INCIDENCIA DE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Patricia Sureda, María Rita Otero
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT),
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As. Tandil. Argentina.
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas(CONICET)
psureda@exa.unicen.edu.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar
Nivel Medio

Palabras clave: Conceptualización. Sistemas de Representación. Enseñanza. Secundaria.

Resumen
Este trabajo forma parte de una tesis doctoral (Sureda, 2012)en la que se estudia el proceso de conceptualización de cuatro grupos de alumnos del colegio secundario [121 alumnos de 15-16 años],que estudian el campo conceptual de las *funciones exponenciales* en una dinámica de estudio que prioriza la participación del alumno en la construcción del conocimiento. En particular, se utilizan los constructos teóricos propuestos por la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990, 2007, 2008, 2010),para describir las respuestas de algunos alumnos cuando seles proponen problemas que se resuelven utilizandofuncionesexponenciales. El análisis de los datosmuestraque la construcción de los invariantes operatorios exponenciales sucede en forma progresiva, a medida que se avanza en el estudio del campo conceptual, y no en todos los sistemas de representación a la vez.Así, aun cuando un alumno resuelva exponencialmente en un sistema de representación,no implica que pueda resolverloexponencialmente enunsistema de representación diferente.

Introducción
La importancia de la enseñanza de la *función exponencial* en la escuela secundaria está ligada a su relevancia en la comprensión de situaciones cada vez más cercanas a cualquier ciudadano actual. Por ejemplo, el aumento del dinero puesto a interés compuesto, el crecimiento de la deuda que genera el interés de una tarjeta de crédito; o el avance de las epidemias en una población, etc., requieren de *funciones exponenciales* más o menos complejas. Perola compresión de estos acontecimientos se obstaculiza si solo se dispone de esquemas mentales lineales, pues en principio se asimilan los modelos no lineales a los lineales(Confrey, 1994; Karrer y Magina, 2000; Villarreal, Esteley y Alagia, 2005; Ramirez, Chavarría, Borbón y Alpizar, 2010).

Por esta razón,y con el propósito de analizar el proceso de conceptualización de la función exponencial, se implementó un conjunto de situaciones problemáticas diseñadas para enseñar la función exponencial. Por otra parte, y debido a que el estudio de las funciones no puede reducirse a un único sistema de representación (Douady, 1986; Janvier, 1987; Duval, 1993; García y Llinares, 1994), el diseño de las situaciones y el análisis de la conceptualización, involucra los diferentessistemas de representación.

Preguntas de la Investigación

1. ¿Qué invariantes operatorios dirigen las estrategias de un alumno del colegio secundario, cuando resuelve un problema exponencial, en diferentes sistemas de representación?
2. ¿Cómo se modifican los invariantes operatorios de este alumno, a medida que avanza en el estudio del campo conceptual?

Marco Teórico

La Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) propuesta por Vergnaud (1990, 2007, 2008, 2010) permite estudiar la conceptualización, entendida como piedra angular del desarrollo cognitivo. La conceptualización involucra una relación dialéctica entre las situaciones y los conceptos: las situaciones dan sentido a los conceptos y un mayor desarrollo conceptual del sujeto le permite abordar situaciones más complejas. El análisis de la conceptualización, que es a partir de los esquemas pasa inevitablemente por el análisis de la actividad, de la cual la conducta observable es una parte muy pequeña. Pero como no es posible tener acceso a la parte no observable de la actividad, el análisis de la conceptualización de las funciones exponenciales, debe llevarse a cabo necesariamente a partir del análisis de las conductas observables, en particular, de las resoluciones escritas de los alumnos cuando resuelven un problema. Porque aunque el esquema no es una conducta, tiene la función de generar la actividad y la conducta en situación. Por esta razón, resulta posible estudiar mediante el análisis de las conductas, los esquemas que dirigen las respuestas de los alumnos en situación, y en particular los invariantes operatorios que hacen operatorio el esquema.

Por otra parte,esta teoría postula que si se está interesado en la enseñanza de conceptos, no se los debe reducir a su definición, pues es través de las *situaciones* y de los problemas que se pretenden resolver como un *concepto* adquiere sentido para el sujeto(Vergnaud, 1990: 133). Así, la TCC define al *concepto*como un triplete de tres conjuntos: C (S; IO;SR):

· La referencia [S]: Es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto. Para Vergnaud, una situación tiene el carácter de tarea.
· El significado [IO]: Es el conjunto de *invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)* sobre los cuales reposa la operacionalidad de los *esquemas*. Los conceptos en acto son categorías pertinentes, y los teoremas en acto son proposiciones tenidas como verdaderas. Los conceptos y teoremas se construyen en forma solidaria y pueden ser implícitos o explícitos; más o menos formales; y correctos o incorrectos. Su carácter de IO descansa en que hacen operatorio el esquema.
· El significante [SR]: Son los sistemas de representación. Es decir, el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el *concepto*, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

El carácter pragmático de la construcción del concepto *función exponencial*, no permite reducir el *significado*,ni a los *significantes*,ni a las *situaciones*, pues el *significado* viene dado por ambos. Por lo tanto, al estudiar el desarrollo de los *conceptos* relativos a las *funciones exponenciales,* se consideran estos tres planos a la vez.

Metodología

Para estudiar el*campo conceptual* de las *funciones exponenciales*en la escuela secundaria se diseñó un conjunto de 12 situaciones de enseñanza, tres conjuntos de tareas y una evaluación. Luego de una prueba piloto, el conjunto de situaciones fuereadaptado e implementado en cuatro cursos de cuarto año (15-16 años), de la cual se obtuvieron las resoluciones de 121 alumnos clase a clase, lo que hacen un total de 1440 resoluciones.Esta recolección sistemática de los protocolos resulta indispensable, debido a que para el estudio de la conceptualización se necesita acceder a las primeras estrategias formuladas por los estudiantes.Cada intervención se registró mediante un audio general.La implementación demandó dos y meses y medio de clases, en una escuelade la ciudad que atiende a sectores urbanos medios. Allí se llevó a cabo el estudio piloto y cuatro implementaciones.

Por razones de espacio, en este trabajo se analizan las estrategias que utiliza un alumno para resolver los problemas exponenciales, y cómo se modifican a medida que avanza en el estudio del campo conceptual. La decisión sobre la elección de un único estudiante responde a dos razones. Por una parte, al propósito del trabajo, que es mostrar en pocas páginas cómo se modificaron las primeras estrategias a medida que se avanzaba en el estudio. Y por otra parte, a que los resultados que se muestran en este trabajo, podrían haberse mostrado mediante cualquiera de los otros protocolos, pues es un rasgo que se advierte en todos los alumnos, y a lo largo de toda la implementación.

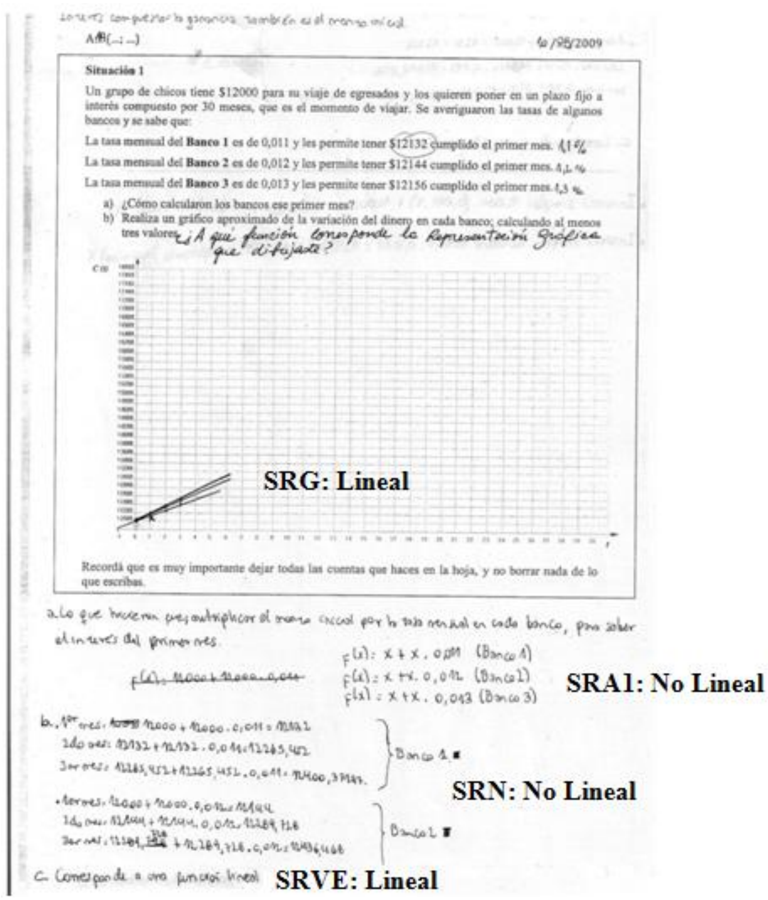
Análisis de los Datos y Resultados Parciales

La implementación del conjunto de situaciones, se realizó luego de que los alumnos habían estudiado las funciones lineales vinculadas al interés simple, habían calculado porcentajes y la tasa de interés en el modelo lineal.Dado que las primeras tres situaciones refieren a un problema vinculado con la capitalización de dinero puesto a interés compuesto; se comenzó la implementación con una conversación, donde se acordó que al poner una cierta cantidad de dinero a interés compuesto, por ejemplo con una tasa de interés del 1%, cada mes se obtenía un 1% más que el mes anterior. Convenido esto, se les propuso la primera situación.

En la situación se les daba la tasa de interés de tres bancos y el dinero obtenido luego del primer mes de capitalización. La primera tarea consistía en explicar cómo se había calculado la cantidad de dinero para el primer mes. En la segunda tarea debían calcular la cantidad de dinero para tres meses cualesquiera y representar gráficamente la variación del dinero en un sistema de ejes coordenados dado. Finalmente se les pedía que expresaran qué función habían graficado. Así, se tiene que este primer problema debía ser abordado a partir de cuatro sistemas de representación [SR]: El sistema de representación numérico [SRN] que refiere a los cálculos con números, el algebraico de primer orden [SRA1] que involucra aquellos procedimientos algebraicos en el que los parámetros se corresponden con la situación, el analítico-gráfico [SRG] que refiere a la construcción gráfica en ejes cartesianos, y el verbal escrito [SRVE] que son las formas lingüísticas escritas.A continuación se presentan y describen las resoluciones del alumno A19a tres situaciones.

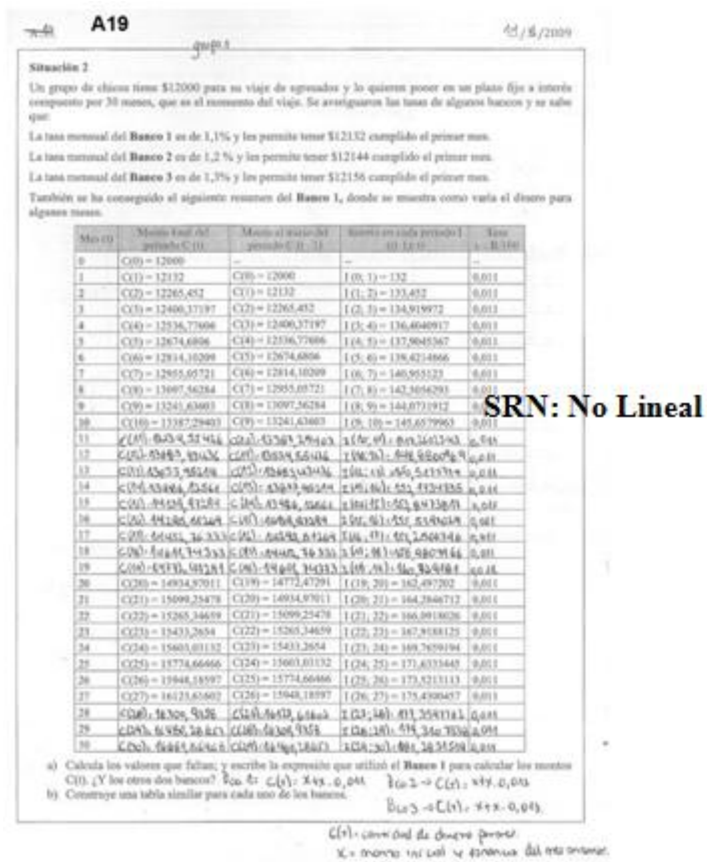
En la primera situación, este alumno calcula el dinero para los primeros tres meses mediante el cálculo recursivo del interés simple, que calculado mes a mes le permite obtener en forma adecuada el monto de dinero. Así, se tiene que en el sistema de representación numérico [SRN], las acciones de A19 no son lineales y parecen estar dirigidas por la proposición *"En el interés compuesto la ganancia también es el monto inicial",* escrita en el borde superior de la hoja.Esta proposición que el estudiante admite como verdadera y que parecen guiar sus acciones en este sistema de representación [SRN] es lo que Vergnaud (1990) denomina "teorema en acto". Luego en la expresión algebraica que propone $f(x) = x + x.0{,}011$ se advierte su intento por determinar la expresión algebraica del interés compuesto, pero en la que sólo logra algebrizar el procedimiento de cálculo, pues la variable (x) no tiene dependencia.

Esta acción parece estar guiada por el mismo teorema en acto. Luego, una vez que calculó la cantidad de dinero, para los primeros tres meses, en forma no lineal, representa la variación de la cantidad de dinero en el banco mediante tres rectas, como si la variación fuera lineal.Al preguntarle a qué función corresponde la representación gráfica, él responde quees una función lineal. Así, mientras en los sistemas de representación numérico y algebraico de primer orden [SRN y SRA1] las resoluciones de este alumno parecen estar guiadas por teoremas en acto no lineales, la construcción gráfica [SRG] y la respuesta predicativa [SRVE] parece estar guiada por teoremas en acto lineales.



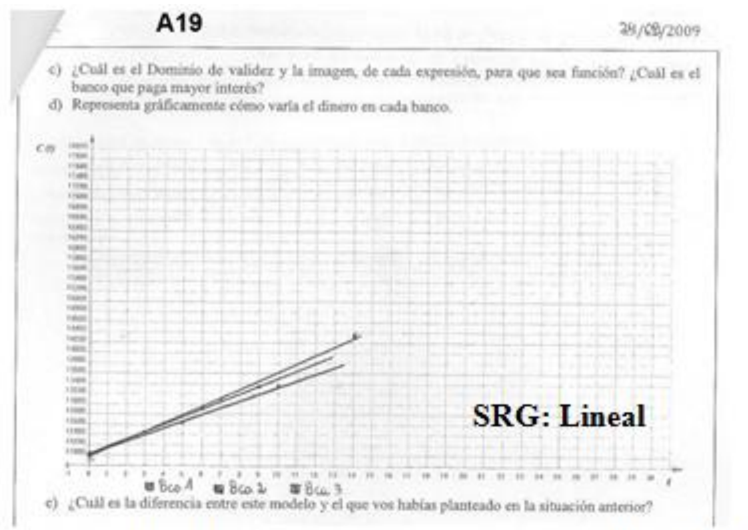
SRN	SRA1	SRG	SRVE
T.A.N: “En el interés compuesto la ganancia también es el monto inicial”	**T.A.N:** “En el interés compuesto la ganancia también es el monto inicial”	**T. A.G:** “La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC es una recta”	**T. A.G:** “La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC es una recta”
No Lineal	**No Lineal**	**Lineal**	**Lineal**

La situación dos es similar a la primera, pero con la diferencia que en ésta se ha añadido una tabla dondese muestra cómo varía la cantidad de dinero en el primer banco, para algunos meses. En el siguiente protocolo se muestran algunos de los espacios de la tabla, completados por A19, donde se advierte que en los sistemas de representación numérico y algebraico de primer orden [SRN y SRA1], los cálculos realizados por este alumno siguen siendo dirigidos por teoremas en acto no lineales.

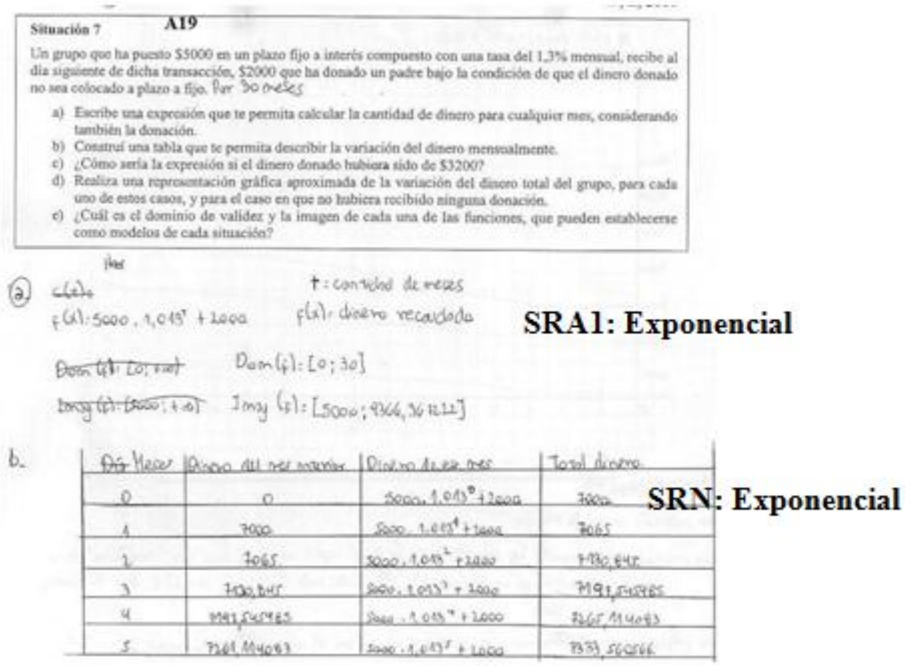


Luego, una vez que el grupo de clase acuerdaque $M_f(t) = M_i\,.(1+i)^t$es la expresión algebraica que permite calcular el dinero puesto a interés compuesto, y que por lo tanto la cantidad de dinero no aumenta lo mismo cada mes, los alumnos se dedican a construir la representación gráfica,que cómo se muestra a continuación, en el caso de A19son tres rectas. Así, se tiene que las estrategias de A19 son dirigidas por teoremas en acto no lineales cuando calcula o formula una expresión algebraica [SRN y SRA1] perocuando dibuja la variación del dinero en ejes cartesianos (sistema de representación gráfico [SRG]), son lineales. Y esto aún después de acordar que el dinero no variaba linealmente.

SRN	SRA1	SRG
T.A.N: "El dinero puesto a IC no aumenta lo mismo cada mes"	**T.A.N:**"El dinero puesto a IC no aumenta lo mismo cada mes"	**T. A.G:** "La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC es una recta"
No Lineal	**Exponencial**	**Lineal**



Luego de acordar la expresión del interés compuesto, y de estudiar la función exponencial de la forma $f(x) = k.a^x$ mediante diversos problemas, en la situación siete se planteaun problema también vinculado al interés compuesto, mediante el cual se pretendíageneralizar la función exponencial de la forma $f(x) = k.a^x + b$. La situación presenta un problema en la cual además del dinero que se pondrá a interés,se agrega una cierta cantidad dinero que no será puesto a interés. Como se muestra en la resolución deA19, los alumnos proponen la expresión algebraica $f(t) = 5000 . (1 + 0{,}013)^t + 2000$y calculan el dinero para cada mes sin dificultades. Pues la resolución, en estos dos sistemas de representación [SRN y SRA1]es única, sistemática y organizada, es decir, no se advierte más de una estrategia, ni formulaciones inconclusas. En términos de la TCC la acción del estudiante en cada uno de estos SR ha sido organizada por un esquema disponible, en particular por teoremas y conceptos en acto previamente construidos (Vergnaud, 1990).



Situación 7 **A19**

Un grupo que ha puesto $5000 en un plazo fijo a interés compuesto con una tasa del 1,3% mensual, recibe al día siguiente de dicha transacción, $2000 que ha donado un padre bajo la condición de que el dinero donado no sea colocado a plazo a fijo. Por 30 meses

a) Escribe una expresión que te permita calcular la cantidad de dinero para cualquier mes, considerando también la donación.
b) Construí una tabla que te permita describir la variación del dinero mensualmente.
c) ¿Cómo sería la expresión si el dinero donado hubiera sido de $3200?
d) Realiza una representación gráfica aproximada de la variación del dinero total del grupo, para cada uno de estos casos, y para el caso en que no hubiera recibido ninguna donación.
e) ¿Cuál es el dominio de validez y la imagen de cada una de las funciones, que pueden establecerse como modelos de cada situación?

a) $f(t)$: 5000 . 1,013^t + 2000 t: cantidad de meses f(x): dinero recaudado

SRA1: Exponencial

~~Dom (f): [0; +∞)~~ Dom (f): [0; 30]

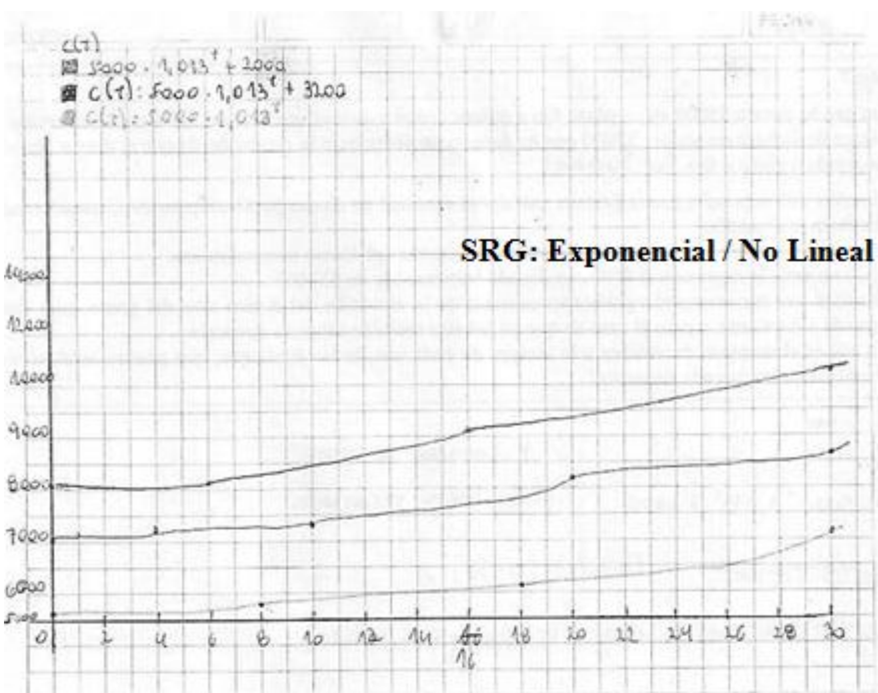
~~Img (f): [5000; +∞)~~ Img (f): [5000; 9366,361222]

b.

Meses	Dinero del mes anterior	Dinero de ese mes	Total dinero
0	0	5000 . 1,013^0 + 2000	7000
1	7000	5000 . 1,013^1 + 2000	7065
2	7065	5000 . 1,013^2 + 2000	7130,845
3	7130,845	5000 . 1,013^3 + 2000	7197,545985
4	7197,545985	5000 . 1,013^4 + 2000	7265,114083
5	7265,114083	5000 . 1,013^5 + 2000	7333,560566

SRN: Exponencial

Sin embargo, la representación gráfica de la variación del dinero parece en parte guiada por teoremas en acto exponenciales, y en parte no lineales.Pues aun cuando no dibuja rectas, sigue priorizando la construcción de la gráfica mediante la unión de puntos, aun cuando estos no le permitan una grafica estrictamente creciente, como es el caso de esta función exponencial.



Así, es posible advertir un progreso en la conceptualización de este alumno que transita desde lo lineal a lo no lineal, y desde allí a lo exponencial en cada sistema de representación.

Discusión

Mediante los protocolos arriba presentados se intenta mostrarque la construcción de los invariantes operatorios exponenciales sucede en forma progresiva, a medida que se avanza en el estudio del campo conceptual, y no en todos los sistemas de representación a la vez.

Por ejemplo, en la primera situación, luego de convenir que el dinero puesto a interés compuesto no aumenta lo mismo cadavez, A19calcula la cantidad de dinero en forma no lineal, pero dibuja rectas en el sistema de representación gráfico [SRG]. En la segunda situación A19 dibuja otra vez rectas para representar cómo varía el dinero en el banco, aun luego de acordar con el grupo de clase la expresión algebraica exponencial, y de convenir que el dinero no aumentaba en forma lineal.Esto muestra que cuando el conocimiento de un campo conceptual es incipiente, el alumno no logra utilizar las conclusiones obtenidas en un sistema de representación, en otro.Así, se advierte que la conceptualización de la FE, es también progresiva en cada sistema de representación, lo cual requiere tanto de un tiempo de construcción, como de tareas que la propicien. Esto es coherente con la TCC, que define al *concepto*como un triplete de tres conjuntos: C (S; IO;SR), en la que los sistemas de representación [SR] tienen un papel central, aunque no excluyente.

Finalmente, hacia el final de la implementación el alumno logra resolver en forma más o menos exponencial en los diferentes sistemas de representación.

Desde la descripción de las respuestas, es posible advertir que la conceptualización de la función exponencial en general, y en cada sistema de representación, en particular, es una tarea enormemente compleja, y de largo aliento que va más allá de los dos meses y medios que demandó la implementación.En consecuencia, el análisis de la conceptualización de las funciones exponenciales, requerirá en el futuro, de un más profundo estudio del desarrollo de la conceptualización en cada sistema de representación.

Reflexiones Finales

Un aspecto relevante de este trabajo ha sido mostrar la complejidad del proceso de conceptualización de la función exponencial y su relación con los SR, sobre todo en un contexto escolar. Habitualmente, los SR aparecen como transparentes para el grueso de los docentes, e incluso para los matemáticos, que son sus creadores. Es habitual que un concepto matemático se introduzca en la escuela secundaria siempre por la definición, a la cual se agrega, “que notaremos como...”.

Esto lleva a que operen trágicas reducciones de lo matemático a lo notacional, y que muchos estudiantes sean “castigados” y frustrados en función de esto, pues enunciar la notación parece ser todo lo que se está dispuesto o es necesario a hacer para construir un concepto. La contracara, es reconocer que los SR son parte de los conceptos y que es necesario construirlos en la medida en que devienen necesarios y funcionales, dentro de una cierta situación.

Referencias Bibliográficas

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *EducationalStudies in Mathematics* 26 (2-3), p. 31-60.

Douady, R. (1986). Juego de Campos y Dialéctica Herramienta–Objeto. *Recherches en Didactique des Mathemathiques* 7, 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, Estrasburgo.

García, M. y Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizartareas matemáticas. *Suma*18, 13-23.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education,en Janvier, C. (Eds.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* 27-32. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.

Ramirez, G., Chavarría, J., Borbón, A. yAlpizar, G. (2010). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso. *Actas del sexto CIEMAC*. 1-8.

Sureda, P. (2012). *Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos Didácticos y Cognitivos.* Tesis Doctoral.Facultad de CienciasExactas. U.N.C.P.B.A. Tandil. Buenos Aires. Argentina

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23). 133-170.

Vergnaud, G. (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. En Otero M. R.; Elichirebehety I.; Fanaro, M.; Corica, A. & Sureda, P. (Eds.) *Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática.* Tandil. Buenos Aires, Argentina. ISBN 978-950-658-183-1. I-XVII.

Vergnaud, G. (2008). Comunicación personal con María Rita Otero. *Functions, concepts and schemes*.

Vergnaud, G. (2010). Comunicación personal con María Rita Otero. Université Paris 8.

Villarreal, M. E., Esteley, C. B., &Alagia, H. R. (2005). As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática,* 18 (23), 23-40.