

## APOE: UNA PERSPECTIVA COGNITIVA PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Marcela Parraguez, Isabel Maturana, Miguel Alejandro Rodríguez  
[marcela.parraguez@ucv.cl](mailto:marcela.parraguez@ucv.cl), [isamatup@hotmail.com](mailto:isamatup@hotmail.com), [mrodriguez@upla.cl](mailto:mrodriguez@upla.cl),  
 Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile

Tema: Pensamiento Matemático Avanzado  
 Modalidad: Comunicación Breve  
 Nivel: Terciario  
 Palabras Claves: APOE, matriz, transformación lineal.

### **Resumen.**

*Como parte del Proyecto DI-PUCV 037.495-2013 y basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), nos propusimos investigar desde una postura cognitiva las construcciones y mecanismos mentales necesarios para reconstruir el Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal, (MATL). Los datos que provee la literatura (Dorier, 1990; Parraguez y Oktaç, 2010, entre otros) señalan en general, que los conceptos en el álgebra lineal son temas cuyo aprendizaje no se alcanza y en relación al teorema que nos ocupa, la literatura disponible es escasa. Diseñamos una descomposición genética, (DG), del teorema de la MATL, esto es, investigar, mediante la metodología utilizada en la teoría APOE, propuesta por Dubinsky y el grupo RUMEC (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1996), las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en práctica en la (re)construcción del teorema MATL.*

*La investigación contempló: (1) el diseño de una DG hipotética; (2) estudio de caso en universidades del país (3) Análisis de los programas de asignaturas; (4) Indagación bibliográfica; (5) encuestas y entrevistas a alumnos; (6) refinamiento de la DG, a modo de obtener evidencias empíricas de la forma en que los estudiantes construyen la MATL.*

### **1.- Introducción: Matriz asociada a una transformación lineal desde la teoría APOE**

Nos propusimos investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego en la (re)construcción que hacen del teorema matriz asociada a una transformación lineal, (TMATL), dicho teorema establece lo siguiente:

Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo  $K$ ,  $T: V \rightarrow W$  una transformación lineal,  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y  $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  una base de  $W$ . Los vectores  $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$  están en  $W$  y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base  $B'$ :

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

En otras palabras,  $[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ , ...  $[T(v_n)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ ; y la matriz asociada a

la transformación lineal  $T$  en las bases  $B$  y  $B'$ , que rotulamos como  $[T]_B^{B'}$  es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

### 1.1 Relevancia del teorema

Son dos las principales razones de por qué es importante el aprendizaje del TMATL. En primer lugar, el TMATL, proporciona una manera eficiente de llevar las transformaciones lineales a un equipo digital. La segunda razón es teórica, pero con importantes consecuencias prácticas. La matriz asociada a la transformación lineal  $T$ , digamos  $A$ , depende de las bases  $B$  y  $B'$ . Normalmente uno elegiría  $B$  y  $B'$  para hacer el cómputo de matrices de coordenadas, tan fácil como sea posible. Sin embargo, uno en su lugar podría intentar elegir las bases  $B_1$  y  $B_2$  para hacer la matriz  $A$  lo más simple posible, digamos con un montón de ceros en sus coeficientes. Cuando esto se hace en la forma correcta, la matriz  $A$  puede proporcionar información importante sobre la transformación lineal.

### 1.2 Objetivos de Investigación

Determinar las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego un individuo como estrategia cognitiva para construir el TMATL. En el lenguaje de la teoría APOE: diseñar y evidenciar una descomposición genética del TMATL.

### 1.3 Fundamentación teórica

La presentación que sigue se puede encontrar, por ejemplo, en (Asiala *et al.*, 1997; Brown *et al.*, 1997; Dubinsky *et al.*, 1994).

Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de ella o mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión. Estos originan diferentes construcciones (mentales): acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Tomemos un fragmento  $F$  de conocimiento matemático –TMATL–. Un individuo posee una concepción acción de  $F$  si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a

paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de  $F$  si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. (Puede coordinar dos o más procesos o revertir uno para obtener un nuevo proceso). Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de  $F$ . Si necesita volver desde el objeto al proceso que lo forma, lo hace desencapsulando el objeto. (Las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de aplicar rótulos antes de que los objetos hayan sido encapsulados). Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. La coherencia es la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Al tratar un problema matemático, el individuo evoca un esquema y lo desenvuelve para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones entre ellas, y trabaja con el conjunto. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Una descomposición genética, (DG), describe en detalle los aspectos constructivos de  $F$  para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que el aprendiz pueda seguirlo para tener buen éxito. Tal DG no es única, pues depende de los caminos de construcción y de las estructuras mentales previas del individuo.

#### **1.4 Metodología**

Las estructuras mentales que un individuo ha desarrollado previamente determinan la construcción de nuevos conceptos, en particular, los matemáticos. Para examinar estos procesos cognitivos, se ha recogido información de registros de observación, y de discursos, que permiten analizar dicha información en el marco del teorema matemático y así aportar conocimiento a la didáctica de la matemática, respecto a los mecanismos cognitivos que se ponen en funcionamiento los estudiantes, al reconstruir un teorema algebraico asociado a una transformación lineal. El diseño que permite un estudio en profundidad a través de los discursos, acciones y documentos, es el estudio de casos,

por lo que se ha optado por este diseño metodológico de investigación. Los estudio de casos son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje (Arnal, del Rincón y Latorre, 1992), permitiendo una aproximación conceptual apropiada “para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo” (Goetz y Lecompte, 1988, p. 69). Por otra parte es preciso dejar en claro que nuestras conclusiones provendrán de la teoría APOE y de su metodología.

Las unidades de estudio son alumnos chilenos de una universidad del país, estudiantes de las carreras de Ingeniería. El argumento razonado o sustento teórico que explica esta selección de la muestra, se vincula con los procesos formativos que esta casa de estudios brindan al teorema, y así indagar con mayor profundidad en los procesos mentales del concepto MATL, desprendido de sus enseñantes; pero sí, basados en sus aprendizajes matemáticos previos, y conexiones.

La selección de los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como “caso”, se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, género, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores. Estos criterios de selección, se basan en recopilación de datos que permiten focalizar la unidad de estudio tal como lo plantea la Grounded Theory (Strauss y Corbin, 1998), porque permite generar teoría a partir de la información contenida en el dato por un lado y la teoría del APOE por otra.

### ***1.5 Ciclo de investigación de APOE***

Al caso de estudio se aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como DG; un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala *et al.*, 1996). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos. Una DG propiamente tal es el resultado de la aplicación completa de las tres componentes de ese ciclo, que permite documentarla con los datos empíricos.

## 2.- Desarrollo

### 2.1 *Descomposición genética del TMATL*

A continuación presentamos el relato de la descomposición genética (ver anexo), propuesta en la investigación para determinar las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego para construir el concepto MATL. Hemos decidido incorporar mediante una figura (figura 1), referida a un tramo de la descomposición genética (ver anexo) que consideramos relevante para dar cuenta de dicha construcción, constituyendo las bases de este reporte.

Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre MATL, sostenemos que: para que un estudiante llegue a construir la MATL como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , con dimensiones finitas: digamos  $n$  y  $m$  respectivamente, para luego, desencapsular de este objeto; por una lado bases ordenadas  $B=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $B'=\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  de los espacios  $V$  y  $W$  respectivamente como procesos y la pertenencia de un vector  $w$  al espacio vectorial  $W$ , también como proceso.

Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través, uno de la transformación lineal y el otro por medio de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación, mediante la transformación lineal, es entre los procesos de las bases ordenadas  $B$  y  $B'$  de  $V$  y  $W$  respectivamente, donde se calculan mediante la transformación lineal las imágenes de los vectores de la base  $B$ . La segunda coordinación es entre los procesos base ordenada  $B'$  de  $W$ , con la pertenencia de un vector  $w$  a  $W$ , se coordina a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar  $w$  como combinación lineal de los vectores de la base ordenada  $B'$  de  $W$ , este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordinada de vector  $w$  en la base  $B'$ , es decir,  $[w]_{B'}$ .

La coordinación de los procesos que se obtienen de desencapsular el objeto coordinada y el proceso que obtuvimos de la coordinación mediante la transformación lineal, ambos nuevamente serán coordinados por la generalización dada por el cuantificador que determina que el proceso se repetirá en todos los vectores de la base ordenada  $B$  de  $V$ . de esta forma se obtiene la matriz de coordenadas, es decir un ordenamiento de las coordenadas de la imágenes, este proceso es encapsulado en el objeto matricial y rotulado como  $[T]_B^{B'}$ .

En la descomposición genética de MATL, consideramos que no es suficiente haber construido este objeto, pues es solo una matriz construida por coordenadas de imágenes de los vectores de la base ordenada  $B$  de  $V$ . Para ello proponemos que la construcción de dicha matriz se logra de forma adecuada si se identifica con su rol de función, así la porción de descomposición genética de la figura 1, da cuenta de las construcciones y mecanismos mentales para la construcción de la MATL como un objeto operativo.

El diagrama de la figura 1, da cuenta de la desencapsulación de los objetos matriz rotulada de coordenadas y las coordenadas de un vector  $v$  de  $V$ , ambos objetos desencapsulados como procesos son coordinados por el producto matricial, formando una matriz resultante de dicho producto, es decir  $[T]_B^{B'} [v]_B$  lo cual es un proceso el que se podrá encapsular en un objeto matricial y posteriormente rotular como  $[T(v)]_{B'}$ .

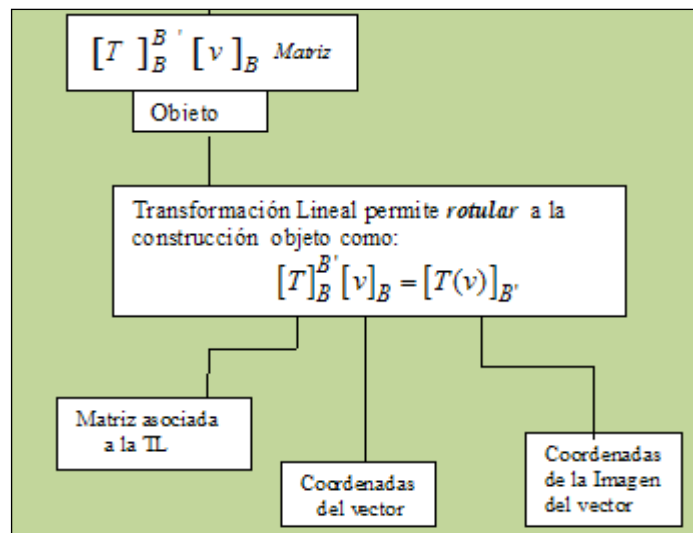


Figura 1. La MATL en uso.

## 2.2 En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Diseñamos un cuestionario de 10 preguntas, y 3 entrevistas con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG. Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las 10 preguntas.

### 2.2.1 Análisis a priori del cuestionario

Hemos seleccionado una pregunta del cuestionario, para darla a conocer en este reporte, que a continuación será analizada a la luz de la DG presentada.

**PREGUNTA 5:** Considere la transformación lineal  $F : \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle \rightarrow \langle x^2, x + 1 \rangle$

definida por  $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ; donde  $B = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$  y  $B' = \langle x^2, x + 1 \rangle$ .

Determine las coordenadas de la imagen del vector  $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .



*Intención de la pregunta 5.* La pregunta permite observar si la construcción de la MATL es un objeto encapsulado del cual se reconoce su propiedad de continuar siendo una función. El estudiante que no construye este objeto es poco probable que tenga la interpretación funcional de transformación lineal como un objeto (figura 1).

*Respuesta experta de la pregunta 5.* Para determinar las coordenadas del vector, debemos aplicar  $[F]_B^{B'} [v]_B = [F(v)]_{B'}$ , por lo que se tiene que las coordenadas del vector

solicitado son:  $[F(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$ .

**2.2.2 Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y Análisis a posteriori**

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por los estudiantes universitarios en la pregunta antes descritas.

*Análisis a posteriori Pregunta 5.* La figura 2 nos muestra que el estudiante 3, (E3), no ha construido el proceso dispuesto en nuestra DG.

Figura 2. Respuesta que realiza el E3 y el proceso dispuesto en la DG.

Opuestamente al E3, E4 ha mostrado el objeto y rotulado (figura 3) al escribir  $[F(v)]_{B'}$ ,

Figura 3. Respuesta que realiza el E4, y la porción de DG asociada.

lo cual le permite hacer transformaciones sobre él, y llegar a responder exitosamente

$$\text{que } [F(v)]_{B'} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

### 3.- A modo de conclusión

Resultados de la investigación a la fecha, indican que el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, por medio de una TL no representa dificultad a los estudiantes, sin embargo la generalización de éste, es un obstáculo para alcanzar la construcción objeto. Los estudiantes que conforman esta unidad de estudio, excepto dos, no logran construir la matriz asociada a la transformación lineal, es decir, la mecánica empleada en las resoluciones muestra al obstáculo del formalismo en su plenitud, quedando desvinculado (su quehacer) de su concepto de origen, el de transformar vectores, que es la razón de ser de la transformación lineal.

### Referencias bibliográficas

- Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.
- Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. Journal of Mathematical Behavior 16 (3), 241-309.
- Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. Journal of Mathematical Behavior, 16(3), 187-239.
- Dorier, J. L. (1990). Continuous analysis of one year of science students' work, in linear algebra, in first year of french university. Proceedings of the 14th annual meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 35-42.
- Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. Educational studies in Mathematics, 27, 267-305.
- Goetz, J.P. Lecompte M.D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. España: Morata.
- Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the Vector Space Concept from the Viewpoint of APOS Theory. Linear Algebra and its Applications, 432, 2112 – 2124.
- Strauss, A., y Corbin, J. (1998). Basics of Qualitative Research Techniques and Procedures for developing Grounded Theory (2nd Edition). Sage Publication: London.



ANEXO

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

