RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Maria Ilíria Rossi – Norma Suely Gomes Allevato
iliria@fatecsp.br- normallev@uol.com.br
Faculdade de Tecnologia de São Paulo, Brasil – Universidade Cruzeiro do Sul, Brasil

Tema: II.2 - La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático
Modalidad: CB
Nivel educativo: Superior
Palavras chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Ensino de Cálculo

Resumo

Esse artigo relata uma pesquisa (Rossi, 2012) desenvolvida com estudantes de tecnologia da modalidade de mecânica e civil de uma faculdade pública de São Paulo/SP/Brasil. A metodologia da pesquisa foi qualitativa e os procedimentos empregados foram a pesquisa participante, a observação participante e a análise documental. (Bogdan & Biklen, 1994).Utilizando como estratégia didática a metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas (Allevato & Onuchic, 2009), foram propostas atividades que envolvessem e levassem os estudantes à aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral. As atividades aplicadas tiveram como objetivo instigar os alunos, por meio de problemas, a formarem passo a passo o próprio conhecimento, criando uma cumplicidade professor-aluno durante a construção do pensamento matemático. Repensando em como buscar novas formas de ensino de Cálculo, especificamente em Equações Diferenciais, escolhemos problemas que promovessem motivação e colocassem em ação as potencialidades dos alunos durante o processo de aprendizagem.

Introdução

O ensino do Cálculo Diferencial e Integral, em um grande número de instituições de ensino, ainda é desenvolvido nos moldes ditos tradicionais: o professor “coloca” a teoria matemática na lousa, apresenta exemplos e, às vezes, algum problema de aplicação; o aluno copia, faz algumas perguntas, “tira” as dúvidas e resolve uma lista de exercícios repetitivos elaborados pelo professor que, depois, são corrigidos em aula. Tentando mudar esse estilo de trabalho, buscam-se metodologias de ensino mais atuais, que enriqueçam tanto aluno como professor propiciando a abertura para a promoção de renovados valores e atitudes. O presente trabalho vai ao encontro dessas questões, e está estruturado de modo que na próxima seção são discutidos alguns aspectos sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Também são feitas algumas reflexões sobre a forma como a Resolução de Problemas foi considerada na investigação que gerou este trabalho (Rossi, 2012). Então são apresentados o contexto e a metodologia empregada na pesquisa que gerou os dados descritos e analisados em seguida. Encerramos com algumas considerações finais e as referências

O Ensino e a Aprendizagem do Cálculo

A sociedade atual, principalmente com a presença das tecnologias de informação e comunicação, tem colocado alunos e professores diante de demandas por novas formas de aprender e ensinar, formas que promovam a criatividade, a iniciativa e que sejam menos enfadonhas para os alunos.

Em particular no Ensino Superior, dificuldades e questões envolvendo o ensino de Cálculo[1] vêm sendo discutidas em vários estudos. Segundo Tall (1985), as dificuldades encontradas para aprender e ensinar Cálculo não são fáceis de serem explicadas. Qualquer formulação intuitiva das idéias do Cálculo assombra os estudantes. A primeira barreira com a qual o estudante é confrontando, por exemplo, é o conceito de limite. Ele envolve cálculos que são, com frequência, realizados por simples operações aritméticas e algébricas, mas os limites infinitos ou no infinito, que podem somente ser realizados por argumentos indiretos, tornam-se rodeados de mistério quando a variável se torna arbitrariamente pequena ou infinitamente grande. Professores se esforçam para evitar uma abordagem excessivamente formal ou excessivamente informal, privilegiando o caráter técnico.

No Brasil, Frota (2007) e Rezende (2003), entre outros pesquisadores, se preocupam em discutir como ensinar, avaliar e superar as dificuldades encontradas pelos alunos no Cálculo Diferencial e Integral. Beidleman et al (1995 como citado em Olimpio Jr., 2006) destacam dificuldades encontradas na ligação entre os conceitos fundamentais de Cálculo, a linguagem e os significados desses conceitos. Seus estudos têm mostrado como a manipulação de símbolos e a memorização de fórmulas, muitas vezes sem sentido para os alunos, têm sido sobrepostas às ideias matemáticas.

Este artigo mostra uma seleção os problemas aplicados, que buscaram promover a compreensão de ideias e conceitos do Cálculo, e desenvolver habilidades de comunicação verbal ou escrita dessas ideias. Para um movimento de renovação que nos fornecesse opções para o ensino e a aprendizagem de Cálculo, buscamos atividades fundamentadas na Metodologia de Ensino de Matemática através de Resolução de Problemas.

A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

Historicamente, a resolução de problemas tem sido essencial na construção de novos conhecimentos. Os problemas alavancam e impulsionam grandes descobertas e eminentes

[1] A fim de evitar repetições, doravante utilizaremos a expressão Cálculo para fazer referência ao Cálculo Diferencial e Integral.

estudiosos. No cotidiano de sala de aula, tornou-se parte obrigatória de nosso trabalho, tendo em vista as mudanças ocorridas no ensino e nos sistemas de avaliação de massa.

Toda a dificuldade, todo obstáculo que se apresenta a um aluno é um problema, contanto que ele esteja interessado em resolvê-lo. Para Onuchic (1999) um problema não é um exercício que o aluno resolve de forma mecânica; é a origem para a compreensão de conceitos, construindo conhecimento com compreensão e não por mera memorização.

Allevato e Onuchic (2009) apresentam, como sugestão, um roteiro para trabalhar com resolução de problemas, considerando-a como uma metodologia de ensino: 1. Preparação do problema – o professor planeja a atividade considerando a realidade do aluno e o que pretende em relação ao conteúdo; 2. Leitura individual – solicita que cada aluno faça a leitura do problema; 3. Leitura em conjunto – organiza os alunos em pequenos grupos e solicita uma releitura; e, se ainda houver dificuldade, faz uma leitura com toda a classe. 4. Resolução do problema – os alunos usam seus conhecimentos prévios e as técnicas que escolherem, e desenvolvem processos e conceitos, usando as habilidades que possuem para resolver o problema proposto; 5. Observar e incentivar – o professor não diz completamente como resolver, mas orienta e incentiva; 6. Registro das resoluções na lousa – após a resolução, os alunos são convidados a colocar na lousa as resoluções, tanto as certas como as erradas, para que sejam feitas comparações e discussões; 7. Plenária – cada grupo explica sua resolução a toda a classe; o professor intermedeia, questiona, promove reflexões sobre o que foi apresentado; 8. Busca do consenso - O professor e os alunos decidem qual solução está correta ou é melhor; 9. Formalização do conteúdo – o professor desenvolve formalmente o conteúdo matemático previsto para a aula, apresentando a teoria e relacionando-a com o problema que foi resolvido. O que se pretende com essa metodologia é que a resolução do problema forneça a base para que o conhecimento seja construído e o conteúdo matemático seja aprendido com sentido, pelo aluno.

Contexto e Metodologia de Pesquisa

Na pesquisa aqui relatada a coleta de dados ocorreu com alunos de um curso superior de tecnologia que cursavam a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, já tinham estudado derivadas e métodos de integração e estavam iniciando o estudo da integral definida e suas aplicações, usando coordenadas cartesianas. Preparamos vários problemas que foram trabalhados em encontros dos quais participaram, em média, 17 estudantes por encontro. Os problemas foram adaptados de livros usualmente adotados nos cursos de Cálculo, como o de Hoffmann (1984), entre outros.

A pesquisa foi de natureza qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1999), ela possui, entre outros traços distintos, a característica de que o investigador é o principal instrumento, sendo determinante o local da pesquisa.

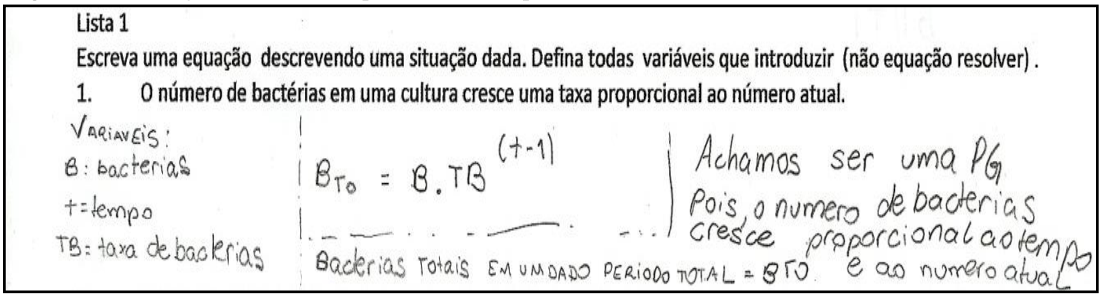
Flick (2009) destaca a triangulação de métodos como recurso importante para a validação de resultados obtidos, enriquecendo e complementando o conhecimento superando as fronteiras limitadas por um único método, facilitando a flexibilidade e as conexões entre os métodos. Os métodos aplicados foram: a pesquisa participante, a observação participante e a análise documental. A pesquisa participante foi o ponto central dessa pesquisa, assim, o pesquisador estava integrado aos processos, como um realizador. A ela esteve associada a observação participante. A análise documental, por sua vez, valoriza e aprimora as informações, revelando novos problemas e nos levando, assim, a uma fonte rica de dados. (Lüdke & André, 1986). Os documentos analisados foram as resoluções escritas dos problemas propostos aos alunos. Num diário de campo foram feitas anotações; áudio-gravações registraram os diálogos; e foram registrados alguns momentos com fotografia.

Descrição e análise dos dados

Vamos destacar, aqui, alguns problemas, recortados da pesquisa de Rossi (2012), coletados de acordo com a metodologia de ensino através da Resolução de Problemas; seguimos rigorosamente o roteiro sugerido por Allevato e Onuchic (2009), conforme já descrito.

O problema a seguir, Figura 1, buscava ajudar o aluno a compreender a relação entre o conceito de derivada e uma taxa de variação, no caso taxa de crescimento:

Figura 1. Resolução incorreta do problema 1 do primeiro encontro


Lista 1

Escreva uma equação descrevendo uma situação dada. Defina todas variáveis que introduzir (não equação resolver).

1. O número de bactérias em uma cultura cresce uma taxa proporcional ao número atual.

Variaveis:
B: bacterias
t=tempo
TB: taxa de bacterias

$B_{To} = B.TB^{(t-1)}$

Bacterias Totais em um dado periodo total = BTO

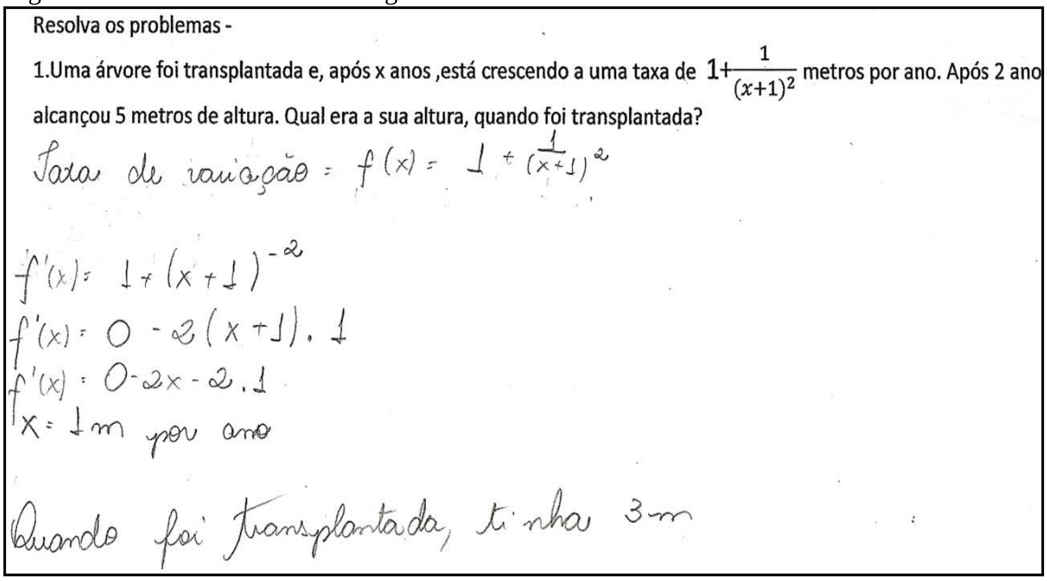
Achamos ser uma PG
Pois, o numero de bacterias cresce proporcional ao tempo e ao numero atual

Fonte: Arquivo de dados do pesquisador

Nessa resolução, e em outras apresentadas, observamos que muitos alunos queriam resolver uma equação, muito embora essa não fosse a solicitação feita no problema. Eles tinham dificuldade de pensar de uma forma diferente da tradicionalmente trabalhada em classe, que é a de fornecer uma equação e solicitar que o aluno resolva. Podemos observar que eles não usaram a notação de derivada para a taxa, possivelmente porque não perceberam a relação, mas criaram a indicação TB para ela. De qualquer modo, constatamos que se sentiram "livres" para buscar em seus conhecimentos trazidos do Ensino Médio recursos como a Progressão Geométrica; isso chamou a atenção mostrando o quanto o aluno se desvinculou do contexto específico do Cálculo na busca pela solução para o problema. Verificamos discussões realizadas entre os alunos nos pequenos grupos, envolvendo o significado das palavras razão, taxa e proporcional. Ao analisarmos o que ocorreu nesse primeiro encontro, evidenciaram-se, ainda, dificuldades de trabalharem em grupo, de leitura e interpretação do problema, e de apresentar soluções de natureza diferente da aplicação de algoritmos (como escrever uma equação e não resolvê-la). Todos esses aspectos foram discutidos e esclarecidos na plenária, a partir das resoluções que os alunos construíram e que compartilharam com os colegas e com o professor.

Do segundo encontro, analisaremos uma resolução elaborada (Figura 2) para o seguinte problema:

Figura 2: Derivaram em vez de integrar



Resolva os problemas -

1.Uma árvore foi transplantada e, após x anos ,está crescendo a uma taxa de $1+\frac{1}{(x+1)^2}$ metros por ano. Após 2 ano alcançou 5 metros de altura. Qual era a sua altura, quando foi transplantada?

Taxa de variação = $f(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 1 + (x+1)^{-2}$

$f'(x) = 0 - 2(x+1) . 1$

$f'(x) = 0 - 2x - 2 . 1$

$x = 1$m por ano

Quando foi transplantada, tinha 3m

Fonte: Arquivo de dados do pesquisador

Aqui observamos que alguns grupos ainda tinham dificuldade com as notações e com o que estava sendo pedido. Também constatamos dificuldades encontradas em saber quando devem integrar e quando devem derivar, mostrando, assim, falta de conhecimento do conceito de taxa de variação como sendo derivada, muito embora já tivessem estudado esses conteúdos nas disciplinas de Cálculo cursadas regularmente em seus cursos. A "aprendizagem" de mecanismos de resolução, sem compreensão do significado do que fazem, pode ter sido responsável por essa dificuldade, que foi discutida e trabalhada a partir dessas resoluções apresentadas pelos alunos participantes da pesquisa.

Na Figura 3, a seguir, apresentamos outra resolução apresentada para esse mesmo problema:

Figura3: Resolução correta do problema 1 do segundo encontro.

1.Uma árvore foi transplantada e, após x anos ,está crescendo a uma taxa de $1+\frac{1}{(x+1)^2}$ metros por ano. Após 2 anos , alcançou 5 metros de altura. Qual era a sua altura, quando foi transplantada?

Sendo: y = altura atual em metros
x = Tempo em anos
C = altura inicial em metros
$d(x+1) = dx$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$dy = dx + \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$\int dy = \int dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$y = x + \int (x+1)^{-2} \cdot dx$$

$$y = x + \int (x+1)^{-2} d(x+1)$$

$$\boxed{y = x - \frac{1}{x+1} + C}$$

Para $y = 5$ e $x = 2$, Temos:

$$5 = 2 - \frac{1}{2+1} + C$$

$$5 = 2 - \frac{1}{3} + C$$

$$5 = \frac{5}{3} + C$$

$$C = 5 - \frac{5}{3}$$

$$\boxed{C = \frac{10}{3} \text{ metros}}$$

Fonte: Arquivo de dados do pesquisador

No decorrer da plenária notamos que alguns grupos, apesar da notação não ser a convencional, fizeram a resolução correta; houve discussão quanto ao método de integração, à notação e ao que é variável dependente e variável independente. Após a discussão, a pesquisadora, na lousa, detalhou e esclareceu as questões ainda duvidosas.

No problema 4 do segundo encontro (Figura 4), os alunos foram desafiados a desenvolver outro tipo de resolução:

Figura 4: Resolução do problema 4 do segundo encontro

4. Modelo Logístico,nos mostra que uma população com frequência cresce exponencialmente em seus está iniciais, mas eventualmente se estabiliza e se aproxima de capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. A expressão mais simples para a taxa de crescimento relativo é $\frac{dP}{P.dt} = k.P.\left(1-\frac{P}{K}\right)$, onde k é a capacidade de suporte. Como você resolveria essa equação para achar a função que nos dará a Populaçã (Não é para resolver, só explique o método que você usaria)

Primeiramente, aplicaria o conceito de equação diferencial, integrariamos dos 2 lados, aplicaria integração por frações racionais, ~~encontrando o valor~~, igualaria o t, aplicaria propriedade de logaritmo e assim encontrariamos p.

Fonte: Arquivo de dados do

Após a primeira leitura individual do problema, os alunos começaram a apresentar as dúvidas, perguntando à pesquisadora "o que era para fazer", porque não entendiam. Fizemos, então, uma leitura em conjunto e esclarecemos o que estava sendo solicitado pelo problema. Então, partiram para a resolução e, a partir de então, manifestaram algumas carências de conhecimentos prévios; por exemplo, queriam "cancelar" a variável P da equação $\frac{dP}{P\,dt}=k.P.\left(1-\frac{P}{k}\right)$. As dúvidas foram sendo esclarecidas e foi importante que, com esse problema, essencialmente diferente dos que habitualmente resolviam nas aulas regulares de Cálculo, os alunos tiveram oportunidade de refletir. Se já é difícil explicar oralmente um processo de resolução, tanto mais foi fazê-lo por escrito - a maioria dos alunos queria resolver a equação, mesmo que o problema não tivesse solicitado. A essa altura do trabalho, já no quarto problema do segundo encontro, na plenária pudemos observar que os alunos, apesar das dificuldades, se sentiam mais à vontade para discutir o que pensavam. As discussões sobre o método de integração que deveria ser utilizado para resolução desse problema foram acaloradas; os alunos já não tinham medo de se expressar, queriam dialogar para saber se estavam certos ou errados.

Desprender-se de antigas práticas e costumes, de fato, não é fácil. Não foi natural, para os alunos pesquisados, trabalharem em grupo ou exporem-se perante a classe para defender e explicar seus pensamentos ou os do grupo, porque não fazia parte do dia a dia deles esse tipo de prática de socialização. Também não estavam habituados a enfrentar a resolução de um problema sem que o professor lhes diga, antes, tudo o que devia ser feito. Foram difíceis, especialmente, as primeiras experiências em que os alunos precisaram enfrentar essas "novidades". Também não foi fácil, para o professor pesquisador, levar os alunos a essas práticas, ajudá-los a pensar sem oferecer respostas prontas, torná-los protagonistas na construção de conhecimento. Mas tudo foi superado e os alunos construíram relevantes conhecimentos sobre as equações diferenciais envolvidas nos problemas e imprimiram novas e relevantes atitudes frente à aprendizagem do Cálculo, via resolução de problemas.

Resultados da Pesquisa e Considerações Finais

A aplicação da Metodologia de Ensino e Aprendizagem através da Resolução de Problemas produziu um efeito marcante quanto à participação dos alunos e a motivação causada pelos problemas. Houve também um grande estímulo do ponto de vista docente, quando o professor pesquisador identificou a dificuldade que os alunos tinham em se expressar, pois foi auxiliando-os pouco a pouco, sanando dúvidas e esclarecendo notações e conceitos, possibilitando aos alunos aprimorar a linguagem e criar melhores formas de apresentação das resoluções, até o final do trabalho. A metodologia de ensino através da Resolução de Problemas proporcionou uma evolução na autoestima dos alunos, porque se sentiram capazes e felizes por terem entendido e resolvido os problemas, construindo conhecimento significativo, nesse caso, sobre equações diferenciais. A metodologia criou oportunidades em que o aluno pode utilizar seus conhecimentos anteriores, e teve liberdade de fazer escolhas e criar estratégias no decurso da investigação, tendo como consequência a reflexão. A liberdade dada aos alunos de pesquisarem no caderno e em outras anotações, relembrando o que já tinham estudado no momento que precisavam, buscando teorias e exercícios para realizarem a atividade, promoveu um movimento em que o aluno saiu do modo automático de aplicação de fórmulas para a busca de um novo modo de pensamento. A Metodologia de Ensino através da Resolução de Problemas orientou os alunos a partir das dificuldades iniciais encontradas durante a resolução, conduzindo-os a novos conhecimentos e à solução do problema. Promoveu o compartilhamento de ideias entre os alunos e entre os alunos e o professor. Em síntese, os alunos discutiram, refletiram, criaram notações e elaboraram suas próprias definições; houve movimento, liberdade, criação e construção de conhecimento. A Metodologia de Ensino através de Resolução de Problemas levou os alunos a uma transformação, tornando-os mais seguros e ativos, mostrando-se um recurso possível e produtivo nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

Referências

Allevato, N. S. G.; Onuchic, L. R. (2009).Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas, *Boletim Gepem*, Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, RJ, n. 55, p.133-154.

Bogdan, R.; Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora.

Flick, U.(2009). *Introdução à Pesquisa Qualitativa*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed,. 405p.

Frota, M. C. R. (2007). Teoria e Prática na Aprendizagem de Cálculo. *Bolema*, Rio Claro, ano 20, n°28, p.21-38.

Hoffmann, L. D. (1984). *Cálculo: Um curso moderno*. LTC-Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.

Lüdke, M.; André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Olimpio Junior, A. (2006). *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática*. 2006. p. 264. (Tese de Doutorado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, BR.

Onuchic, L. R. (1999). Ensino: aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*. São Paulo: UNESP, p. 199-220.

Rezende, W. M.(2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*, 2003, 340f. Tese (Doutorado em Educação-Área de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, BR.

Rossi, M. I. (2012). *A Aprendizagem das Aplicações das Integrais Indefinidas em Equações Diferenciadas Através da Resolução de Problemas*. Dissertação de mestrado, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, BR.

Tall, D. (1985). *Understanding the calculus*. University of Warwick institutional repository: http://go.warwick.ac.uk/wrap