

# DIFICULTADES MANIFESTADAS POR PROFESORES EN FORMACIÓN EN EL APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

## DIFFICULTIES EVIDENCED BY MATHEMATICS TRAINEES WHEN LEARNING DIDACTICAL PHENOMENOLOGY

**Gómez, P.** <sup>(1)</sup>, **Cañadas, M.C.** <sup>(2)</sup>

*Universidad de los Andes* <sup>(1)</sup>, *Universidad de Granada* <sup>(2)</sup>

### Resumen

*En este trabajo exploramos la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del análisis fenomenológico en un programa de máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio basado en el modelo del análisis didáctico. Con base en la descripción de los aspectos teóricos y técnicos de este organizador del currículo, establecemos una serie de acciones que permiten describir la actuación de los profesores en formación en sus producciones escritas. Identificamos y caracterizamos la dificultad manifestada por los profesores en formación sobre las principales ideas que configuran este procedimiento.*

### Abstract

*In this paper we explore the teaching and learning of didactical phenomenology in an in-service secondary mathematics teacher education master program that follows the didactic analysis model. Based on the description of the main theoretical and technical aspects of this curriculum organizer, we establish a series of actions with which we describe the trainees' performance in their written productions. We identify and characterize the difficulties evidenced by the trainees on the main ideas that configure this procedure.*

**Palabras clave:** *Análisis fenomenológico; Dificultades; Educación secundaria; Formación de profesores; Matemáticas.*

**Key words:** *Didactical phenomenology; Difficulties; Mathematics; Secondary; Teacher education.*

Puesto que un concepto matemático es un medio para organizar un conjunto de fenómenos, Freudenthal (1983) sugiere comenzar la instrucción por los fenómenos y, de allí, enseñar al alumno a manipular los conceptos, como medios de organización de esos fenómenos (pp. 28-32). En este sentido, “la realidad no solamente es un área de aplicación, sino que también es una fuente de aprendizaje” (Treffers, 1993, p. 89). El análisis fenomenológico de un tema de las matemáticas escolares es un procedimiento que permite establecer los fenómenos que dan sentido al tema, identificar los contextos que organizan esos fenómenos y las subestructuras que les sirven de modelo, y describir las relaciones entre esas subestructuras y esos contextos. La información que surge del análisis fenomenológico permite al profesor diseñar, seleccionar o adaptar tareas que promuevan las capacidades de los escolares para “plantear, formular e interpretar problemas mediante las matemáticas en una variedad de situaciones o contextos” (OCDE, 2005, p. 75). El objetivo de investigación de este estudio consiste en identificar y caracterizar las dificultades que los profesores en formación manifiestan sobre las ideas que configuran el análisis fenomenológico cuando participan en programas de formación permanente de profesores basados en el modelo del análisis didáctico (Gómez y González, en revisión).

A continuación describimos los principales elementos teóricos y técnicos del análisis fenomenológico y establecemos nuestra posición sobre el aprendizaje de profesores en formación; presentamos el método que utilizamos para analizar las producciones de los grupos de profesores en formación; y exponemos e interpretamos los resultados obtenidos.

### **Marco conceptual**

El análisis didáctico se configura alrededor de cuatro análisis que conforman un ciclo: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (Gómez, 2007). Cuando se realiza cada uno de los análisis, se ponen en juego los organizadores del currículo (Rico, 1997). Los profesores en formación que participan en programas basados en el análisis didáctico seleccionan un tema de las matemáticas escolares y lo analizan con cada uno de los organizadores del currículo. El propósito consiste en producir información sobre el tema que sea útil para el análisis del tema con otros organizadores del currículo o para el diseño de la unidad didáctica. Estos procedimientos de análisis se fundamentan en el significado de los organizadores del currículo y se configuran alrededor de un conjunto de técnicas para realizarlos.

#### **Aprendizaje de un organizador del currículo**

Nos basamos en los trabajos de González y Gómez para establecer los conocimientos que caracterizan el aprendizaje de los organizadores del currículo por parte de los profesores en formación (i.e., González y Gómez, 2008). Cuando los profesores en formación analizan un tema de las matemáticas escolares con un organizador del currículo, se espera que ellos (a) conozcan el organizador del currículo de tal forma que, por ejemplo, sean capaces de distinguir instancias de esa noción con respecto a un tema de las matemáticas escolares; (b) desarrollen las técnicas necesarias para usar el organizador del currículo como herramienta de análisis de un tema de las matemáticas escolares y producir información relevante sobre ese tema; y (c) desarrollen las técnicas necesarias para usar la información anterior a efectos de tomar decisiones a la hora de analizar el tema con otro organizador del currículo o para el diseño de una unidad didáctica. Estas expectativas de aprendizaje establecen los tres tipos de conocimiento que un profesor en formación puede desarrollar en relación con

un organizador del currículo que González y Gómez denominan significado, uso técnico y uso práctico, y que caracterizan de la siguiente manera.

*Significado.* El significado de un organizador del currículo se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura. El significado de un organizador del currículo se presenta en términos de sus propiedades y sus relaciones con otros conceptos. Estos conceptos son las ideas clave que configuran su significado.

*Uso técnico.* El uso técnico de un organizador del currículo se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran útiles para producir información sobre el tema.

*Uso práctico.* El uso práctico se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran que son necesarias para usar la información que surge del uso técnico en los análisis con otros organizadores del currículo o en el diseño de la unidad didáctica.

En este trabajo nos centraremos en el desarrollo y puesta en práctica del significado y el uso técnico de los profesores en formación con respecto al análisis fenomenológico.

### **Análisis fenomenológico**

Con el análisis fenomenológico se pretende que el profesor en formación identifique y organice los fenómenos que dan sentido al tema que está analizando (Gómez y Cañadas, 2011). La complejidad de este organizador del currículo surge del significado del concepto y de las técnicas para su uso técnico y uso práctico.

#### *Significado*

El análisis fenomenológico no consiste únicamente en identificar fenómenos que den sentido a un tema de las matemáticas escolares; consiste también en establecer las maneras en que el tema organiza esos fenómenos (Freudenthal, 1983; Puig, 1997). Para ello, es necesario considerar las ideas claves que configuran este organizador del currículo: fenómeno, contexto, relación estructural, subestructura, situación, usos de un tema y problemas a los que el tema da respuesta.

Por ejemplo, al querer identificar fenómenos relacionados con la función cuadrática podemos pensar en la antena parabólica de mi casa, el conjunto de todas las antenas parabólicas y el conjunto de todos los reflectores parabólicos de fenómenos que dan sentido al tema. La idea de reflectores parabólicos constituye un contexto que organiza todos los fenómenos que comparten unas mismas características estructurales: su forma parabólica da lugar a que las ondas confluyan en un mismo lugar —antenas— y a que los rayos de luz se proyecten paralelamente —focos—. Las características estructurales son aquellas propiedades de un fenómeno que involucran y dan sentido al tema matemático. De esta forma, las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen a un contexto permiten relacionarlo con una subestructura de la estructura conceptual del tema (Gómez, 2007, pp. 54-55). Se establece así una relación biunívoca entre subestructuras y contextos. Las situaciones son otra forma de organizar los fenómenos que hace referencia al tipo de entorno al que pertenecen.

### Uso técnico

El análisis fenomenológico de un tema implica dos procedimientos: (a) la identificación de fenómenos que dan sentido al tema y (b) la organización de esos fenómenos. Hacerse las preguntas, “¿qué otros fenómenos son ‘parecidos’ a este, desde la perspectiva del tema, y en qué son parecidos?” es una técnica para aproximarse a sus características estructurales y comenzar a abordar la identificación de contextos, como primer paso para organizar los fenómenos. De esta forma identificamos los reflectores parabólicos como contexto que engloba diferentes tipos de fenómenos de la función cuadrática. Las características estructurales de los fenómenos pueden dar pistas sobre aquellos aspectos matemáticos del tema que organizan los fenómenos pertenecientes a un contexto. La identificación de la subestructura matemática que modeliza un contexto puede surgir de esta reflexión. También es posible usar otra técnica: analizar la estructura conceptual del tema e identificar posibles subestructuras en ella, para establecer cuáles de esas subestructuras adquieren sentido —se usan, resuelven problemas— para al menos un fenómeno y de qué manera se relacionan con los contextos.

La figura 1 resume esquemáticamente las ideas clave y algunas de las técnicas del uso técnico del análisis fenomenológico.

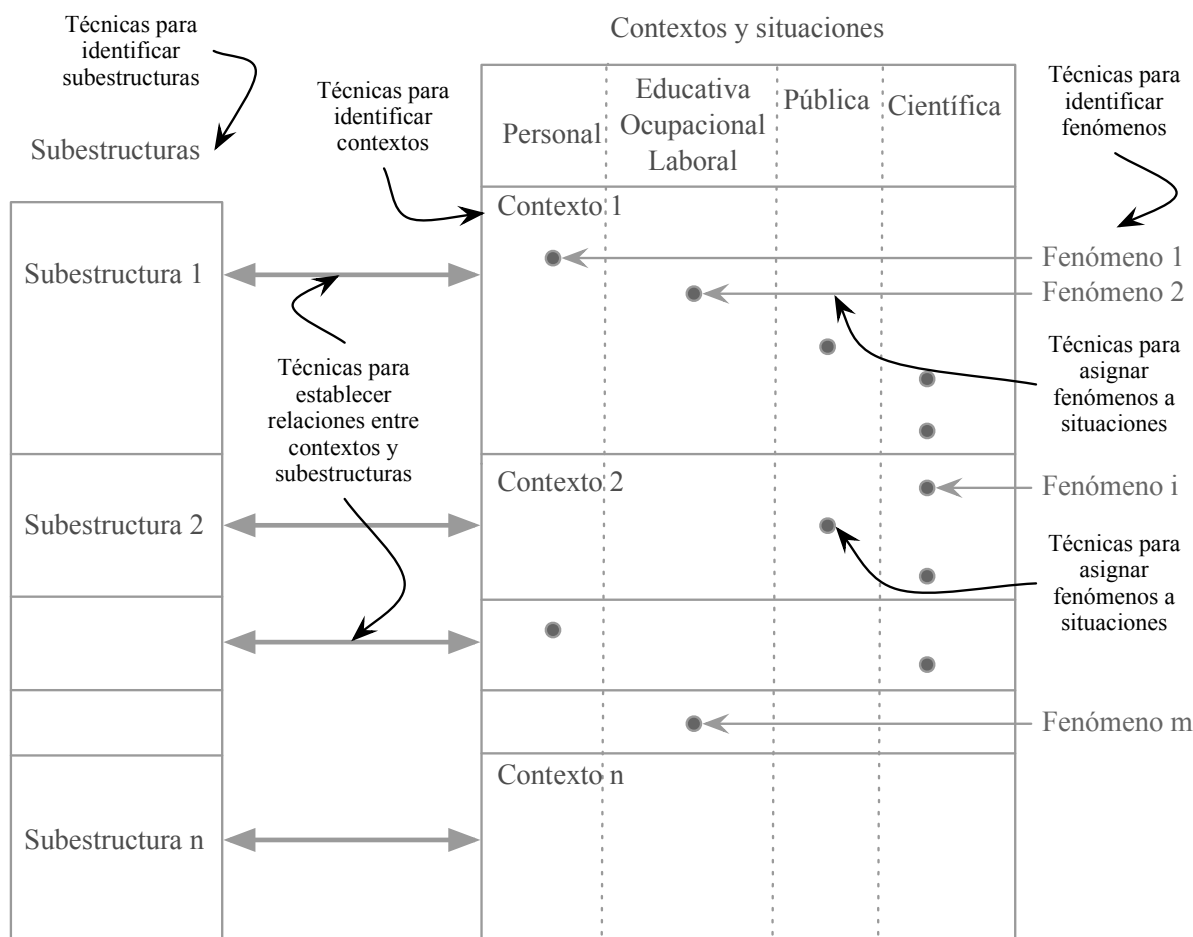


Figura 1. Ideas clave y técnicas del uso técnico en el análisis fenomenológico

## Método

El estudio se realizó en el contexto de un programa de máster que proporciona formación profesional a profesores de matemáticas en ejercicio de educación secundaria y bachillerato (11 a 16 años). Los 26 profesores en formación se organizaron en grupos de 4 o 5 personas. Cada grupo escogió un tema matemático concreto y realizó un ciclo del análisis didáctico sobre su tema, contando con el apoyo de un tutor a lo largo de todo el programa.

### Datos y actuaciones de los grupos

En la actividad de la que procede la información para este estudio se esperaba que los grupos de profesores en formación analizaran su tema desde la perspectiva del análisis fenomenológico. Los grupos debían elaborar un borrador y enviarlo a su tutor. Tras la reacción del tutor, debían mejorar su trabajo para producir la versión final de su trabajo. Sus presentaciones fueron grabadas en vídeo.

Se esperaba que los grupos de profesores en formación abordaran diferentes cuestiones relacionadas con las ideas clave del análisis fenomenológico. Con base en el marco conceptual, identificamos una serie de acciones que los grupos podrían realizar al abordar la actividad. Por ejemplo, se esperaba que establecieran las “relaciones entre los contextos y las subestructuras matemáticas”. Para abordar esa expectativa de aprendizaje identificamos las siguientes acciones: (a) establecer relaciones, (b) establecer relaciones válidas, (c) establecer todas las relaciones, (d) justificar las relaciones entre los contextos y las características estructurales, y (e) proponer justificaciones válidas. De manera análoga, construimos diversas acciones para cada idea clave del análisis fenomenológico.

Representamos cada acción por medio de un código en el que el primer carácter es la idea clave con la que se relaciona (fenómeno [F], contexto [C], subestructura [B], relación [R] o situación [S]), el segundo distingue su correspondencia con el significado (S) o uso técnico (T), el tercero identifica el orden del código dentro de la idea clave y el tipo de conocimiento, el cuarto identifica si la acción no fue tratada durante la instrucción (N) y el quinto es un guión que aparece cuando la acción depende de otra acción. Una acción depende de otra si la información que se produce al realizar la segunda es necesaria para realizar la primera. En la tabla 1 recogemos el listado de acciones y el código correspondiente.

Tabla 1  
*Acciones*

Acción	Código
Fenómenos	
Identificar fenómenos	FS1
Identificar fenómenos válidos	FS2
Identificar problemas	FS3
Usar problemas para identificar fenómenos	-FT1
Utilizar al menos un problema para identificar al menos un fenómeno	-FT2
Utilizar apropiadamente los problemas	-FT3

Tabla 1  
*Acciones*

Acción	Código
Identificar usos	FS4
Utilizar los usos para identificar fenómenos	-FT4
Utilizar apropiadamente los usos	-FT5
Contextos	
Identificar contextos	CS1
Identificar contextos válidos	CS2
Identificar una proporción de, al menos, el 80% de todos los contextos posibles	-CT1
Identificar características estructurales	CS3
Usar características estructurales para identificar fenómenos	-CT2
Usar características estructurales para justificar fenómenos	-CT3N
Proponer justificaciones válidas de los fenómenos a través de las características estructurales	-CT4N
Organizar fenómenos con contextos	-CT5
Subestructuras	
Identificar subestructuras	BS1
Identificar subestructuras válidas	-BS2
Hacer referencia a la estructura conceptual	BS3
Describir las subestructuras	-BT1
Organizar fenómenos con subestructuras	-BT2
Relación de subestructuras y contextos	
Establecer relaciones	-RS1
Establecer relaciones válidas	-RS2
Establecer todas las relaciones	-RS3
Justificar las relaciones entre los principios y las características estructurales	-RS4
Proponer justificaciones válidas	-RS5
Situaciones	
Proponer situaciones	SS1
Proponer situaciones válidas	-SS2
Usar PISA para clasificar	-ST1
Usar bien PISA	-ST2
Usar alguna clasificación	ST3

### Codificación

Los dos investigadores codificamos de forma independiente los borradores y las presentaciones de los 6 grupos. Discutimos los resultados hasta lograr acuerdos consistentes y compartidos.

Presentamos un ejemplo de codificación para parte de la producción de un grupo que trabajó las ecuaciones lineales. Este grupo hizo diferentes tablas y en cada una recogió los fenómenos de un mismo contexto, organizados por subestructuras y situaciones. En la figura 2 observamos los fenómenos para el contexto “combinación” que se corresponden con la subestructura “variables libres o independientes”. En la columna de la derecha, el grupo identificó temáticas (p. ej., costos o química) con las que relacionó fenómenos con características similares.

		FENÓMENOS		
		CONTEXTO COMBINACIÓN	CONTEXTO COMPARACIÓN	CONTEXTO IGUALACIÓN
VARIABLES LIBRES O INDEPENDIENTES	¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el teatro teniendo en cuenta el dinero recaudado por boletería?			C o s t o s
	Hallar el precio de una entrada de adulto y una de niño			
	Calcular el valor de cada manzana y cada naranja			
	¿Cuál es el precio de un lápiz y de un cuaderno?			
	¿Cuánto cuesta cada cosa?			
	¿Qué cantidad prestó a cada porcentaje de interés?			
	Balancear las reacciones químicas			Q u í m i c a
	¿Cuántos litros de cada solución se deben mezclar para obtener 10 litros de una solución de ácido con una concentración del 40%?			
	¿Cuánta solución al 4% y cuánta al 20% debe mezclar Frank para obtener 10 galones de solución al 10%?			

Figura 2. Tabla-resumen de fenómenos de ecuaciones lineales

A partir de la información de la figura 2 y con base en la descripción de las acciones de la tabla 1, codificamos esta producción con los códigos FS1, FS2, CS1, CS2, -CT1, -CT5, BS1, -BT2, -RS1, -RS2, -RS3 y SS1. Por ejemplo, en relación con los fenómenos, este grupo puso en evidencia la identificación de fenómenos válidos para el contenido matemático (FS1 y FS2); en lo que concierne a los contextos, identificó contextos válidos (CS1 y CS2), reconoció una proporción de contextos superior al 80% de entre los posibles (-CT1) y organizó fenómenos con los contextos identificados para ese tema.

### Análisis

Establecimos el número de grupos que realizaron cada una de las acciones, en el borrador y en la presentación, y produjimos una tabla que resume estos resultados. Ubicamos cada acción en la celda que corresponde al número de grupos que la realizaron en el borrador —filas— y al número de grupos que la realizaron en la presentación final —columnas—.

## Resultados

La tabla 2 resume los resultados obtenidos. Las acciones difíciles se encuentran en las primeras cuatro filas y columnas de la tabla. Hemos delimitado esa zona de la tabla con una línea gruesa de color negro. Las acciones más difíciles (-RS4 y -RS5) se ubican en la celda (0,0) de la tabla. Análogamente, las acciones fáciles se ubican en la última fila y columna de la tabla —celda (6,6)—. Hemos identificado esta celda con una línea gruesa en gris claro. Diferenciamos estas acciones de aquellas que se encuentran en la mitad de la tabla, en las celdas (3,5) y (5,5), que denominamos medianamente difíciles, y a las que hemos asignado un borde grueso en gris oscuro. Aquellas acciones en las que los grupos progresaron del borrador a la presentación —y que denominamos progresiones— se encuentran en las celdas (0,2), (0,3) y (3,5) y se identifican en la tabla por un borde punteado. Finalmente, aquellas acciones para las que hubo menos grupos que las realizaron en la presentación que en el borrador —y que denominamos regresiones— se encuentran en las celdas (3,1) y (3,2) y se identifican con un borde de trazos cortos.

Tabla 2  
*Dificultad de las acciones*

Br.	Presentación						
	0	1	2	3	4	5	6
0	-RS4, -RS5		-CT3N -CT4N	CS3N -CT2N			
1		FS4, FT4 FT5					
2			FS3, -FT1 -FT2, -FT3				
3		-RS2	-BS2	BS3, -BT1		FS2, -RS3 CS2, -CT1	
4						SS1, -SS2 -ST1, BT2 -RS1, -ST2	
5							
6							FS1, CS1 -CT5, BS1, ST3

Br.: borrador.

Los resultados de la tabla 2 nos permiten establecer las dificultades que los grupos manifestaron al realizar el análisis fenomenológico. Abordamos la dificultad de una idea clave atendiendo a varios criterios. El primero de ellos, evidenciado en la tabla 2, tiene que ver con el número de grupos que realizaron las acciones correspondientes a cada una de las ideas clave. El segundo criterio tiene en cuenta el número de grupos que realizaron la acción de manera válida en el borrador y en la presentación. En ambos casos, también establecemos el número de grupos que no realizó una acción en el borrador y sí la realizó en la presentación.

Todos los grupos identificaron fenómenos en el borrador. Sin embargo, sólo la mitad de ellos distinguieron fenómenos válidos. Por tanto, algunos grupos tuvieron dificultades con esta noción. Todos los grupos menos uno propusieron fenómenos válidos en la presentación, por lo que los grupos con dificultades en el borrador pudieron resolverlas. La formadora propuso dos estrategias para identificar fenómenos:



(a) mediante usos y (b) mediante problemas. Estas estrategias no resultaron útiles para los grupos, puesto que sólo un grupo utilizó la primera y dos la segunda.

Todos los grupos distinguieron contextos en el borrador y en la presentación, pero solamente la mitad de ellos propusieron contextos válidos en el borrador. Otros dos grupos lograron hacerlo en la presentación. Todos los grupos lograron organizar los fenómenos en contextos pero ninguno usó características estructurales en el borrador y solo la mitad lo hizo en la presentación. Esto pone en evidencia la dificultad de los grupos con la idea de característica estructural.

Aunque todos los grupos identificaron subestructuras para su tema, la mitad de ellos identificaron subestructuras válidas en el borrador y dos grupos en la presentación final. Esto pone en evidencia la dificultad de los grupos con el significado de subestructura. Los grupos que identificaron subestructuras válidas hicieron referencia a la estructura conceptual.

Puesto que al menos la mitad de los grupos propusieron subestructuras que no eran válidas, la organización que hicieron de los fenómenos tampoco era válida. Esto indica que los grupos tuvieron dificultades importantes con el significado de la noción de subestructura y, por ende, con su uso técnico para organizar fenómenos.

Establecer la relación entre subestructuras y contextos es una acción que depende de que los grupos hayan establecido subestructuras y contextos válidos, y que las relaciones que establecen sean válidas. Además de las dificultades heredadas de esta dependencia, se observan dificultades de la propia idea porque: (a) de los 3 grupos que presentaron subestructuras válidas en el borrador, ninguno propuso relaciones válidas en ese documento y (b) solo uno de los dos grupos que presentó subestructuras válidas en la presentación, propuso relaciones válidas en ese documento.

Los grupos no manifestaron dificultades con la idea de situación. Cinco grupos identificaron situaciones válidas para sus temas, según la clasificación de PISA presentada por la formadora. El otro grupo utilizó otra clasificación de situaciones. Todos los grupos organizaron apropiadamente los fenómenos en las clasificaciones propuestas.

## **Discusión**

El propósito de este trabajo consistió en establecer y caracterizar las dificultades que seis grupos de profesores en formación manifestaron cuando analizaron un tema de las matemáticas escolares desde la perspectiva del análisis fenomenológico en un plan de formación de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio. Encontramos que los grupos no manifestaron dificultades con la idea de situación, manifestaron algunas dificultades con las ideas de fenómeno y contexto —particularmente en relación con la idea de característica estructural— y pusieron de manifiesto serias dificultades con la idea de subestructura y su relación con la idea de contexto.

Podemos formular conjeturas acerca de las razones por las que los grupos manifestaron diferentes niveles de dificultad para las ideas clave que caracterizan el análisis fenomenológico: (a) algunas ideas son más complejas que otras, ya sea porque su significado involucra un mayor número de ideas o porque se genera dependencia entre ellas; (b) algunos grupos de profesores en formación tienden a usar el significado del lenguaje cotidiano e ignorar el significado técnico de algunos de los términos que caracterizan el significado de las ideas; y (c) la dificultad en la realización del análisis

fenomenológico puede depender del tema de las matemáticas escolares que se esté analizando. En este estudio no hemos explorado empíricamente estas conjeturas.

Los resultados obtenidos en este trabajo nos indican caminos para la mejora de la instrucción. Es necesario una mayor profundización de aquellas ideas clave que generan más dificultades. Además, consideramos que la instrucción debe promover el desarrollo coordinado del significado y el uso técnico del organizador del currículo.

### Referencias

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2(Especial), 78-89.
- Gómez, P. y González, M. J. (en revisión). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico.
- González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática XII*, 425-434.
- OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid, España: Santillana.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal. Realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1), 89-108.