarias para calcular probabilidades de distintas distribuciones.



Las actividades anteriores son solo una pequeña muestra de lo que se podrá hacer con GeoGebra. Estoy seguro que la mayoría de ustedes ya están pensando en otras propuestas mucho más interesantes de las que yo les he presentado.

486

Para todas las ideas que se nos ocurran será de gran ayuda, ahora sí, las actividades realizadas por otros profesores de las que una gran cantidad encontraremos en Internet. Actividades que como indiqué al principio puede que no sean las más adecuadas para iniciarnos con GeoGebra pero que servirán para profundizar y ampliar las posibilidades didácticas.

Quiero aprovechar para presentarles un conjunto de actividades que a su potencia como recursos educativos añaden un excelente y cuidado diseño y presentación. Estas actividades serán especialmente motivadoras no solo para el alumnado, sino también para nosotros, y seguro que favorecerán el aprendizaje del alumnado a través de las variadas propuestas que incluye cada una de las actividades.

Estas actividades en un proyecto del Instituto de Tecnologías Educativas (ITE) dependiente del Ministerio de Educación de España denominado Proyecto Gauss disponible en la Web:  
<http://recursostic.educacion.es/gauss/web/>

**Proyecto Gauss**

El Programa Escuela 2.0, dirigido por el Ministerio de Educación, responde a las demandas de modernización del sistema educativo, se desarrolla entre 2009 y 2013 y afecta a todos los alumnos de centros sostenidos con fondos públicos de 5º y 6º de Primaria y de Educación Secundaria Obligatoria.

El ITE ha desarrollado el Proyecto Gauss que brinda al profesorado varios centenares de items didácticos y de applets de GeoGebra, que cubren todos los contenidos de matemáticas de esos niveles educativos y están diseñados para ser utilizados tanto en la pizarra digital como en los ordenadores de los alumnos.

El proyecto Gauss pretende ser una demostración inequívoca de que el Programa Escuela 2.0 brinda a la comunidad escolar una forma diferente y creativa de enseñar y de aprender matemáticas.

Antonio Pérez Sanz  
 Director del ITE

Acceso a los materiales  
 NPO: 820-11-323-8

A través de esta se accede a un amplio conjunto de actividades, continuamente renovadas y ampliadas, para los niveles educativos de educación Primaria (6-12 años), Educación Secundaria (12-16 años) y Bachillerato (16-18 años), agrupadas por bloques de contenidos.

Primaria	ESO	Bachillerato
<p><b>Novedades</b></p> <p><b>Aritmética</b> Naturales y enteros Patrones Decimales y fracciones Cálculo mental</p> <p><b>Geometría</b> Acertijos La necesidad de medir Procedimientos Ángulos Polígonos Escalas y planos Figuras curvas Simetrías Cuerpos</p> <p><b>Estadística y probabilidad</b> Recuento Medidas Estimación</p>	<p><b>Novedades</b></p> <p><b>Aritmética</b> Naturales y enteros Patrones Decimales y fracciones Irracionales Cálculo mental</p> <p><b>Álgebra</b> Pautas y fórmulas Progresiones Identidades notables Ecuaciones y sistemas</p> <p><b>Funciones</b> Representaciones diversas Características Funciones concretas</p> <p><b>Geometría</b> Acertijos La necesidad de medir Procedimientos Ángulos Polígonos Tales y Pitágoras Escalas y planos Figuras curvas Simetrías Tesselados Grupos de isometrías Cuerpos Trigonometría</p> <p><b>Estadística y probabilidad</b> Recuento Medidas Estimación</p>	<p><b>Novedades</b></p> <p><b>Aritmética y Álgebra</b> Números y ecuaciones Matrices y determinantes Programación lineal</p> <p><b>Geometría</b> Trigonometría Geometría plana Geometría espacial Transformaciones</p> <p><b>Funciones</b> Familias y operaciones Límites y continuidad Derivadas e integrales</p> <p><b>Estadística y Probabilidad</b> Alea (azar) Regresión Distribuciones Muestras</p>

Veamos algunas a modo de ejemplo, ya que casi todas siguen el mismo esquema.

**Fichas sobre una cuadrícula**

Supón que dejamos caer una ficha sobre una cuadrícula. Si observamos la situación en la que queda, podemos distinguir dos posibilidades, según toque o no a alguna de las líneas de la cuadrícula:



La ficha no toca a la cuadrícula



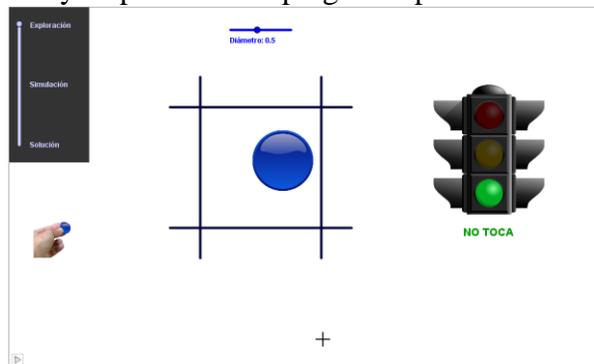
La ficha toca a la cuadrícula

¿Qué es más probable, que toque o que no toque alguna de las líneas de la cuadrícula? ¿Cómo varían las posibilidades de que toque alguna de las líneas con el diámetro de la ficha? Si lanzáramos 1000 fichas sobre una retícula cuadriculada, ¿cuántas tocarán, por término medio, alguna de las líneas de la cuadrícula?



Pulsa sobre esta imagen para ver las instrucciones de uso

En todas, está disponible el applets creado con GeoGebra para que el usuario pueda manipular la construcción y responder a las preguntas planteadas.



### Preguntas

1. Haz clic sobre el botón  en la parte inferior de la ventana para iniciar la animación y observa la posición de la ficha: si cae sobre alguna de las líneas de la cuadrícula (el semáforo se pone en rojo) o no (el semáforo se pone en verde). ¿Qué es más probable, que toque alguna de las líneas de la cuadrícula o que no toque ninguna?  
  
Para apreciarlo mejor puedes parar la animación, con el botón , y mover despacio con el ratón la mano de la parte inferior izquierda (actuando con el ratón sobre la ficha).
2. Cambia el diámetro de la ficha, utilizando el deslizador azul. Prueba con valores mayores y menores de 0.5. ¿De qué forma dependen las posibilidades de que una ficha caiga sobre una de las líneas de la cuadrícula de su diámetro?
3. Haz clic sobre el botón  Reinicia y sitúa el deslizador vertical en la posición Simulación. Con el botón  activa la animación automática. Lo que observas son los resultados de series de lanzamientos de 200 fichas iguales, de 0.5 unidades de diámetro, sobre una retícula cuadrada de lado 1 unidad. Fíjate en los resultados que aparecen en color rojo en la parte superior, particularmente en la proporción de fichas que tocan alguna de las líneas de la cuadrícula.  
  
¿Qué proporción de fichas, por término medio, tocan alguna de las líneas de la cuadrícula? Si lanzáramos 1000 fichas iguales a las anteriores sobre la misma cuadrícula, ¿cuántas tocarían, por término medio, alguna de las líneas de la cuadrícula?
4. Modifica el número de fichas: prueba con otros valores. ¿Obtienes resultados similares o hay variaciones importantes?
5. Con los deslizadores selecciona 200 fichas de 0.25 unidades de diámetro. Activa nuevamente la animación. ¿Qué proporción de fichas, por término medio, tocan ahora alguna de las líneas de la cuadrícula? Si lanzáramos 1000 fichas iguales a las anteriores sobre la misma cuadrícula, ¿cuántas tocarían, por término medio, alguna de las líneas de la cuadrícula?

Hay que destacar que estas actividades tienen licencia *Creative Commons*, por lo que no hay ningún impedimento legal para su uso, es más están disponibles para su descarga de manera que se puedan modificar y adaptar a las características y necesidades de vuestras aulas.

### Conclusión

Mi intención no ha sido impartir un curso de GeoGebra, solo he intentado ofrecer una visión lo más amplia y variada posible de lo que considero que se puede hacer con este programa con un único objetivo: animar a quien aún no lo conozca a trabajar con este software y espero haber aportado nuevas ideas a los que ya lo conocíais.

Como indiqué al principio de mi intervención, lo mejor es comenzar con propuestas sencillas que servirán para plantear nuevos retos y ayudarán que GeoGebra sea un recurso más en el aula, sobre todo cuando las TIC ya están presentes no solo en la vida cotidiana sino también en las escuelas.

Si creemos en la tecnología y la usamos a diario para otras tareas, ya es hora de emplearla también en el aula sin olvidar que la tecnología no debe prevalecer sobre la enseñanza sino que tiene que servirnos para mejorarla.