PROBLEMAS EN GEOMETRÍA Y REPRESENTACIONES QUE SURGEN EN SU RESOLUCIÓN: TENSIONES DEL PROFESOR

Camilo Sua – Óscar Molina
jcsuaf@pedagogica.edu.co – ojmolina@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)

Tema: Práctica Profesional del Profesorado de Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario – Universitario
Palabras clave: representaciones, tensiones, definiciones, acciones del profesor

Resumen
En esta comunicación breve presento algunos asuntos que desarrollo en el trabajo de grado para optar por el titulo de maestría en Docencia de las Matemáticas. Con este trabajo pretendo analizar las acciones de un profesor de matemáticas cuando desarrolla su práctica profesional apoyado en una aproximación metodológica específica. En este documento presento las tensiones del profesor al momento de proponer problemas abiertos a sus estudiantes con los que se pretende definir la circunferencia y mediatriz. Para desarrollar el análisis de los datos suministrados, adopto la Teoría de la Racionalidad Práctica y dentro de esta, las tareas novedosas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Existe una preocupación frente a los resultados académicos de los estudiantes, motivo por el cual la investigación en educación matemática ha puesto el lente de estudio en el profesor y las acciones que lleva a cabo en su práctica profesional (Perry, Andrade, Hernández & Perry, 2000). Bajo esta problemática, Perry et al. (2000) han sugerido estudiar la *práctica reflexiva del profesor* debido al interés que este elemento de estudio ha suscitado en la última década. Desde la *práctica reflexiva del profesor*, tiene importancia analizar las acciones del profesor y a partir de ello, mejorar la práctica profesional de este individuo. Mi interés se centra, entonces, en el estudio del profesor inmerso en su práctica. Para desarrollar este trabajo, tomaré como marco de referencia la *Racionalidad Práctica*, una propuesta teórica formulada por Herbst y Chazan (2011), para la cual las acciones del profesor están enmarcadas en normas y situaciones específicas donde se da lugar a lugar ciertas tensiones (Miyakawa & Herbst, 2007). Es pertinente para mis intereses adoptar tal teoría en cuanto propone considerar un elemento que pertenece al conjunto de recursos desarrollados por el profesor, quien genera un ambiente de clases que favorece la actividad demostrativa: *las tareas novedosas*.

En esta comunicación breve ilustro la forma en que una *tarea* genera diversas respuestas sobre el mismo objeto geométrico por parte de los estudiantes. A partir de esto, muestro tres *tensiones* generadas en el profesor, quien ha propuesto tareas de acuerdo a una aproximación metodológica particular. Específicamente presentaré tales *tareas* y las respuestas de los estudiantes frente a las mismas, las *tensiones* que en el profesor generan dichas respuestas y la forma en que estas son sorteadas con el fin de cumplir el objetivo del problema propuesto.

MARCO DE REFERENCIA

La práctica reflexiva es un mecanismo con el cual puedo mejorar mi práctica profesional de manera significativa (Perry et al., 2000). Un primer paso, fundamental además, es identificar un problema en aula que surge como producto de mis actos; en tal sentido, cobra significado estudiar las acciones que como profesor realizo en el aula, en el marco de una situación y objetivo educativo específico. Luego, es pertinente trabajar sobre una base teórica con la cual pueda analizar los componentes que regulan mi ejercicio profesional. Describo a continuación la teoría que consideraré.

La Teoría de la racionalidad práctica (TRP en adelante) está enmarcada en un enfoque con el que se analiza la práctica de enseñanza de las matemáticas, en la que el profesor se encuentra inmerso, a través de las relaciones existentes entre él, los estudiantes y las matemáticas. Esta teoría considera la enseñanza a la luz de tensiones, problemas y dilemas que permean la labor del profesor. En el desarrollo de la TRP, Herbst (2003) ha considerado las tareas novedosas (contextos para desarrollar nuevo conocimiento que no son familiares para los estudiantes y que no pretenden específicamente la mecanización de determinados algoritmos) y su relación con el conocimiento y el aprendizaje de matemáticas en el aula.

Para conceptualizar este tipo de tareas el autor recurre a Doyle (1988; citado en Herbst, 2003) proponiendo así cuatro elementos que atienden a las relaciones entre los miembros de la clase en relación a determinado asunto de estudio: los productos fruto de las tareas, las acciones conceptuales realizadas para obtener tales productos, las representaciones y transformaciones sobre los objetos de estudio y el trabajo desarrollado por los estudiantes. Estos indicadores son útiles, afirma el autor, cuando las *tareas novedosas* son un contexto donde los estudiantes desarrollan nuevas ideas, las cuales de antemano han sido consideradas por él. En la figura 1 propongo una representación de las relaciones existentes entre los aspectos mencionados anteriormente, mostrando una causalidad entre tres de estos elementos y cómo se encuentran al mismo tiempo enmarcados en el trabajo de los estudiantes.

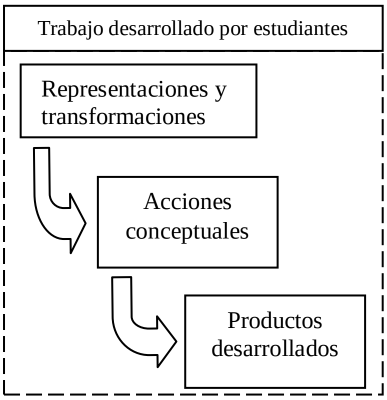


Figura 1

El manejo de estas tareas y la consecución de sus logros educativos son difíciles para el profesor. Las tareas contienen unos productos específicos que son previstos por el profesor al momento de proponerlas. Sin embargo, estos productos están escondidos a los ojos de los estudiantes al iniciar su trabajo. Herbst (2003) propone considerar tres tensiones en el profesor que afectan el manejo y desarrollo adecuado de las tareas propuestas. A continuación describo tales tensiones.

La primera tensión se da al momento de mantener a los estudiantes enfocados en el objetivo de la tarea propuesta. Es posible que surjan nuevas ideas que no corresponden a los objetivos propuestos, ideas que no pueden dejarse de lado y sobre las cuales se pueden abordar aspectos que los estudiantes han desarrollado obteniendo así ricas producciones. Esto no ofrece elecciones claras paras el profesor, por el contrario, genera una tensión sobre las acciones que debe tomar, atendiendo las ideas emergentes y orientándolas a los objetivos trazados.

Las tareas per sé involucran recursos para su desarrollo. Estos recursos constan de representaciones para los objetos matemáticos puestos en juego (formas en que los estudiantes plasman o corporeizan objetos geométricos involucrados en la tarea) y sobre los cuales se desarrollan nuevas ideas. Estas representaciones no dan al estudiante un estatus sobre las ideas que son relevantes considerar, más bien, ellos ingresan en un proceso de indagación donde determinan qué será de utilidad y en qué medida lo utilizarán. Por tal razón, es crucial realizar una representación adecuada si se desea conseguir el objetivo de la tarea. Aquellas tareas donde se ofrezcan aspectos sobre las representaciones a realizar, apuntan más claramente a conseguir los objetivos del profesor sobre la actividad. A partir de lo mencionado, emerge una segunda tensión frente a las ideas de los estudiantes: por un lado, explorar las representaciones propuestas por los estudiantes y destacar las ideas relevantes que coincidan con lo que se espera lograr con la tarea; por otro lado, el profesor puede aprovechar la riqueza de las representaciones alternativas planteadas y favorecer así las elecciones de los chicos explotándolas al máximo en procesos de matematización.

La última tensión se manifiesta en las acciones conceptuales desarrolladas por los estudiantes en el desarrollo da una *tarea*. Tales acciones engloban *operaciones* que pueden ser físicas (e.g. usar fórmulas, medir) o conceptuales (e.g. relacionar objetos geométricos) y que tienen lugar en el trabajo sobre la *tarea*, por tal razón, son resultados significativos para los estudiantes. En la estructura de las tareas se dan limitaciones y condiciones que pretenden acercar al estudiante a las *operaciones* deseadas y poner de manifiesto lo que es permitido o no hacer en el desarrollo de las mismas. Se genera así una tensión en el profesor frente a cómo las condiciones y limitaciones permiten al estudiante acercarse a las operaciones adecuadas para completar una tarea. Por un lado, el profesor puede sentirse presionado a reducir la ambigüedad de estas limitaciones y hacer explicitas las operaciones que se deben realizar. Por otro lado, puede no prestar atención a tal ambigüedad y esperar que los estudiantes por si mismos realicen operaciones y descubran qué tiene sentido hacer en el desarrollo de una tarea y la forma en que esto se realiza.

CONTEXTO DEL ESTUDIO

El episodio que discutiré tuvo lugar en el desarrollo del trabajo de grado para optar al título de Magister en Docencia de las Matemáticas. En este analizo las acciones del profesor que desarrolla su práctica profesional en el marco de una aproximación metodológica específica. La población considerada es un curso de noveno grado (estudiantes 14-16 años) y los datos que presentaré tuvieron lugar en dos sesiones de clase durante el desarrollo de una secuencia didáctica. Particularmente, el objetivo era la formulación de una definición para el objeto geométricos mediatriz. Para el diseño de la secuencia me apoyé en la propuesta del grupo de investigación Æ.G (Molina, Samper, Perry & Camargo, 2011) que pretende favorecer la *actividad demostrativa* (conformada por dos procesos, el de conjeturación 'cuyo producto es una conjetura' y el de justificación 'cuyo producto es la explicación, prueba o demostración del enunciado conjeturado'). En este documento reporto específicamente un episodio en el que se plantean *tareas novedosas* (Herbst, 2003) a los estudiantes y se socializan sus resultados.

METODOLOGIA DE ESTUDIO

El desarrollo del estudio se estructuró en tres fases: diseño de una secuencia didáctica que contiene los problemas propuestos a los estudiantes, la gestión de la clase con base en la secuencia diseñada y el análisis de la gestión del profesor frente a la producción de los estudiantes. El desarrollo de la clase se filmó para registrar los eventos que sucedían y posteriormente analizarlos. Para la primera y segunda fase tuve en cuenta la aproximación metodológica para la enseñanza (que favorece la actividad demostrativa por parte de los estudiantes) propuesta por el grupo Æ.G. Sus aportes investigativos permitieron estructurar los problemas que serían propuestos a los estudiantes y los objetivos esperados en el desarrollo de cada problema. En el trascurso de esta interacción, el profesor avanzaba por cada grupo observando las estrategias utilizadas por cada uno sin ofrecer puntos de vista frente a la pertinencia o no del trabajo realizado. Al finalizar la tarea, el profesor escogía un grupo para que socializara su proceso de solución y los demás grupos apoyaban o refutaban las ideas expuestas. Sobre el análisis generado frente a los resultados obtenidos, tuve en cuenta los aspectos teóricos de la TRP que querían destacarse en los episodios grabados.

ANÁLISIS DE DATOS

Para el desarrollo de los problemas propuestos se proporcionó a los estudiantes una hoja con el problema, unas preguntas sobre la situación planteada y materiales para la construcción de los objetos que fueran necesarios: regla, colores y compás. A continuación presento fragmentos de las sesiones donde tuvo lugar la interacción entre los grupos y el profesor en la construcción de una definición para la mediatriz.

Definiendo la mediatriz como un lugar geométrico

Este fue el enunciado del problema propuesto con el que se pretendía construir una definición para la mediatriz

> Ubique dos puntos *A* y *B* utilizando las fichas suministradas. Ubique ahora un punto *C* [i.e. una ficha] que cumpla la condición de estar a la misma distancia de *A* y *B*.

A continuación presento tres *representaciones* distintas para el objeto geométrico a definir (Figura 2).

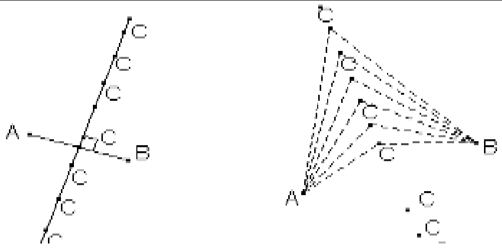


Figura 2. Construcciones propuestas para solucionar el problema

Los diálogos (ver anexo 3) tuvieron lugar en el trabajo realizado dentro de cada grupo. El profesor solamente hace preguntas frente al desarrollo del problema, en ningún momento sugiere soluciones alternativas. Quiero enfatizar que las dos primeras representaciones sugeridas por los estudiantes no son erradas. Aunque puede darse una discusión frente al hecho geométrico evidenciado, las dos representaciones iniciales corresponden respectivamente a la definición y teorema de la mediatriz (Si una recta *m* es perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio, entonces *m* es mediatriz del $\overline{AB}$). Hay dos *representaciones* distintas que podrían haber sido objeto de estudio por parte del profesor, explotando las ideas que caracterizaron las *operaciones* realizadas en cada una: para el primer caso, las *operaciones* se dan al momento de considerar que todos los puntos C' pertenecen a una recta que pasa por el punto medio del $\overline{AB}$; en el segundo caso, las *operaciones* surgen cuando se miden las distancias *AC* y *CB* con el fin de validar las posibles representaciones de los puntos *C*. Se puede evidenciar como el profesor explora las *representaciones* sugeridas en cada grupo, aunque en este caso no define lo que debería realizarse. El profesor interviene para identificar los elementos que facilitaron tales *representaciones* y con ello da evidencias sobre las múltiples formas en que puede abordarse un problema que corresponde a una *tarea novedosa*. En este caso, los *objetivos* del profesor frente a la tarea permiten la validez de muchas *representaciones* de la situación planteada y a partir de ello, explora las *operaciones* que fueron desarrolladas sobre tales *representaciones*. El profesor en este episodio es abierto a las ideas que puedan surgir, esto es, valida las *representaciones* y explora sobre las *operaciones* realizadas. Debido a que las tensiones surgen en una toma de decisiones sobre una *tarea*, en este caso, la *tensión* del profesor frente a las diversas *representaciones* lo conduce hacia la validación de un conjunto diverso de respuestas.

La tercera representación permite analizar otras condiciones que no son explícitas en las dos primeras. Los estudiantes han construido solamente dos puntos bajo las condiciones sugeridas. En este caso, la justificación a los dos puntos *C* encontrados se apoya en la definición de circunferencia. No es claro, según el dialogo, por qué los estudiantes no consideraron otras posibles configuraciones para las circunferencias construidas, esto les hubiese permitido identificar otros puntos *C* bajo la condición establecida. Además, el profesor no orienta la solución propuesta por el grupo a la consideración de otras circunferencias que cumplieran la misma condición (alternar el centro de la circunferencia con un mismo radio), por lo cual no sugiere una determinada *representación* (ubicar otros puntos *C*), así como tampoco promueve realizar *operaciones* particulares que podrían haberse realizado (construir varias circunferencias y determinar sus puntos de intersección). En los tres casos el objetivo de la tarea fue claro. Lo particular del episodio son las acciones realizadas para solucionar el problema propuesto.

CONCLUSIONES

He presentado un episodio de clase donde los estudiantes debían construir y formular una definición para la mediatriz. El episodio se desarrolló a partir de tareas novedosas. En el desarrollo del episodio se observó como la interpretación del enunciado del problema provocó distintas representaciones de los objetos geométricos asociados y sobre estos últimos, un conjunto de operaciones que conducían a respuestas diversas. Adicionalmente he querido mostrar cómo el objetivo del problema y los resultados obtenidos, por parte de los estudiantes, han provocado acciones del profesor frente a posibles tensiones que pueden tener lugar en el desarrollo del problema. Estas tensiones han estado encaminadas fundamentalmente a no concentrarse en el objetivo del problema propuesto por él; más bien, se aprecia cómo su tensión se da bajo las operaciones que se realizan sobre ciertas representaciones ya propuestas. Esto último significa que el profesor muestra un interés en la forma que se proponen respuestas ante las representaciones emergentes.

Por otro lado, el uso de la propuesta de Herbst (2003) para identificar aspectos que tienen lugar en el desarrollo de una *tarea*, permitió ampliar la mirada sobre este aspecto y considerar factores que alteran las acciones del profesor con el fin de cumplir un objetivo específico. A continuación presento una síntesis de estas tensiones:

Tensiones	Enfocándose en acciones particulares	Promoviendo diversidad de acciones
Objetivos de la tarea	Hacer explícito el objetivo de la tarea y lo que es esperado obtener. Orientar cualquier idea hacia los logros	Considerar las respuestas que emergen y explorarlas con miras a aprovechar las producciones de los estudiantes.

	esperados.	
Representaciones de los objetos geométricos	Destacar de las representaciones lo que es estrictamente relevante para el problema a desarrollar.	Aprovechar las representaciones de los estudiantes y explotar sus ideas para promover otras consideraciones, que no habían sido consideradas en los objetivos de la tarea, y que pueden ampliar la visión del objeto trabajado.
Operaciones sobre las representaciones	A partir de las *representaciones* emergentes, reducir las diversas formas de actuar frente a estas y orientar el trabajo hacia las operaciones deseadas.	Ser abierto a las acciones que puedan desarrollarse. Los estudiantes se harán conscientes de lo qué es necesario usar y para qué o cómo lo usan
nombre		

Estas tensiones son, entonces, un medio para explicar las acciones del profesor. En este sentido, atiende a los objetivos de la TRP que se enunciaban en el marco teórico y facilitan comprender las razones *a posteriori* que determinan las decisiones y formas de intervenir frente al objeto matemático de estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Herbst, P. (2003). *Using Novel Tasks in Teaching Mathematics: Three Tensions Affecting the Work of the Teacher*. American Educational Research Journal, 40(1), 197-238.

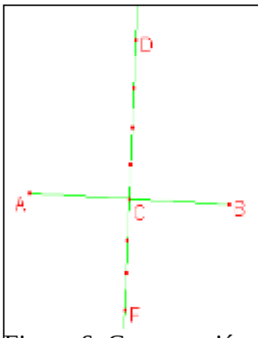
Herbst, P., & Chazan, D. (2011). Research on Practical Rationality: Studying the Justification of Actions in Mathematics Teaching. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 405-462.

Miyakawa, T., & Herbst, P. (2007). *The Nature and Role of Proof When Installing Theorems: The Perspective of Geometry Teachers*. *PME Conference 31°, 3*, 281-288.

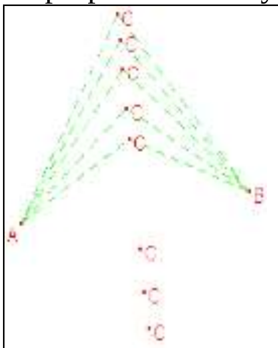
Molina, O; Samper, C; Perry, P; Camargo, L. (2011). *Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema.* Revista Integración, 29(1), pp. 73-96

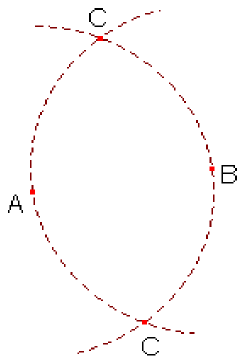
Perry, P., Andrade, L., Fernández, F., & Perry, R. (2000). Elementos para una conceptualización de la reflexión del profesor de matemáticas acerca de su práctica *Una empresa docente* (pp. 55). Bogotá D.C: Universidad de los Andes.

ANEXOS

<table>
<tr>
<td>Figura 6. Construcción sugerida por E6 y E7</td>
<td>P: ubicaron los puntos.
E6: si, A y B.
E7: y el problema dice que ubicar un punto C que este a la misma distancia de A y B.
E6: o sea, sería…
E7: en la mitad [Visualmente ubican el punto C como el punto medio de A y B]
E6: en el centro.
P: en el centro, bueno… ¿y?
E6: y acá se unen [traza el $\overline{AB}$ que contiene a C]. Y habría…
E7: si se traza una línea…
E6: si se traza una línea recta habría infinitos puntos.
E7: que pasen por el punto del centro.
P: usted me dice infinitos. Muéstreme otro de los infinitos
[E6 traza la perpendicular al $\overline{AB}$ por el punto C]
P: ¿usted por qué traza esa recta?
E6: porque también sería otra vertical. O sea, es igual si se ubicara acá un punto D y un punto F [ubica dos puntos sobre esta recta y luego ubica otros más] igual habría la misma cantidad de puntos.
P: ¿esto es para decir que son infinitos?
E6: sí
P: por ejemplo, ¿este [señala el punto F] está a la misma distancia del punto A y del punto B?
E6: sí, sí estaría.
P: ¿y cómo estarían seguros de eso?
E6: con una medida. Midiendo.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Anexo 1. La propuesta de E6 y E7</td>
</tr>
</table>

La propuesta de E8 y E9

<table>
<tr>
<td>Figura 7. Construcción sugerida por E8 y E9</td>
<td>E8: yo considero que son infinitos. Acá dice que el nuevo punto [C] debe tener la misma distancia de A y de B, ¿cierto?, pero del nuevo punto A y del nuevo punto B [señala que la distancia es relativa a los puntos A y B]. Entonces se pone en el centro [punto medio entre A y B] a cualquier distancia…
P: colócalo. De pronto ellos lo ven mejor así.
[E8 ubica un punto C y con los dedos “verifica” la equidistancia, coloca otros más bajo este argumento]
E9: ah sí.
E8: de para abajo igual.
[E8 finaliza trazando suavemente los segmentos determinados por A, B y los puntos C ubicados con anterioridad]
E9: ¿y uno en la mitad de ellos no se puede?
P: uno en la mitad, ¿no serviría ó si?
E8: si, si me serviría. Tiene la misma distancia</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Anexo 2. La propuesta de E8 y E9</td>
</tr>
</table>

 Figura 8. Construcción sugerida por E10	E10: primero ubicamos el punto A y el punto B. Entonces, según eso, para ubicar el punto C tenía que tener la misma distancia al punto A que al punto B. Como no tenemos medida ni nada, utilizamos el compás para hacer media circunferencia, en la cual, si se toma de aquí [centro en A y radio AB] y luego del punto B al punto A, vamos a encontrar el punto C que se encuentra a la misma distancia del punto A y del punto B. Razón por la cual es donde se van a encontrar las dos circunferencias. P: ¿Qué la garantiza que C esta a la misma distancia de los dos? [puntos A y B]. E10: que, digamos esta el radio. De acá a acá [punto A y B] está el mismo radio pues… [*Con los dedos representa el compás y traza la circunferencia. Sus palabras no son claras*] P: ¿esa no se parece a la definición [de circunferencia]? E10: sí P: puntos que están a la misma distancia… E10: ajá! P: en este caso, ¿la misma distancia de quién? E10: de A y B
Anexo 3. La propuesta de E10	