LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. ANÁLISIS DE OBSTÁCULOS A PARTIR DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Daniela Cecilia Veiga
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"
Buenos Aires. Argentina
veigadaniela@yahoo.com.ar
Nivel Medio

Palabras clave: Propiedad Distributiva. Obstáculos. Ingeniería Didáctica

Resumen

La propiedad distributiva es uno de los contenidos matemáticos que se enseña desde los primeros años de la escolaridad y se retoma en los años sucesivos determinando su dominio de validez en las distintas operaciones matemáticas.

A pesar de tratarse de un contenido ampliamente desarrollado a lo largo de toda la educación media, los errores que cometen los alumnos persisten año tras año, incluso en niveles universitarios.

En este trabajo, se realiza el relevamiento de los obstáculos a los que se enfrentan los alumnos al aplicar la propiedad distributiva en diversos contextos de la enseñanza de la matemática, en nivel medio y la categorización y análisis de los mismos a partir de las herramientas que brinda la ingeniería didáctica.

Introducción

Desde los primeros años de escolaridad, los alumnos aprenden a reconocer y aplicar diversas propiedades numéricas. Desde un primer momento, emplean naturalmente la propiedad conmutativa y reconocen sin dificultad que esta propiedad no siempre es válida. Por ejemplo, en el caso de la sustracción y división.

Otro tanto ocurre con la propiedad asociativa. Fácilmente reconocen sus alcances y limitaciones en la resolución de cálculos que involucren las cuatro operaciones básicas.

No obstante, la propiedad distributiva es un caso particular que trae aparejado una gran cantidad de obstáculos en el aprendizaje y comprensión de otros conceptos matemáticos.

En general, una vez que los alumnos tienen su primer encuentro con la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y sustracción, la hacen extensiva a casi todos los cálculos que se presentan dentro de la matemática.

De esta manera, aplican la propiedad en casos como los siguientes: división respecto a la adición y sustracción (por derecha y por izquierda); potenciación respecto a la adición y sustracción; radicación respecto a la adición y sustracción; logaritmos, entre otras.

La propiedad distributiva tiene características particulares y presenta una serie de restricciones según se trate de sumas, restas, divisiones, productos, potencias o raíces.

Es sabido que los alumnos presentan grandes dificultades en este punto. Intentan generalizar la propiedad distributiva en cualquier situación que se les presente olvidando las condiciones que se deben cumplir para que dicha propiedad sea válida.

Cabe preguntarse el origen de este error para poder generar estrategias que permitan abordarlo. ¿Cuáles son las causas por las cuales los alumnos generalizan la aplicación de la propiedad distributiva en diversos casos? ¿Qué tipo de obstáculos encierra la propiedad distributiva? ¿Cuáles son las respuestas de los docentes frente a estos errores? ¿Cómo influyen estas respuestas en la construcción del conocimiento matemático dentro del esquema cognitivo del alumno?

En este artículo, se pretende aproximar las respuestas de las preguntas planteadas, mediante el relevamiento de los obstáculos a los que se enfrentan los alumnos al aplicar la propiedad distributiva en diversos contextos de la enseñanza de la matemática, en nivel medio y la categorización y análisis de los mismos a partir de las herramientas que brinda la ingeniería didáctica.

En primer lugar, en esta investigación se sostiene fuertemente la idea de que frente a un error es necesario indagar sobre su origen, como punto de partida, a fin de pensar y generar estrategias que permitan resolverlo.

Resulta imposible erradicar un obstáculo fuertemente arraigado en el alumno, si no se estudian previamente, las causas que lo originan.

En el caso particular de la propiedad distributiva, se trata de un concepto trabajado desde los primeros años de la escuela media; y sin embargo, trae aparejado una serie de errores constantemente presentes en las clases de matemática, aún en niveles terciarios y universitarios. Lo llamativo es que los docentes, detectamos regularmente estos errores y frecuentemente, proponemos un contraejemplo con la ilusión de dar por terminada esta dificultad. Sin embargo, los errores persisten a pesar de nuestros esfuerzos. Quizás, el desafío sea la búsqueda de nuevas estrategias para superar esta dificultad.

> Para dar sentido un objeto matemático no es suficiente con mostrar un contraejemplo, cosa que los profesores hacen usualmente. Por eso parece razonable recurrir también a otras situaciones que creen esquemas fáciles de recuperar, por estar apoyados en distintos esquemas de representación y no solamente en argumentos formales. La superación de los obstáculos es ciertamente difícil puesto que el conocimiento que tiene el alumno le ha sido útil en múltiples ocasiones. Aún así, su aparición es interesante ya que su superación va a implicar la adquisición de un conocimiento nuevo y mejor. (Ruano, Socas y Palarea, 2008, p. 73).

Objetivos planteados

El presente trabajo se propone los siguientes objetivos:

– Detectar las dificultades relacionadas a la aplicación de la propiedad distributiva en dos grupos de alumnos correspondientes a los últimos años de la escuela media y a los primeros del nivel terciario.

– Recopilar diversas investigaciones realizadas al momento que permitan fundamentar los obstáculos en la comprensión y aplicación de la propiedad distributiva.
– Realizar una propuesta acerca del abordaje de este tema en la escuela secundaria que permitan superar los obstáculos detectados.

Análisis Preliminar: dificultades, errores y obstáculos

En primer lugar, resulta fundamental retomar las ideas de dificultades, obstáculos y errores en la enseñanza de la matemática y sus interrelaciones, desarrollados por Socas (1997) quien considera que las dificultades pueden tener su origen en el desarrollo cognitivo del alumno, en el currículo de matemática o bien, en los métodos empleados en la enseñanza. Por otra parte, conocer el origen de las dificultades permitirá buscar y desarrollar estrategias que permitan superarlas.

La evidencia de estas dificultades es la existencia de obstáculos presentes en el aprendizaje de los alumnos que se ponen de manifiesto en forma de errores. De esta forma, se concluye que los errores pueden tener diferentes orígenes y por lo tanto, “va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste” (Socas, 1997, p. 125).

En este aspecto, Socas (1997) agrupa las causas principales de los errores algebraicos en tres grupos según su origen:

<table>
<tr><th colspan="3">Origen</th></tr>
<tr><td>Obstáculo</td><td colspan="2">Naturaleza abstracta de las herramientas algebraicas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ausencia de sentido</td><td colspan="2">Errores algebraicos con origen en la aritmética</td></tr>
<tr><td>Procedimientos (uso inapropiado de “fórmulas” o reglas)</td><td>Uso de la propiedad distributiva
Uso de recíprocos
Cancelación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lenguaje algebraico</td></tr>
<tr><td>Actitudes afectivas y emocionales</td><td colspan="2">Excesiva confianza, distracciones, bloqueos, olvidos, creencias, etc.</td></tr>
</table>

De la misma manera, Brousseau (1983) considera como obstáculo “aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas”. Por su parte, el autor hace una clasificación de los obstáculos de acuerdo a su origen:

- *Cognitivos:* relacionados con las características del desarrollo del alumno.
- *Didácticos*: relacionados con la elección y desarrollo del método de enseñanza.
- *Epistemológicos*: relacionados con las características propias del conocimiento matemático.

Respecto a las dificultades, Socas (1997) propone la siguiente clasificación:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos las matemáticas*: relacionadas con la comprensión y comunicación de objetos matemáticos. Socas (1997) sostiene que muchas dificultades tienen su origen en el lenguaje que se emplea en las clases de matemática. Por un lado, el uso de palabras que adquieren diferentes significados en el lenguaje habitual y en la matemática. Por otro lado, el uso de términos específicos de la matemática que resultan ser poco familiares. Y al mismo tiempo, el uso de palabras de igual significado dentro y fuera de la matemática genera incertidumbre en los alumnos.
- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático*: relacionadas con las características del razonamiento lógico propio de la matemática que no tiene nada que ver con los métodos deductivos formales. El alumno puede desarrollar el pensamiento lógico al resolver una situación problemática. El punto es que muchas veces, los problemas planteados se resuelven desde una "lógica escolar" muy diferente a la "lógica social" y esto ocasiona serias dificultades en el aprendizaje del alumno.
- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas*: relacionadas con el currículo y los métodos de enseñanza empleados. "El currículo debe estar organizado considerando las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en Matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares" (Socas, 1997, p. 135)
- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*: relacionados con el proceso de aprendizaje y desarrollo intelectual del alumno que brindan información relevante acerca de las características del razonamiento que se constituye esencial a la hora de diseñar propuestas didácticas.
- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas*: relacionadas con los sentimientos de tensión y miedo como consecuencia de diversas experiencias vividas en las clases de matemática.

DISEÑO DE LA SECUENCIA

Características de los grupos

Para organizar el trabajo, se divide a la población donde se realizará la experiencia en dos grupos.

Grupo A: formado por un quinto año de un colegio de nivel medio, conformado por 30 alumnos. La mayor parte de los mismos van a continuar sus estudios en nivel universitario. Son muy trabajadores y responden bien a las actividades y consignas. Son muy organizados para trabajar individualmente en clase.

Grupo B: formado por un quinto año de un colegio de nivel medio, conformado por 25 alumnos. En general, presentan grandes dificultades para la comprensión de consignas y el trabajo en clase. Dependen, en gran parte, de las explicaciones dirigidas por el docente.

Actividad propuesta

La actividad está planteada en el marco de una evaluación diagnóstica que se realiza anualmente al comenzar el año. Esta evaluación se desarrolla durante la primera semana de clases. En este trabajo, se analizan los resultados obtenidos en una de las actividades diseñadas para evaluar los conceptos y estrategias de los alumnos en la resolución de operaciones con expresiones algebraicas.

Se entregó a cada alumno una fotocopia con la actividad. La consigna es discutir con otro compañero las posibles soluciones a cada actividad y luego, se realizará una puesta en común. El tiempo destinado a esta actividad fue de un módulo de clase de 80 minutos:

Actividad: Indicar, en cada caso, la/s opción/es correcta/s. JUSTIFICA TU ELECCIÓN: (n.e.c.: ninguna de las opciones es correcta)

a) La expresión $x+2x+5x+2$ es igual a:

☐ $8x^3+2$ ☐ $2\cdot(4x+1)$ ☐ $10x$ ☐ n.e.c.

b) La expresión $2\cdot(x-y)$ es igual a:

☐ x^2-y^2 ☐ $2x-y$ ☐ $4x-6y-2x+4y$ ☐ n.e.c.

c) La expresión x^2+2^2 es igual a:

☐ x^2+4 ☐ $2x+4$ ☐ $(x+2)^2$ ☐ n.e.c.

d) La expresión 2^x+2^x es igual a:

☐ 4^x ☐ 2^{2x} ☐ 2^{x^2} ☐ n.e.c.

e) La expresión $\sqrt{9x+9y}$ es igual a:

☐ $3\cdot\sqrt{x+y}$ ☐ $\sqrt{9(x+y)}$ ☐ $3x+3y$ ☐ n.e.c.

El objetivo de esta actividad es detectar el uso generalizado de la propiedad distributiva los en la resolución de diversas operaciones con expresiones algebraicas.

Análisis a priori

* Con la actividad (a), se espera que los alumnos sumen correctamente expresiones algebraicas y extraigan el factor común en la expresión obtenida para seleccionar la opción correcta.

* En la actividad (b), se presenta una situación en la que para poder determinar la equivalencia de dos expresiones, de debe hacer un trabajo algebraico con ambas expresiones. Normalmente, las opciones dadas corresponden a operaciones acabadas. En este caso, se espera que los alumnos adviertan la equivalencia simplificando las operaciones presentadas en las soluciones.

* En las actividades (c), (d), (e) y (f), se espera detectar el uso incorrecto de la propiedad distributiva generalizándola para el caso de la potenciación y radicación.

* Se descarta la posibilidad de que los alumnos no resuelvan las actividades debido a que se presentan operaciones con expresiones algebraicas sencillas que no evidencian

dificultades y por otro lado, el estilo de actividad de opciones múltiples invita a una resolución rápida.

* Puede ocurrir que algunos alumnos no sepan justificar su elección. Generalmente, las justificaciones traen aparejadas serias dificultades. Por esta razón, se permite el trabajo grupal y se les explicó a los alumnos que se aceptarán justificaciones algebraicas y coloquiales.

Experimentación

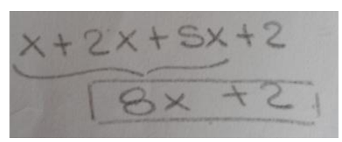
En la siguiente tabla, se dan los porcentajes de las respuestas obtenidas en los grupos A y B. Cabe aclarar que en el enunciado quedaba abierta la posibilidad de más de una opción correcta en cada ejercicio. Las celdas sombreadas corresponden a las respuestas correctas:

Actividad	Opción A		Opción B		Opción C		N.E.C		No resuelve	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
a	7,4	13,6	44,4	54,4	0	4,5	48,1	22,7	0	0
b	0	4,5	0	0	44,4	9,1	55,5	86,4	0	0
c	92,6	95,5	0	0	70,4	54,5	0	0	0	0
d	37	27,3	7,4	13,6	7,4	13,6	48,1	40,9	7,4	13,6
e	3,7	9,1	59,3	63,6	55,5	59,1	11,1	4,5	0	0

<u>Comentarios de la experimentación:</u>

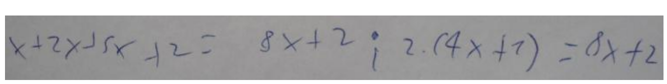
Ni bien se les da la consigna de la actividad, los alumnos comienzan a leer la fotocopia e intentan resolverlo en forma individual. Recién en la actividad (c) comienzan a consultar y debatir con otros compañeros.

- **Actividad A**



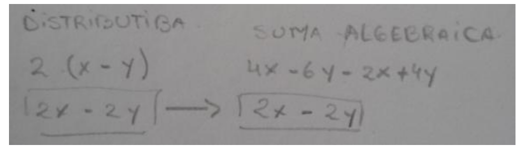
Los alumnos que seleccionaron la opción "n.e.c." justificaron su elección explicando que la opción correcta sería "$8x+2$". La mayor parte de los alumnos del grupo A seleccionaron esta opción. Esta elección puede tener dos explicaciones. Por un lado, no advertir la presencia del factor común en la expresión, dificulta la visualización de la equivalencia con la expresión "$2\cdot(4x+1)$"; por otro lado, se evidencia una de las categorías que utilizan Caronía, Zoppi, Polasek, Rivero y Operuk, (2008) en la clasificación de los errores en álgebra. En este aspecto, los autores se refieren "al orden en que efectúan las operaciones". En general, los alumnos tienen fuertemente arraigada la idea aritmética de que el orden de las operaciones es siempre de izquierda a derecha. En este caso particular, muchos alumnos descartaron la posibilidad de aplicar la propiedad distributiva (claramente válida) en la expresión "$2\cdot(4x+1)$" por tratarse de una "respuesta" y no de un "cálculo a resolver".

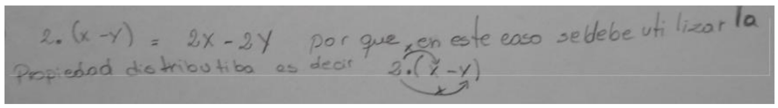
En cambio, en el grupo B muchos alumnos advirtieron que al aplicar la propiedad distributiva en la expresión "$2\cdot(4x+1)$", se llegan a expresiones equivalentes.



- **Actividad B**

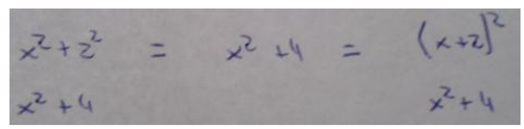
En esta actividad, se revierte la situación anterior. El grupo A advierte claramente que al agrupar términos semejantes en la opción (c), se obtiene una expresión equivalente a la dada. Sin embargo, el grupo B determina que ninguna de las opciones dadas es correcta porque al aplicar la propiedad distributiva se obtiene "$2x-2y$".

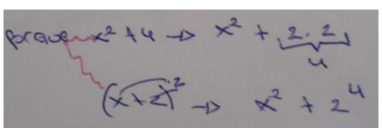




- **Actividad C**

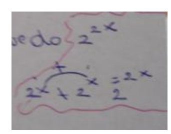
En general, no presentaron dificultad para señalar la equivalencia entre las expresiones "x^2+2^2" y "x^2+4". No obstante, se advierte la generalización de la propiedad distributiva al seleccionar la opción $(x+2)^2$" que Socas (1997) tipifica como "error de procedimiento" originado por el uso inapropiado de fórmulas y procedimientos válidos en otros contextos y que, frente al problemas no familiares, los hacen extensivos. Es decir, lo emplean linealmente "ya que sus experiencias anteriores son compatibles con la hipótesis de linealidad".





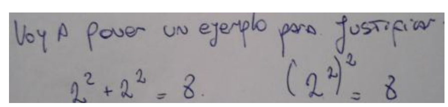
Es notable que muy pocos alumnos expresaran que la opción (c) no es válida porque la potenciación no es distributiva respecto a la suma. Muchos, al marcar la opción (a) descartaron la posibilidad de la existencia de otra opción.

- **Actividad D**

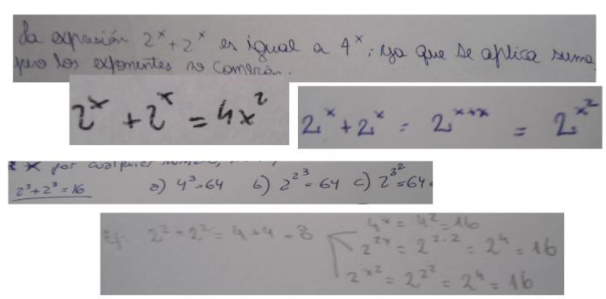


En primer lugar, llama la atención que es la única actividad que algunos alumnos no se animaron a dar una opción correcta.

Si bien muchos alumnos no supieron justificar su elección, resultan particularmente interesantes las justificaciones que aparecen en esta actividad aún conduciendo a la respuesta correcta. Igual que en la actividad anterior, algunas tienen que ver con la aplicación incorrecta de propiedades. Y otras, evidencian el uso de la verificación como estrategia válida justificar la equivalencia o no, de expresiones algebraicas.

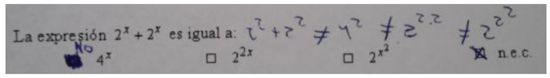


Respecto al uso de ejemplos para la justificación de la elección, está íntimamente relacionado al proceso de verificación de ecuaciones fuertemente adquirido en años anteriores. Es lo que



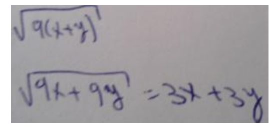
Caronía y otros (2008) denominan “la posibilidad de control de sus resultados”.

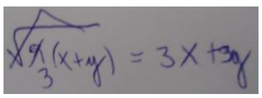
No obstante, se observa que el uso de ejemplos triviales, en algunos casos, conduce a conclusiones erróneas.



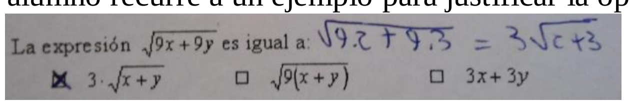
- **Actividad E**

La mayor parte de los alumnos no tuvo dificultad en advertir la equivalencia entre las expresiones “$\sqrt{9x-9y}$” y “$\sqrt{9\cdot(x-y)}$”. Sin embargo, gran parte de estos alumnos descartaron la posibilidad de aplicar la propiedad distributiva de la radicación respecto del producto. Y en tal caso, sólo calculan la raíz a la parte numérica. Caronía y otros (2008) hacen referencia a este error como “la no-aceptación de la falta de cierre”. Relacionado con la idea aritmética, fuertemente arraigada, de que los cálculos tienen como respuesta un número concreto. Por esta razón, calculan la raíz cuadrada sólo a la parte numérica y no a la literal.





Por otro lado, un solo alumno recurre a un ejemplo para justificar la opción correcta.



Análisis a posteriori

- En ningún caso los alumnos proponen la extracción del factor común para justificar la equivalencia de expresiones. Por el contrario, todos aplican la propiedad distributiva.
- Resulta llamativo que gran parte de los alumnos no adviertan que al agrupar términos semejantes, en la actividad (b), se obtienen expresiones equivalentes.
- Se confirma el uso generalizado de la propiedad distributiva en casos no válidos.
- Sorprendió el uso de ejemplos para justificar las elecciones en cada actividad. Sin embargo, durante el desarrollo de la clase muchos alumnos que proponían ejemplos y contraejemplos se quedaban con la incertidumbre de no poder determinar una solución “exacta” a la expresión dada. Podían asegurar que ninguna de las planteadas era correcta, pero no podían determinar otra expresión que sea equivalente a la original.
- Al hacer la puesta en común, se expuso el ejemplo trivial propuesto por uno de ellos que determinaba como válida una equivalencia que no lo era. En ese momento, se originó una discusión que rápidamente dio lugar a un contraejemplo y finalmente, se discutió acerca de la validez del uso de ejemplos para justificar equivalencias válidas e inválidas.
- Respecto a la actividad (d), que algunos alumnos no se animaron a responder, se justificaron explicando que el año anterior tuvieron grandes dificultades con las ecuaciones exponenciales. Socas (1997), ubica esta dificultad en la categoría “asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas”.

Conclusiones

Resulta evidente que el trabajo con la propiedad distributiva en la educación media, requiere una revisión urgente por parte de los docentes.

Según Pochulu (2012), algunas de las causas que determinan errores persistentes en las clases de matemáticas son: uso de algoritmos sin fundamentos teóricos; uso de reglas poco trascendentales como requisitos indispensables para la ejecución de cálculos aritméticos o resolución de ecuaciones; desarrollos muy apegados a lo algebraico; abordaje de contenidos descontextualizados y poco articulados con los restantes; entre otras.

La experiencia indica que la mayor parte de las dificultades surgen cuando intervienen operaciones matemáticas como la radicación y potenciación. Los principales errores en su aplicación tienen que ver con la generalización del uso de la propiedad distributiva en contextos en lo que no es válida. Por lo tanto, se propone retomar este concepto en diversos contextos y a lo largo de toda la escolaridad a fin de enriquecer la adquisición de este concepto con diversos enfoques. Por otro lado, se sugiere el uso de construcciones geométricas que fundamenten las equivalencias algebraicas básicas. Y, al mismo tiempo, diseñar actividades que den sentido al uso de estas equivalencias.

Finalmente, resulta fundamental tener presente que el uso de contraejemplos como herramienta para explicar la no equivalencia entre expresiones algebraicas puede traer como consecuencia el uso incorrecto de la propiedad si el alumno propone un caso particular. El uso de contraejemplos es muy común en las clases de matemática, no obstante la mayor parte de los docentes no se detienen a analizar las características cognitivas y epistemológicas que hay detrás de este concepto.

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2)*, 165-198.

Caronía, S.; Zoppi, A.; Polasek, M.; Rivero, M.y Operuk, R. (2008). Un análisis desde la didáctica de la matemática sobre algunos errores en el álgebra. *Premisa 10 (39)*, 27-35.

Pochulu, M. (sf). *Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad*. Recuperado el 7 de mayo de 2012 de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/experiencias/An%C3%A1lisis%20y%20categorizaci%C3%B3n%20de%20errores%20en%20el%20aprendizaje%20de%20la%20matem%C3%A1tica%20en%20alumnos%20que%20ingresan%20a%20la%20universidad.*Pochulu,%20Marcela.%20*Pochulu,%20M.%20An%C3%A1lisis%20y%20categorizaci%C3%B3n%20de%20errores%20en%20el...200.pdf

Ruano, R.; Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2 (2)*, 61-74.

Socas Robayna, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico y otros (Ed.). *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE/Horsori.