II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE ii.cemacyc.org

Erros conceituais de probabilidade e consequências no cotidiano: uma forma interessante de aplicar conceitos de probabilidade

Ighor Opiliar Mendes Rimes
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
ighorimes@hotmail.com

Patrícia Furst
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
patriciafurst@globo.com

Resumo

Um dos problemas do ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica está na apresentação dos exemplos e exercícios que além de distantes da realidade, se baseiam geralmente em jogos. Este artigo propõe ilustrar os conceitos de probabilidade e estatística, com base em situações reais do cotidiano. Estas aplicações fazem mais sentido para o aluno e facilitam sua interação e compreensão da sociedade. Assim, apresentamos quatro exemplos. No primeiro, é explorado o conceito de probabilidade ligado ao caso de confiabilidade, comum em diversos fatos do cotidiano como, por exemplo, no teste de gravidez. O segundo exemplo mostra as consequências do uso indevido do cálculo de probabilidades, uma vez que o correto seria o uso de probabilidade condicionada. Já o terceiro se reporta a uma situação ocorrida na 2ª Guerra Mundial com blindagens de aviões. E por fim, no quarto, temos um exemplo clássico de probabilidade em um jogo bastante explorado na literatura.

Palavras chave: probabilidade e estatística, aplicações na educação básica, educação matemática

Introdução

Um dos problemas do ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica está na apresentação dos exemplos e exercícios de aplicação. Além de distantes da realidade, os mesmos se baseiam, na maioria dos casos, em exemplos de jogos. Desta forma, o intuito deste artigo é propor exemplos que ilustrem os conceitos de Probabilidade e Estatística com base em situações do cotidiano, utilizando casos reais. Estas aplicações além de fazerem mais sentido para o aluno facilitam sua interação e compreensão da sociedade em que vivem.

Apresentamos, assim, quatro exemplos. No primeiro, é explorado o conceito de probabilidade ligado ao caso de confiabilidade, comum em diversos fatos do cotidiano como, por exemplo, no teste de gravidez. O segundo exemplo, baseado em um caso real, mostra um resultado absurdo obtido por conta do uso indevido do cálculo de probabilidades, uma vez que, na realidade, o correto seria, neste caso, o uso da probabilidade condicionada. Já o terceiro se reporta a uma situação ocorrida na 2ª Guerra Mundial com blindagens de aviões. E por fim, no quarto exemplo, temos um exemplo clássico de probabilidade em um jogo bastante explorado na literatura.

1. A confiabilidade do teste de gravidez

Uma situação que gera muitos enganos é a dos testes de gravidez. E com este comum caso no dia a dia das pessoas que vamos trabalhar agora. É de conhecimento geral que, pelo menos no Brasil, duas são as formas utilizadas para saber se a mulher está grávida. Uma delas é o teste de gravidez de farmácia (teste de urina) e a outra o teste de gravidez Beta HCG (exame de sangue). Grande parte das empresas especializadas no primeiro tipo de teste garante sua confiabilidade entre 95% a 99%, se a mulher seguir rigorosamente todos os procedimentos apresentados na bul: como fazer o exame no dia certo, etc. Em contra partida, os testes de sangue possuem 99% de confiabilidade. Um dos equívocos mais comuns na interpretação do conceito de probabilidade se refere a confiabilidade de ocorrência de um evento. Isto significa que o resultado apresentado possui "x%" (xis por cento) de chance de se verificar, ou seja, estamos falando da probabilidade do resultado apresentado ser confiável. Observamos que é bastante comum a população supervalorizar a confiabilidade quando as taxas são altas.

O que há de errado neste caso? A população em geral procura o exame de sangue quando deseja ter certeza da gravidez. Logo após obter o resultado do exame, a mulher sai do laboratório com a tranquilidade de que o resultado apresentado é, de fato, o verdadeiro. Porém, na teoria das probabilidades, esse 1% de incerteza significa muito mais do que apenas uma margem de insegurança. Se analisarmos em outras áreas da aleatoriedade como, por exemplo, na previsão do tempo, esse 1% de chance de chover não nos levaria a pegar um guarda-chuva ao sair de casa. Porém, teremos uma ideia de que por mais improvável que seja chover nesse dia, tal chance existe e pode ser que realmente ocorra. Em geral, como é apenas uma chuva, você não iria se preocupar e o fato acabaria passando desapercebido, mas e se fosse para saber sobre uma gravidez? A probabilidade (ou confiabilidade) de 99% de que o resultado apresentado seja verdadeiro, nos diz que a cada 100 exames de sangue 1 apresenta um resultado equivocado, ou seja, a cada 100 mulheres que realizam este exame 1 vai para casa acreditando que está grávida e na verdade não está ou vice-versa.

Em uma rápida análise, acredita-se que o caso é análogo ao problema da meteorologia. Entretanto, é preciso observar que, no caso da chuva, os dias, por conta de sua complexidade de variáveis, nunca se repetem. Já os exames de sangue são procedimentos padrões, ou seja, envolvem uma quantidade bem menor de variáveis e ocorrem milhares de vezes, se não, milhões em um ano. Portanto, se ocorrerem 1000 exames, 10 estão errados em média. Se ocorrerem 100.000, 1000 estarão errados. É claro que podemos ter 100 exames e nenhum apresentar erro, da mesma forma como podemos ter 10 exames e três apresentarem erro. Como dito anteriormente, é apenas uma média

2. O caso do tribunal ou a arte de fazer a pergunta certa

Destacamos, a seguir, um caso presente no livro “O Andar do Bêbado” (MLODINOW, 2011), no qual a teoria das Probabilidades é usada em um tribunal. O caso de Janet Collins, julgado pela Suprema Corte da Califórnia por furto em 1968. No dia 18 de junho de 1964 às 11h30 da manhã, uma senhora se abaixou para apanhar uma caixa de papelão vazia, quando foi empurrada ao chão e notou que havia sido furtada, conseguindo ver uma mulher jovem que fugia da cena do crime. Segundo uma testemunha, tal mulher parecia pesar cerca de 70 kg, vestia “uma roupa escura” e cabelo “entre loiro escuro e loiro claro”. Aproximadamente no mesmo momento do roubo, outra testemunha, viu uma mulher, que fugiu correndo e entrou em um automóvel amarelo com teto acinzentado, estacionado do outro lado da rua.

Embora não tenha conseguindo distinguir a marca do carro, esta testemunha viu que o motorista do carro era um homem negro, que tinha barba e bigode. Alguns dias após o incidente, um policial de Los Angeles vislumbrou um Lincoln amarelo com o teto acinzentado. O policial notou que os suspeitos se encaixavam na descrição, a não ser pelo homem não possuir barba, embora assumisse que às vezes a deixava crescer. Nesse mesmo dia, a polícia de Los Angeles prendeu os suspeitos: Malcolm Ricardo Collins e sua mulher, Janet. Como as provas eram escassas e as testemunhas não puderam confirmar que de fato os suspeitos eram os procurados, a testemunha principal usada pela acusação acabou sendo um professor assistente de uma faculdade estadual. Essa testemunha disse que matematicamente o fato dos réus serem “uma mulher caucasiana com rabo de cavalo loiro e um negro com barba e bigode já seria suficiente para condenar o casal”. Para ilustrar essa afirmação, vejamos a tabela da acusação.

Tabela 1

Probabilidade individual de cada característica.

Característica	**Probabilidade Individual**
Automóvel parcialmente amarelo	1/10
Homem com bigode	1/4
Homem negro com barba	1/10
Garota com rabo de cavalo	1/10
Garota loira	1/3
Casal inter-racial em um carro	1/1 milhão

Fonte: O Andar do Bêbado. 2011

O professor assistente utilizou a regra do produto entre todas as probabilidades, concluindo assim que a chance do casal ser inocente era de 1/12 milhões. O júri aceitou o argumento e condenou o casal.

O que há de errado neste caso? Inicialmente, devemos recordar que a multiplicação entre as probabilidades só ocorre se, e somente se as categorias são independentes. Aqui, por exemplo, é de fácil compreensão que a maioria dos homens que possui barba, possui também bigode. Logo, essas probabilidades não são independentes. Outro erro grave e bastante comum da análise é que não se procura a probabilidade de que um casal escolhido ao acaso se encaixe na descrição dos suspeitos e sim que um casal que se encaixe na descrição dos suspeitos seja o casal culpado. De fato, pela quantidade da população que residia na região do crime, era de se esperar que, pelo menos, mais uns dois ou três casais se encaixariam na descrição. Trata-se, neste caso, de uma “probabilidade condicional” na qual a pergunta deveria ser: qual a probabilidade desse casal ser o culpado, sabendo que existem mais três casais com a mesma descrição das vítimas? Por esses e outros argumentos falhos, a Suprema Corte revogou a condenação dos Collins. O fato curioso é vermos que tais erros poderiam ser claramente solucionados por alunos do ensino médio e que esse aprendizado equivocado pode causar grandes problemas, prejudicando, inclusive, pessoas inocentes.

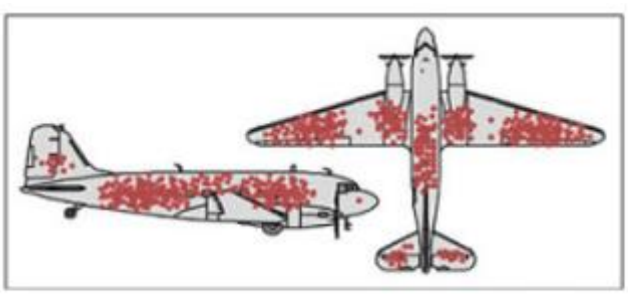
3.Onde estão os furos que faltam?

A história a seguir ocorreu na Segunda Guerra Mundial. Segundo Ellenberg (2015), Abraham Wald, matemático nascido em 1902, passou grande parte da Segunda Guerra Mundial em um programa sigiloso chamado Grupo de Pesquisa Estatística, que inclusive tinha entre seus membros Milton Friedman, futuro Prêmio Nobel de Economia (1976). Wald era o mais inteligente e ao mesmo tempo um integrante improvável do grupo, já que era apaixonado por abstrações e se distanciava das aplicações diretas, mas quando se era necessário transformar uma ideia vaga em matemática “sólida”, Wald era a pessoa que se queria ter por perto.

Certo dia, eis a questão que foi entregue a Wald: quanto mais de blindagem deve-se colocar no avião para que não sejam derrubados tão facilmente pelas tropas inimigas? Observe alguns pontos antes de acreditar que a resposta seria “em todo o avião”. A blindagem torna o avião mais pesado, e aeronaves mais pesadas são mais difíceis de manobrar e consomem mais combustível. Blindar demais o avião é um problema, blindar de menos também. Esse era o tipo de problema para o qual esse grupo foi fundado. Para tentar auxiliar os estatísticos, os militares entregaram alguns dados que julgaram úteis. Quando os aviões americanos retornavam de suas missões, estavam cobertos de furo de balas. Mas os danos não eram distribuídos uniformemente pela aeronave. Abaixo, a tabela do relatório entregue:

Tabela 2

Seção do avião atingida pelas balas por pé quadrado.



Seção do avião	Balas por pé quadrado
Motor	1,11
Fuselagem	1,73
Sistema de combustível	1,55
Resto do avião	1,8

Fonte: O Poder do Pensamento Matemático, 2015

Figura 1: Distribuição dos tiros que acertam o avião

Com base nos relatórios, os oficiais viam a oportunidade de realizar a blindagem com eficiência, isto é, colocar mais blindagem onde se possui mais furos de balas. Com essa conclusão foram ao encontro de Wald para que este apenas corroborasse a solução. Entretanto, não obtiveram a mesma resposta.

O que há de errado neste caso? A blindagem, disse Wald, não deveria ir para onde os furos de bala estão, mas para onde os furos não estão, isto é, os motores. A grande sacada do matemático foi simplesmente perguntar: onde estão os furos de balas que faltam? Aqueles que estariam sobre todo o revestimento do motor, caso os danos tivessem sido distribuídos de forma uniforme pelo avião, como era de se esperar. Os furos de balas que faltavam estavam nos aviões que faltavam. A razão de os aviões voltarem com menos pontos atingidos no motor era que os atingidos no motor não voltavam. Esse pensamento utiliza-se do artifício de perguntarmos qual é a "chance" de algo não acontecer, ou em linguagem de probabilidade: qual a probabilidade do evento complementar? No caso da blindagem, podemos utilizar um velho truque matemático que deriva desse pensamento e torna o quadro completamente claro: estabeleça algumas variáveis iguais a zero. Nesse caso, a variável a ser pinçada é a "chance" de um avião que leve um tiro no motor conseguir permanecer no ar. Estabelecer essa "chance" como zero significa que um único tiro no motor, sem dúvida, derrubaria o avião. Qual deveria ser, então, a situação real apresentada? Temos o caso dos tiros se distribuírem uniformemente em torno da aeronave, menos no motor, ou o motor é o ponto de vulnerabilidade total. As duas explicam os dados, porém a última faz mais sentido. Assim, Wald salvou inúmeros aviões e auxiliou os Estados Unidos na Segunda Guerra Mundial.

4. O jogo de prêmios de três portas

Este exemplo, muito difundido, encontra-se em MLODINOW (2011). O mesmo também é retratado em uma cena do filme "21" (2008), intitulado no Brasil como "Quebrando a Banca". Porém, é um exemplo clássico e existe diversas outras maneiras de ser encontrado na literatura. Tudo se inicia quando Marylin vos Savant, famosa por ser citada no Livro dos Recordes em 2008 como a pessoa com o maior QI (quociente de inteligência) já registrado no planeta (228), escreveu em coluna dominical de um jornal local, em setembro de 1990, o seguinte texto:

> Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolher uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: "Você

> gostaria de mudar a sua escolha para a outra porta fechada?" Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha? (p. 52)

O programa de televisão - *Let's Make a Deal* – foi transmitido de 1963 a 1976 e relançado entre 1980 e 1991, com diversas versões, também no Brasil. Por incrível que pareça, mesmo após a exibição de 4500 episódios ao longo de 27 anos, o maior legado deixado pelo programa foi exatamente essa questão envolvendo probabilidade. A pergunta imortalizou Marylin e o programa pela quantidade de respostas convictas dos seus leitores, afinal, a pergunta parece bem tola. Observe que, inicialmente, teríamos a probabilidade de cada porta obter o premio: 1/3 (um terço). Assim, quando o apresentador abre a primeira porta e mostra que não há prêmios lá, intuitivamente acreditamos que as duas portas que sobraram tenham ½ (metade) das chances de estar o prêmio. Marylin afirmou que trocar de porta era mais vantajoso. A partir daí houve uma avalanche de críticas e piadas denegrindo a imagem da colunista. Era como se tudo na Teoria das Probabilidades tivesse sido arruinado depois de tal resposta.

O que há de errado neste caso? Para compreendermos o porquê do cálculo anterior não estar correto neste caso, devemos imaginar o mesmo jogo em outra situação. Imagine que ao invés de três, tivéssemos cem portas. A probabilidade que o prêmio estivesse atrás de cada é de 1/100 (um centésimo). Você escolhe uma porta aleatoriamente, suponhamos, a 27. O apresentador começa a abrir as portas. Quais portas ele irá abrir? Como todos já devemos notar, este abre as portas que não possuem o prêmio por um motivo simples: ele sabe onde está o prêmio (se não soubesse e abrisse uma porta aleatória, o jogo acabaria muito mais rápido que o programa desejaria durar). Seguindo esta lógica para o nosso jogo de 100 portas, o apresentador abriria todas as portas que não possuem o prêmio e quando sobrassem duas portas a mesma pergunta seria feita: "Você deseja trocar sua escolha?" Acredito que neste momento você consegue notar o tamanho da chance que ele lhe deu ao fazer esta pergunta. Vamos exemplificar, você escolheu a porta 27, esta não foi aberta ainda, pois foi sua escolha. Além desta porta, também não foi aberta a porta 59. Por qual motivo esta porta ainda não foi aberta? Por que no universo de 100 portas, justamente esta não foi aberta junto com a porta que você escolheu? Temos duas opções neste momento, a porta que eu escolhi possui o prêmio e a outra foi escolhida pelo apresentador aleatoriamente, ou a porta que o apresentador não abriu possui o prêmio.

Agora, é visível que a probabilidade é muito maior do prêmio estar na porta que não foi escolhida por você. O truque utilizado pelo jogo das três portas é o mesmo, sendo a única diferença que com três portas este é quase imperceptível para os telespectadores (vide isso pela chuva de cartas criticando Marilyn na sua coluna), se acrescentarmos uma porta, o truque já é mais facilmente percebido. O fato é que, mesmo após uma prova formal, muitos matemáticos, incluindo Paul Erdos - um dos mais reconhecidos da época - só se convenceu de que a solução estava correta após uma simulação computadorizada feita por um colega na qual Erdos assistiu centenas de testes que geraram um resultado de 2 para 1 a favor da troca de escolha.

Considerações finais

Em meus anos de experiência com aulas de probabilidade na Educação Básica, aos poucos fui substituindo a temática trabalhada nos livros didáticos por situações do cotidiano, utilizando casos reais. Com isso, pude observar o envolvimento dos alunos com os exemplos mencionados. Além da compreensão dos conceitos aplicados, podemos ressaltar os benefícios trazidos pelos exemplos do dia a dia, que ajudam a contribuir na interação e compreensão da sociedade na qual os jovens estudantes vivem.

Ora, se o conceito de probabilidade está claro, então, é preciso que se aplique em situações do cotidiano, principalmente para que os resultados das ciências estatísticas tragam benefícios para o dia a dia do cidadão. Ter consciência destes e de outros resultados deve fazer parte da formação de qualquer cidadão com direito a Educação Básica.

Diante destes fatos, propõe-se, neste artigo, sugerir ao professor, sobretudo do Ensino Médio, que deixe de lado questões de aplicação direta, tipo exercício para aplicação de fórmulas, e trabalhe problemas com potencial de envolver o aluno, deixando o próprio na busca pela solução. Estes problemas servem para a introdução de conceitos novos ou para o esclarecimento tanto de conceitos importantes e pouco trabalhados, quanto de problemas de má interpretação e de diferenciação.

Referências e bibliografia

ELLENBERG, J. (2015). *O poder do pensamento matemático: A ciência de como não estar errado*. (G. Schlesinger, Trad.) Rio de Janeiro, Brasil: Zahar. (Trabalho original publicado 2014)

MLODINOW, L. (2011). *O andar do bêbado: Como o acaso determina nossas vidas*. (D. Alfaro, Trad.) Rio de Janeiro, Brasil: Zahar. (Trabalho original publicado 2008)