DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE LA UNIVERSIDAD

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar
Nivel: Medio - Terciario - Universitario ciclo Básico

Palabras clave: Variación. Cambio. Representaciones. Funciones.

Resumen

Con la finalidad de favorecer la comprensión de conceptos y procedimientos asociados a las funciones y al cálculo, nos propusimos generar acciones que propicien el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en nuestros estudiantes de primer año de la universidad.
Como parte del pensamiento matemático avanzado, el término pensamiento variacional se utiliza con la intención de profundizar en lo que se refiere al aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio.
La formación del pensamiento variacional implica en primer lugar el tratamiento de situaciones variacionales. Las preguntas fundamentales son: qué varía, cómo varía lo que varía, cómo se relacionan los cambios.
En relación a los procesos cognitivos implicados, las situaciones deben ser tales que los alumnos no necesiten sólo recurrir a la memoria para responderlas, sino que los lleven a que validen, modifiquen o construyan argumentos. En este sentido resulta fundamental el tratamiento y conversión entre distintas representaciones de las funciones.
Presentamos la producción de un grupo de alumnos al resolver tres actividades preparadas especialmente para tratar de desarrollar estos elementos en el aula. Intentamos resaltar los argumentos de los estudiantes al abordar el estudio de la variación.
En particular, trabajar con funciones facilita que emerjan de manera natural estrategias y argumentos de tipo variacional. Su desarrollo permite a los estudiantes significar los conocimientos que ponen en juego y construir nuevo conocimiento matemático.
Poder identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir su comportamiento, cuantificarlo, son indicadores del pensamiento variacional que pretendemos desarrollar.

Introducción

A través de la matemática, las ciencias interpretan diversos fenómenos físicos y sociales, utilizando métodos cuantitativos y cualitativos que favorecen la resolución de problemas y la toma de decisiones. Los conocimientos matemáticos aparecen en situaciones, no solamente relacionadas con las ciencias, sino también surgidas de la vida diaria. La matemática juega un rol importante cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y las variaciones que se producen. Se crean modelos abstractos para describirlos y la medición del cambio de esos fenómenos es un aspecto esencial de la variación.

En el marco de la educación matemática se han realizado en los últimos años numerosas investigaciones que resaltan la importancia de la noción de variación, tanto por su relación con diversos conceptos matemáticos (rapidez de variación, función, derivada, integrales,

ecuaciones diferenciales, etc.) como porque permite caracterizar un estilo propio de pensamiento (Cantoral y Farfán, 2003).
El pensamiento variacional pone especial atención en la identificación y el entendimiento de los fenómenos de cambio. Su desarrollo implica todos los procesos propios del pensamiento matemático avanzado, desde la representación y visualización, hasta los procesos de abstracción (la generalización, el análisis, la síntesis, la inducción y la deducción), cuando el foco de estudio son los procesos de variación y cambio.

En los estándares básicos de competencias desarrollados en Colombia por el Ministerio de Educación Nacional (2006, p. 66) se señala:

> […] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Agregan que uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir, desde la educación primaria, distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, más adelante, del cálculo diferencial e integral. Cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y la matemática misma.

A partir de lo expuesto nos propusimos generar acciones que propicien el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en nuestros estudiantes de primer año de la universidad, de manera de favorecer la comprensión de conceptos y procedimientos asociados a las variables, las funciones y diferentes contenidos del cálculo diferencial.

Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional

Como parte del pensamiento matemático avanzado, el término pensamiento variacional se utiliza con la intención de profundizar un poco más en lo que se refiere al aprendizaje y manejo de funciones como modelo de situaciones de cambio. Se trata de desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos. Está relacionado con la capacidad para dar sentido a las funciones numéricas, manejándolas de manera flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas.

Distintos elementos dan cuenta del desarrollo del pensamiento variacional. Implica en primer lugar el tratamiento de situaciones variacionales. Las preguntas fundamentales son: qué varía, cómo varía lo que varía, cómo se relacionan los cambios.

Específicamente, entendemos por una situación variacional al conjunto de problemas que requieren de un tratamiento variacional tanto desde el punto de vista de las funciones cognitivas de quienes las abordan como desde la perspectiva matemática y epistemológica.

Estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. Es en este sentido que nos referimos a los argumentos de tipo variacional. Decimos que una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005).

En relación a los procesos cognitivos implicados, las situaciones deben ser tales que los alumnos no necesiten sólo recurrir a la memoria para responderlas, sino que los lleven a que validen, modifiquen o construyan argumentos. El tratamiento y conversión entre distintos sistemas de representación resulta fundamental para el reconocimiento de los rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones. Duval (1998, 2006) expresa que la actividad matemática se basa siempre en alguna secuencia de cambios sucesivos de una representación a otra. El uso de distintas representaciones para un mismo objeto aumenta la capacidad de pensamiento del sujeto sobre ese objeto y por lo tanto su conocimiento del mismo. En base a esto, adoptamos la premisa de que los sistemas de representación no sólo son necesarios para comunicar conocimiento sino que resultan imprescindibles para la actividad cognoscitiva del pensamiento.

Algunas actividades y las producciones de estudiantes

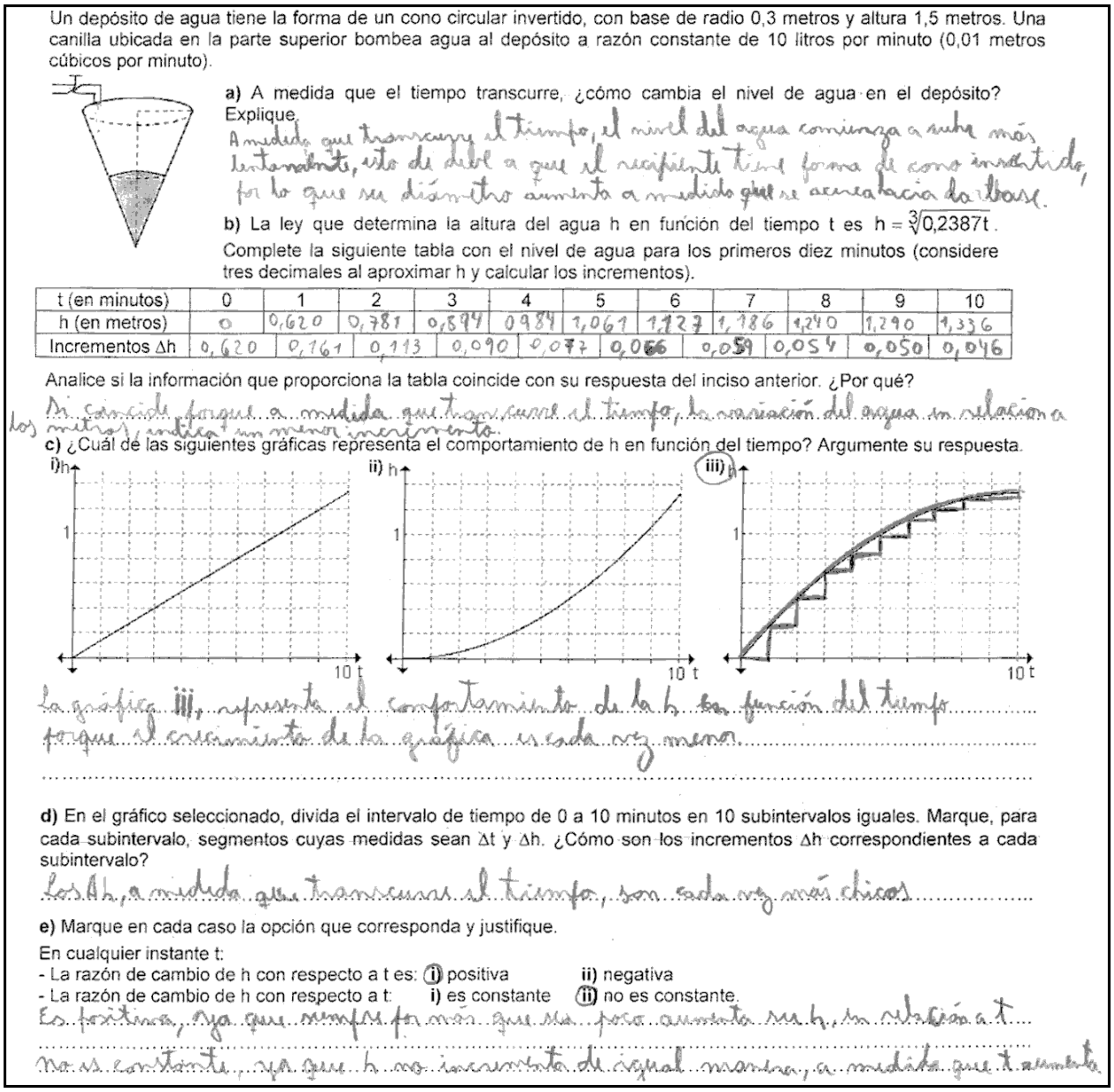
Sabiendo que el significado y el sentido acerca de la variación se establecen a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios son los referidos a fenómenos de cambio, propiciamos el desarrollo de actividades que favorezcan la construcción de significados, tanto de los conceptos como de los procesos, basados siempre en ideas variacionales.

Con la finalidad de introducir los contenidos correspondientes al estudio de funciones (crecimiento, extremos, concavidad, puntos de inflexión), diseñamos e implementamos una serie de situaciones consistentes en problemas, ejercicios, preguntas, relacionados entre sí, que den oportunidad al alumno de moverse a través de distintos sistemas de representación, partiendo de las ideas que posee sobre la variación y el cambio. Para su elaboración consideramos actividades propuestas por Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2003), aunque los enunciados y consignas fueron adaptados.

Los fenómenos analizados en el contexto de las situaciones problemáticas diseñadas, son de naturaleza tal que permiten advertir, de manera intuitiva, ciertos aspectos de las razones de cambio de las magnitudes involucradas. Esta información se puede interpretar a partir de los comportamientos de las magnitudes y está presentada a través de representaciones algebraica (ley de la función), numérica (tabla), gráfica (representación en un sistema de coordenadas) y verbal. Ligado al análisis de estos acercamientos al comportamiento de las magnitudes, se verán surgir nociones como la de concavidad de una curva, máximos y mínimos, así como la de punto de inflexión.

Al momento de resolver las actividades, los alumnos ya habían desarrollado los contenidos referidos a funciones, como así también estudiado la definición de derivada, su interpretación física como razón de cambio y la relación de esta razón con la pendiente de la recta tangente, siempre desde un punto de vista variacional.

Presentamos la producción de un grupo formado por dos alumnos y analizamos sus argumentos al abordar el estudio de la variación en tres situaciones distintas.
La figura 1 corresponde a la resolución de una actividad en la que se analiza el comportamiento de una magnitud que crece cada vez más rápido, por lo que permite abordar la problemática del crecimiento cuando la razón de cambio no es constante.


Un depósito de agua tiene la forma de un cono circular invertido, con base de radio 0,3 metros y altura 1,5 metros. Una canilla ubicada en la parte superior bombea agua al depósito a razón constante de 10 litros por minuto (0,01 metros cúbicos por minuto).

a) A medida que el tiempo transcurre, ¿cómo cambia el nivel de agua en el depósito? Explique.
A medida que transcurre el tiempo, el nivel del agua comienza a subir más lentamente, esto se debe a que el recipiente tiene forma de cono invertido, por lo que su diámetro aumenta a medida que se acerca hacia la base.

b) La ley que determina la altura del agua h en función del tiempo t es $h = \sqrt[3]{0{,}2387t}$.
Complete la siguiente tabla con el nivel de agua para los primeros diez minutos (considere tres decimales al aproximar h y calcular los incrementos).

t (en minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h (en metros)	0	0,620	0,781	0,894	0984	1,061	1,127	1,186	1,240	1,290	1,336
Incrementos Δh	0,620	0,161	0,113	0,090	0,077	0,066	0,059	0,054	0,050	0,046	

Analice si la información que proporciona la tabla coincide con su respuesta del inciso anterior. ¿Por qué?
Si coincide porque a medida que transcurre el tiempo, la variación del agua en relación a los metros, indica un menor incremento.

c) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa el comportamiento de h en función del tiempo? Argumente su respuesta.

La gráfica iii, representa el comportamiento de la h en función del tiempo porque el crecimiento de la gráfica es cada vez menor.

d) En el gráfico seleccionado, divida el intervalo de tiempo de 0 a 10 minutos en 10 subintervalos iguales. Marque, para cada subintervalo, segmentos cuyas medidas sean Δt y Δh. ¿Cómo son los incrementos Δh correspondientes a cada subintervalo?
Los Δh, a medida que transcurre el tiempo, son cada vez más chicos

e) Marque en cada caso la opción que corresponda y justifique.
En cualquier instante t:
- La razón de cambio de h con respecto a t es: i) positiva ii) negativa
- La razón de cambio de h con respecto a t: i) es constante ii) no es constante.

Es positiva, ya que siempre por más que sea poco aumenta su h, en relación a t
no es constante, ya que h no incrementa de igual manera, a medida que t aumenta

Figura 1

El primer inciso permitió realizar a los alumnos un análisis del cambio que sufre la cantidad de agua contenida en el recipiente a medida que transcurre el tiempo.

“La descripción de la manera que las magnitudes se comportan en la situación, es el acercamiento cualitativo al fenómeno que permitirá sacar algunas conclusiones y hacer las primeras predicciones de lo que sucederá con los elementos involucrados con el transcurso del tiempo" (Castiblanco, Urquina, Acosta y Rodríguez, 2004, p. 18).

De manera obvia, el nivel de agua aumenta, pero es posible apreciar de manera intuitiva que a medida que pasa el tiempo, el nivel de agua crece cada vez más lentamente. Observamos cómo los alumnos describieron verbalmente la relación entre las variables involucradas, utilizando vocabulario que refleja el comportamiento variacional.

Los siguientes incisos ayudaron a, según el nivel de comprensión de la situación planteada, confirmar o complementar el análisis, trabajando desde los registros numérico y gráfico. La medición de los cambios constituye el análisis cuantitativo de la situación.

En el inciso b) se presenta la expresión algebraica de la función. Los alumnos debían utilizarla para completar la tabla. La representación numérica les permitió determinar diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. Al completar la segunda fila con los valores h correspondientes a la altura del agua, pudieron reconocer que el nivel de agua no crece a razón constante con respecto al tiempo.

Observamos cómo utilizaron la diferencia para calcular los incrementos de la altura del agua y cómo argumentaron teniendo en cuenta estos resultados, refiriéndose a la "variación del agua". Las diferencias indican el cambio de la variable como un proceso de variación, por lo tanto constituyen el elemento básico que permite analizar cuantitativamente el comportamiento de las funciones.

A partir del tratamiento realizado en los registros verbal y numérico, no tuvieron dificultades para convertir la información al registro gráfico. Dado que el nivel de agua crece cada vez más lento, la gráfica debe tener determinada forma, lo que se corresponde con una característica del tipo de comportamiento que se está analizando. El reconocimiento de la gráfica exige centrar la atención en el comportamiento lineal o curvo y en la manera en que cambia la gráfica de acuerdo a la forma del recipiente.

> El papel de los ejes cartesianos como referencia para la representación del comportamiento de algún fenómeno, es primordial para la resignificación del fenómeno mismo, pues de ellos depende la interpretación de las relaciones que se pretendan expresar, o bien, el significado mismo de lo que una gráfica expresa (Méndez y Gómez, 2011, p. 58).

En el trabajo presentado notamos cómo los alumnos reconocieron la gráfica correspondiente a la situación planteada, apareciendo por primera vez la expresión "cada vez menor" al referirse al comportamiento del crecimiento.

La representación geométrica pedida en el inciso d) los llevó a asociar el cambio de las variables involucradas con longitudes de segmentos. Observamos que dibujaron correctamente y relacionaron la medida de los segmentos verticales con los cambios de la variable dependiente, lo que les permitió corroborar que dichos cambios son "cada vez más chicos".

En el inciso e) aparecen las razones de cambio instantáneas, relacionando los cambios de la altura con los cambios del tiempo en cualquier instante t. Vemos, en la explicación verbal de los alumnos, cómo relacionaron el signo de la razón de cambio con el crecimiento de la función y cómo relacionaron el comportamiento de ambas variables. La última respuesta permite terminar de analizar toda la situación en la que el nivel de agua crece con respecto al tiempo transcurrido. Aunque la razón de cambio es siempre positiva, no es constante, lo que nos permite caracterizar el crecimiento y, a la vez, diferenciarlo de otros tipos de crecimiento.

Observamos cómo el contexto se convierte en una herramienta que permite el análisis de la variación, propiciando de esta manera el desarrollo de procesos de pensamiento.

A continuación presentamos la resolución de una actividad que permite considerar la importancia de analizar fenómenos donde la gráfica se presente más que como una simple representación de puntos, como una forma de describir su comportamiento (Figura 2).

> En la mayoría de los casos las gráficas son usadas como una forma de representación de la información. Generalmente las asociamos a una tabla de datos, por lo que el encontrar los puntos que representen a dicha tabla es suficiente para dibujar la gráfica. Sin embargo, en muy pocos casos se analiza la potencialidad de mirar a las gráficas como una forma de interpretar el comportamiento de cierto fenómeno (Méndez y Gómez, 2011, p. 54).

Se representa en este caso una combinación de comportamientos. La función describe el crecimiento de la cantidad de células con respecto al tiempo, pero un crecimiento diferente en distintos intervalos. Las preguntas persiguen el análisis cualitativo de las magnitudes involucradas.

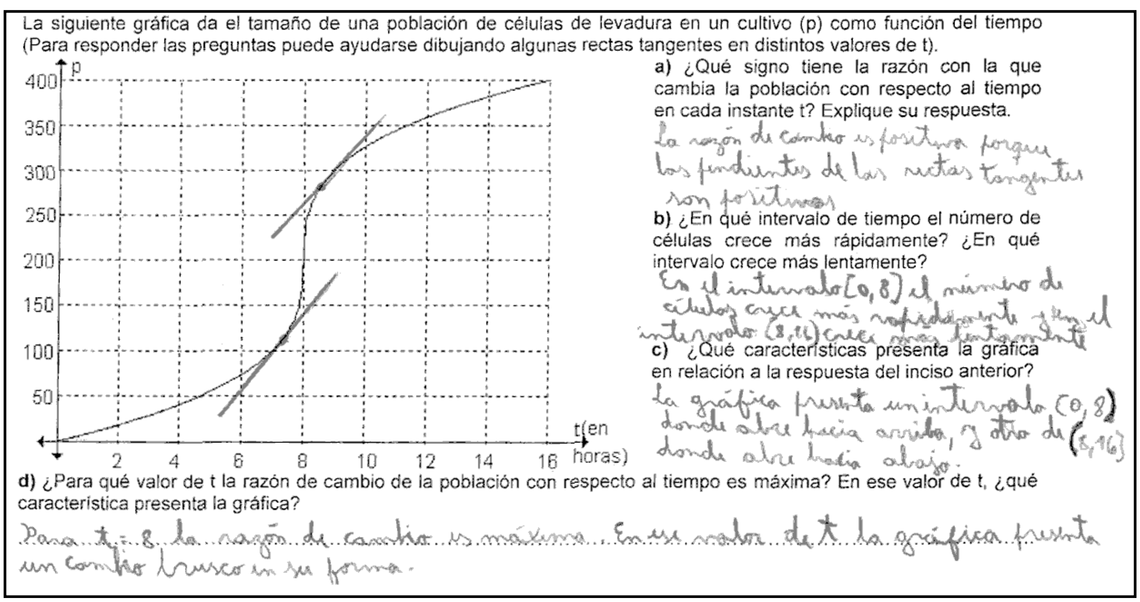


Figura 2

Su resolución requirió identificar el intervalo donde el crecimiento es más lento, que se corresponde con el tramo de la gráfica que abre hacia abajo, mientras que cuando el crecimiento es cada vez más rápido la gráfica abre hacia arriba. Esto puede observarse si se piensa en el cambio que sufre la pendiente de la recta tangente a la curva, es decir, la derivada, que en este caso representa la variación de la cantidad de células con respecto al tiempo. El trazado de rectas tangentes ayuda a observar el comportamiento variacional de la función, al relacionar las pendientes de las distintas rectas en cada instante.

A partir de la gráfica que modela el fenómeno, es posible reflexionar también sobre el punto de inflexión que se forma. Es en este punto donde cambia la forma en la que varía el tamaño de la población. Se combina el tratamiento del comportamiento global y local del fenómeno.

El inciso a) pretende la relación entre el signo de la razón de cambio y el crecimiento de la función. Observamos que los alumnos justificaron teniendo en cuenta el signo de las pendientes de las rectas tangentes. No analizaron el comportamiento diferente en t = 8, instante en que la recta tangente es vertical y la razón de cambio no está definida. Consideramos que asociaron crecimiento con razón de cambio positiva en cada instante.

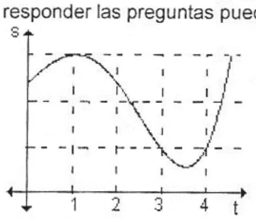
Sin embargo, sí reconocieron el cambio de comportamiento del crecimiento en ese valor, considerándolo en las respuestas de los siguientes incisos.

Notamos en el inciso b) que fueron capaces de identificar los dos intervalos en donde el comportamiento es diferente y analizar que en el primero el número de células "crece más rápidamente" mientras que en el segundo "crece más lentamente". En el inciso c) observaron las características gráficas que describen estos comportamientos: "abre hacia arriba", "abre hacia abajo".

La respuesta del último inciso los ayudó a identificar el valor de t donde el comportamiento de la función cambia y a relacionar este comportamiento con la forma de la gráfica.

A continuación presentamos la resolución de una actividad que presenta, nuevamente de manera gráfica, un fenómeno que manifiesta diferentes comportamientos. En este caso se agrega la dificultad de que la magnitud involucrada experimenta un crecimiento en determinados intervalos, mientras que en otros intervalos decrece. La resolución del equipo se muestra en la figura 3.

Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal. La gráfica muestra su posición en función del tiempo. (Para responder las preguntas puede ayudarse dibujando algunas rectas tangentes en distintos valores de t).



a) ¿En qué intervalos de tiempo la partícula se mueve hacia la derecha y en qué intervalos hacia la izquierda? Fundamente su respuesta.

En los intervalos [0,1) y (3,5 ; ∞], la partícula se mueve hacia la derecha porque la gráfica crece.
En el intervalo (1; 3,5] la partícula se mueve hacia la izquierda porque la gráfica decrece.

b) ¿En qué intervalos de tiempo la partícula está acelerando y en qué intervalos está desacelerando? Explique.

En el intervalo [0; 2,5), está desacelerado, y en el (2,5 ; ∞), está acelerado, siendo la pendiente más inclinada, es mayor velocidad.

Figura 3

Dado que la situación corresponde al movimiento de una partícula, no fue sencillo relacionar el comportamiento de la gráfica con el proceso representado.

En actividades resueltas con anterioridad, los alumnos habían desarrollado los aspectos relacionados al crecimiento de la gráfica a través del registro tabular. Si al transcurrir el tiempo t, la gráfica de la posición crece, entonces la partícula está avanzando. Si la gráfica decrece, la partícula está retrocediendo.

Es posible profundizar el análisis si observamos que a medida que transcurre el tiempo, la razón de cambio de la posición con respecto el tiempo no es constante. Esto es posible inducirlo a partir de la representación gráfica, dado que no es una recta.

Observamos en la resolución del inciso a) que, sin tener en cuenta los extremos de los intervalos, los alumnos describieron correctamente el comportamiento de la partícula, determinando los intervalos donde "se mueve hacia la derecha" y "se mueve hacia la izquierda".

En el inciso b) distinguieron aproximadamente los intervalos en los que la partícula acelera y desacelera a partir del comportamiento de las pendientes de las tangentes a la curva. Que puedan observar que "…siendo la pendiente más inclinada, es mayor velocidad" es un logro muy importante para introducir el estudio de la función a partir del análisis del comportamiento de la derivada.

Reflexiones

Hemos observado cómo, a partir del análisis de la variación en distintas situaciones, los alumnos describieron el comportamiento de los fenómenos, resaltando los aspectos variacionales. En particular, trabajar con funciones facilita que emerjan de manera natural estrategias y argumentos de tipo variacional. Su desarrollo permite a los estudiantes significar los conocimientos que ponen en juego.

Ellos hacen uso de sus conocimientos previos, los cuales son replanteados dentro de la situación, adquiriendo nuevos sentidos y profundizando en su significado. Esto facilita la construcción de nuevo conocimiento, como por ejemplo en este caso, las nociones de concavidad y punto de inflexión, sin necesidad de llegar a formalizar los conceptos.

Un problema común es la falta de vinculación entre las distintas representaciones de una función. Los estudiantes suelen describir verbalmente de manera correcta lo que sucede en un fenómeno, en otros casos pueden construir una gráfica a partir de datos observados, o resolver un problema a partir de la expresión analítica de la función. Sin embargo, la conversión de un sistema de representación a otro, ocasiona dificultades. La exigencia de las producciones escritas favorece el tratamiento y conversión entre distintas representaciones. La calidad de la comprensión de la situación de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las mismas.

La valoración de las actividades desarrolladas en clase, atendiendo básicamente al efecto que tienen en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de nuestros estudiantes, se constituye en el punto de partida para el rediseño y adecuación de las situaciones inicialmente planteadas. Esto se convierte en un proceso continuo, en la búsqueda de mejorar el entendimiento de las nociones relacionadas a las funciones y el cálculo.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán R. (2003). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza. *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 185-203). México: Trillas.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castiblanco, A.; Urquina, H.; Acosta, E. y Rodríguez, F. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Serie Documentos. Colombia: Enlace Editores Ltda.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol. 5 (1993).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME (9)* 1, 143-168. Traducción del francés: Humberto Quesada.

Méndez, C. y Gómez, K. (2011). Situaciones de Aprendizaje para profesores. Llenado de recipientes. En R. Farfán (coord.). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente* (pp. 54-63). Recuperado el 5 de marzo de 2012 de http://www.proyectosmatedu.cinvestav.mx/situaciones/docs/LIBRO_DPM_2011.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias. Colombia: Magisterio.

Salinas, P.; Alanís, J.; Pulido, R.; Santos, F.; Escobedo, J. y Garza, J. (2003). *Elementos del Cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. México: Trillas.