II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE ii.cemacyc.org

Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos

Héctor Mauricio **Becerra** Galindo
Doctorado en Educación "DIE", Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia - Bogotá
hemabe2@yahoo.es

Resumen

En este artículo se presentarán algunos resultados de la investigación doctoral sobre *las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente*. Este trabajo de investigación surge de las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Centraremos la atención en la dificultad asociada a la falta de conciencia semiótica por parte de los profesores en las representaciones establecidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos. Para abordar esta dificultad, es necesario indagar y describir las problemáticas semióticas de las representaciones de los conjuntos infinitos a partir de los libros de texto, que permita generar en los profesores un cambio en la conciencia semiótica[1] sobre la elección de las representaciones utilizadas en la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, lo que lleva a fortalecer la hipótesis de Duval (1995/1999, p. 15) "*no hay noesis sin semiosis*".

Palabras clave: Conjuntos infinitos, representación semiótica, enseñanza y aprendizaje.

Problema

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos se evidencia dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva; estas dificultades están

[1] Con "conciencia semiótica" queremos indicar el conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática.

asociadas a la dificultad objetiva de los estudiantes frente a le temática del infinito (que constituye un obstáculo epistemológico) y a la temática general de la formación de una correcta noética frente a las representaciones semióticas (paradoja de Duval). Además, se asocian a la concepción errada de algunos profesores de matemáticas con respecto al infinito y a la falta de conciencia semiótica sobre la elección de las representaciones utilizadas por los profesores en la enseñanza de los conjuntos infinitos.

Con respecto a la concepción errada de algunos profesores de matemáticas sobre el infinito y los conjuntos infinitos, en la investigación de Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) se destaca que en el estudio del infinito las dificultades

> *por parte de los estudiantes no se deben solamente a los obstáculos epistemológicos, sino que son reforzadas y ampliadas por obstáculos de tipo didáctico, derivados de los modelos intuitivos* [y de las ideas erróneas] *proporcionados por los docentes a sus estudiantes*. (p. 138);

se enfatiza especialmente que los profesores a menudo no presentan un apropiado concepto del infinito matemático; éste está relacionado a partir de las convicciones de los profesores con el infinito interpretado como: indefinido, número finito grande, ilimitado o proceso potencial.

Con relación a los conjuntos infinitos, Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) establecen que *"primero es necesario convencer a los docentes, de todos los niveles escolares, sobre la validez no absoluta de la noción común euclidiana 'El todo es mayor que sus partes', dado que no es válido para los conjuntos infinitos"* (p. 177), ya que un conjunto que tiene infinitos elementos puede ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio (definición actual), en palabras de Dedekind se define conjunto infinito (basándose en las observaciones de Galileo) como: "*Un sistema S se denomina infinito si es similar a una de sus propias partes; en el caso contrario S se denomina un sistema finito*" (Dedekind, 1982, p. 98).

La convicción[2] sobre la validez absoluta de la "noción común" euclidiana según la cual *"El Todo es mayor que sus partes"* ocurre debido a que el profesor solo ha construido una visión potencial del infinito y no ha construido su visión del infinito actual. Esto es algo que histórica y epistemológicamente ha ocurrido, ya que inicialmente Aristóteles solo acepta la existencia del infinito en potencia y no en acto, prohibiendo el trabajo, investigación y discusión del infinito actual, lo que generó un verdadero dogma durante más de dos mil años y es hasta el siglo XIX con George Cantor quien matematiza el infinito actual.

Aunque los argumentos anteriores son un ejemplo de la gran dificultad que está asociada a la construcción cognitiva del infinito y conjuntos infinitos en los estudiantes y docentes, y ya fueron temas de muchas investigaciones en el pasado, nuestra atención se dirige a la falta de conciencia semiótica sobre las representaciones establecidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos, que se empieza a evidenciar cuando los profesores realizan las siguientes afirmaciones respecto a las representaciones de este objeto matemático:

Inv: […] *¿Tú crees que los elementos que forman el conjunto de los enteros son: más,*

---

[2] En este documento, el termino de convicción se abordará desde las concepciones como es propuesto por Azcárate, García y Moreno (2006), quienes señalan que las concepciones de los docentes consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes, y no desde la creencia, que es el modo de conocimiento propio a la opinión (Duval, 2004). La delimitación de la convicción se desarrolla en la tesis.

menos o el mismo número de los elementos que tiene el conjunto de los naturales?

C: Obviamente son más, están además todos los negativos. […]

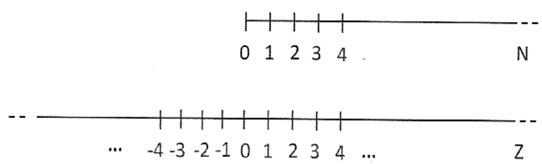
Inv: ¿Cómo representarías estos conjuntos numéricos a tus estudiantes?

C: Los relativos [enteros] los pondría en la recta de los números y los naturales en cambio deben estar en la línea de los números. […]

Inv: ¿Esto lo presentas en clase?

C: Por supuesto que digo que los números negativos siempre deben estar siempre antes de los positivos. (Arrigo, D'Amore & Sbaragli, 2011, p. 209)

Básicamente el profesor está generando estos argumentos desde lo que ve en las representaciones y no desde la coordinación de registros de representaciones semióticas que son necesarias para la conceptualización (Duval, 1993) de los conjuntos infinitos; en este caso lo que ve son las *"siguientes representaciones gráficas habituales que llevan a pensar, tanto a los docentes como a los estudiantes, que el número de enteros es el doble del número de naturales"* [o que el conjunto de los enteros tienen más elementos que el conjunto de los naturales]*:*



. (Arrigo, D'Amore & Sbaragli, 2011, p. 222)

Evidenciemos otro argumento de un profesor al dar respuesta a la pregunta "*¿Cuántos son los números naturales: 0, 1, 2, 3,…? F: Los números naturales son infinitos, ya que un conjunto es infinito si está conformado por infinitos elementos y 0, 1, 2, 3, … son infinitos"* (Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2011, p. 215), argumento que no presenta una construcción cognitiva del objeto conjunto infinito, [3] pero que muestra claramente la interpretación que le está dando a los puntos suspensivos en la representación *0, 1, 2, 3, …* como los infinitos elementos.

En estos ejemplos se muestra en cierta medida la falta de conciencia semiótica que tienen los profesores en la construcción cognitiva y en la enseñanza de los conjuntos infinitos; pero esta no es la única causa; los profesores, para los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos, recurren a los libros de matemáticas como referentes para su planeación y diseño de actividades.

Algunos profesores al desconocer estos conceptos matemáticos (infinito, conjunto infinito) desde la epistemología, la historia y la semiótica, solo los asocian a la transposición didáctica elegida por el autor de los libros de texto (Arrigo, D'Amore & Sbaragli, 2011), por lo tanto, estos objetos matemáticos que son enseñados por el profesor en el aula de clase, no presentan un análisis crítico a nivel epistemológico, histórico y semiótico, para su construcción cognitiva.

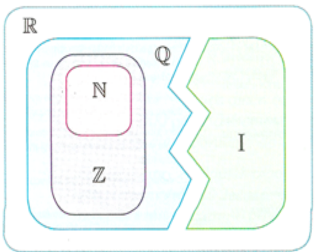
Por ejemplo, para la construcción cognitiva de los números reales se proponen en los libros de textos de secundaria (grados octavo y once) y de universidad las siguientes definiciones:

[3] Actualmente el conjunto infinito se define como: "*Un conjunto S se denomina infinito sí y solo sí se puede poner en correspondencia biunívoca con una de sus partes propias*" (Arrigo, D'Amore & Sbaragli, 2011, p. 97).

Definición libro para grado 8^0

Los números naturales ℕ, los enteros ℤ y los racionales ℚ, conforman, junto con los irracionales 𝕀, el conjunto de los números reales ℝ.

Para entender cómo se relacionan los conjuntos de números mencionados, observemos el siguiente esquema:

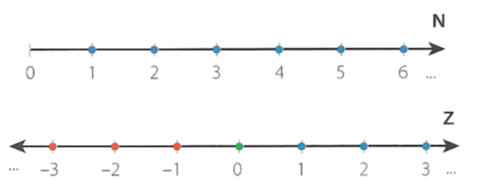


. (Dueñas, Garavito & Lara, 2007, p. 48)

Definición libro para grado 11^0

El conjunto de los números naturales lo representamos con ℕ y está formado por los números que se utilizan para contar es decir, ℕ ={1,2,3,…}. A partir de los números naturales es posible construir los números enteros ℤ agregando el 0 y los negativos de los números naturales. De esta forma obtenemos ℤ ={…,-3, -2, -1, 0, 1,2,3,…}.

Es posible representar estos números en la recta numérica como muestra la figura



Al formar todos los posibles cocientes entre números enteros obtenemos el conjunto ℚ . Entonces $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$. *Los números racionales se caracterizan porque su expresión decimal es finita o infinita periódica. Aquellos números cuya expresión decimal es infinita no periódica forman el conjunto de los números irracionales 𝕀 . Algunos ejemplos importantes de los números irracionales son: π≈3,14159…, e≈2,71828…*

Los números reales son el conjunto formado por la unión de los números racionales y los irracionales… ℝ = ℚ U𝕀 . (Moreno, Roldán & Romero, 2011, p. 12)

Definición libro universitario

El conjunto de los números reales, ℝ.={x | x es un número decimal}, contiene a todos los números racionales, es decir, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*., pero existen números reales que no son racionales, los números decimales que tienen un número infinito de cifras decimales que no se repiten periódicamente (decimales infinitos no periódicos), los cuales han sido llamados números irracionales. Por ejemplo: 5,424424442…,* $\sqrt{2}$*, π son algunos de ellos.*

ℝ.- ℚ ={x | x es decimal infinito no periódico} es el conjunto de los números irracionales. Por lo anterior, cada número real es racional o es irracional, pero no pueden ser ambos a la vez. (Rubio & Dueñas, 2006, p. 4)

En estas definiciones, los autores de los libros usan el término de infinito pero se le deja al profesor, al estudiante o al lector su conceptualización de forma intuitiva. Además, esto se puede evidenciar cuando se presentan la representación de los números naturales y enteros, así: $\mathbb{N}$={1, 2, 3, 4, 5,…}, $\mathbb{Z}$={…, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,…}, y los ejemplos propuestos de los números racionales e irracionales, así: 5,424424442…, $\pi\approx$3,14159…, 0,17….

Desde estas representaciones surgen las siguientes preguntas de reflexión: ¿Qué interpretación tienen los puntos suspensivos para los estudiantes con respecto al infinito? y ¿Cómo representamos el conjunto de los números reales, a parte de la tentativa ingenua de representación propuesta en la definición de Rubio y Dueñas (2006)?.

Con respecto al tema de los conjuntos infinitos, surgen las siguientes preguntas: ¿Qué representación se propone en los libros de texto y en las cátedras de un conjunto infinito?. Más aún, ¿Qué papel tiene la representación semiótica en todo esto?, ¿Cómo se pasa de la semiosis a la noesis? y ¿Cómo se puede interpretar en estas circunstancia la paradoja cognitiva de Duval?

Estas preguntas se asocian especialmente a la falta de conciencia semiótica por parte del profesor sobre las representaciones establecidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos, en donde se puede establecer una falta de análisis crítico sobre los registros de representación semiótica presentados no solo en los textos escolares y universitarios, sino en las prácticas docentes al enseñar los conjuntos infinitos.

A partir de esta problemática que se presenta sobre las representaciones, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo los profesores cambian su convicción sobre la representación semiótica de los conjuntos infinitos a partir de los resultados de entrevistas hechas a estudiantes en las cuales se manifiestan faltas de construcción cognitiva del objeto "conjunto infinito" debido a las elecciones semióticas del profesor mismo?

Objetivo[4]

Indagar y describir las diferentes representaciones semióticas de los conjuntos infinitos a partir de los libros de texto.

Análisis[5]

Para dar respuesta a los anteriores interrogantes asociados a la falta de conciencia semiótica y a la pregunta de investigación, se abordan los elementos semióticos-cognitivos propuestos en la teoría de Duval (1995/1999, 2004, 2006, 2016); estos elementos dependen particularmente del uso de una gran variedad de sistemas semióticos de representación y sus transformaciones para la construcción y comprensión de los objetos matemáticos, ya que los objetos de la matemática no son cosas que son percibidas por los sentidos: nadie los puede ver, tocar, saborear, oír, sentir, pesar, colorear, romper, lo único que podemos hacer con estos *"objetos matemáticos es describirlos, definirlos, denotarlos, denominarlos, diseñarlos etc., es decir dar representaciones semióticas".* (D´Amore, Fandiño & Iori, 2013, p. 125)

Con respecto a estos elementos propuestos por Duval (1995/1999, 2004, 2006, 2016) para

---

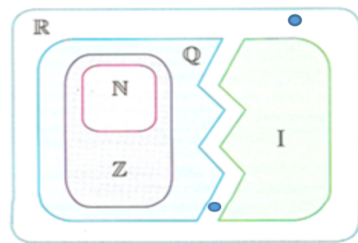
[4] Este objetivo hace parte de un objetivo específico de la tesis doctoral y que refleja los ejemplos y análisis de una parte de la investigación que se propone en este escrito.

[5] En esta ocasión el espacio del escrito es muy limitado para abordar todo el componente metodológico, por lo tanto, los invitamos a leerlo en la tesis.

la entrada semiótica – cognitiva, se presenta un análisis de algunas representaciones que son propuestas en las definiciones de los libros para la construcción de los números reales.

En el libro de grado octavo se define que “*Los números naturales ℕ, los enteros ℤ y los racionales ℚ, conforman, junto con los irracionales 𝕀, el conjunto de los números reales ℝ”*; esta definición se ubica en el registro de la lengua natural, pero los Autores presentan también el esquema 1 que se ubica en una representación auxiliar.[6] Y hay una evidente contradicción entre las dos representaciones semióticas.

En este caso se presenta una transformación de conversión, donde se cambia de registro de la lengua natural a la representación auxiliar; pero en la representación auxiliar se puede observar una evidente contradicción con respecto al registro de la lengua natural, ya que si ubicamos una representación hipotética de dos números (puntos azules) en la representación auxiliar donde está la letra ℝ., se puede establecer que en esos lugares los números no pertenecen a los ℚ, ni a los 𝕀, entonces surge la siguiente pregunta ¿Qué número se representaría en este lugar?; por lo tanto, lo que tenemos en este ejemplo es un problema con la representación auxiliar, la cual no está representando correctamente el objeto matemático de los números reales, en este caso no existe una coordinación de registros (Duval, 1995/1999, 2006, 2016).

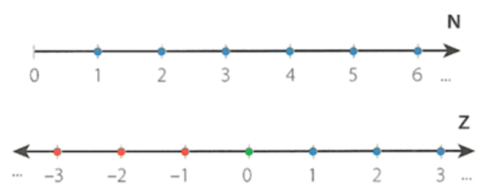


Esquema 1. Representación auxiliar de los ℝ.

En la definición del libro de grado once, se presentan los siguientes registros de representación:

Algebraica: *ℕ ={1,2,3,…} y ℤ ={…,-3, -2, -1, 0, 1,2,3,…},* y

gráfico (la recta de los números naturales y enteros):



En estos dos registros de representación se evidencian las siguientes problemáticas: en los registros de representación algebraica solo se presenta por parte de los autores del libro el orden “natural” de los números naturales y de los números enteros, lo que lleva a profesores y estudiantes a pensar que solo hay estas representaciones posibles y correctas, como lo afirma un profesor “*estos números tienen que ordenarse siempre así”* (Arrigo, D'Amore & Sbaragli, 2011, p. 209).

Esta aceptación por parte de los profesores y estudiantes de una sola representación semiótica del orden que se considera única, con sus problemas de interpretación, deja de lado la representación de otras formas de ordenar los conjuntos de los números naturales, enteros,

[6] Las representaciones auxiliares no dependen del registro semiótico y son utilizadas en matemáticas, como el material manipulativo (el ábaco, las regletas de cuisenaire, bloques lógicos, etc.), los ejemplos, las ilustraciones, las tablas, etc. (Duval, 2004). Los invitamos a leer el trabajo de D’Amore, Fandiño y Iori (2013), donde se ejemplifican estas representaciones.

racionales, irracionales y reales; por ejemplo, el orden del conjunto de los números naturales puede representarse así: *$\mathbb{N}$ ={…5, 4, 0, 1,6,8,…}*, *$\mathbb{N}$ ={0, 3, 7, 2,…}*, etc.; el orden del conjunto de los números enteros se pueden representar así: *$\mathbb{Z}$ ={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, …}, $\mathbb{Z}$ ={0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, …}, $\mathbb{Z}$ ={…,-3, 0, -2, 1,-1, 3, 2,…}, etc.*; en otras palabras, cada conjunto de elementos con n elementos (n>1) tiene más de un orden posible (n!).

Estas formas diversas de representar el conjunto de los números enteros generan una mayor aproximación a la comprensión de los conjuntos infinitos, generando en los profesores argumentaciones desde las construcciones del objeto matemático y no desde lo que se puede ver en la representación, como se confirma en la siguiente indagación

> *Inv: […] ¿Tú crees que los elementos que forman el conjunto de los enteros son: más, menos o el mismo número de los elementos que tiene el conjunto de los naturales?*
>
> *C: Obviamente son más, están además todos los negativos*. (Arrigo, D'Amore & Sbaragli, 2011, p. 209).

En el registro gráfico se presenta por parte de los autores del libro la semirrecta y la recta que representa los $\mathbb{N}$ y los $\mathbb{Z}$, lo que lleva a pensar a profesores y estudiante *"que el número de enteros es el doble del número de naturales"* (Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2011, p. 222), además, esta afirmación se fortalece cuando los profesores y estudiantes observan el registro gráfico y perciben que $\mathbb{N}$ tiene una sola dirección hacia el infinito (positivo), mientras $\mathbb{Z}$ tiene dos direcciones hacia el infinito (positivo y negativo), por lo tanto, $\mathbb{N}$ tiene más números que $\mathbb{Z}$, porque $\mathbb{N}$ tiene un infinito y $\mathbb{Z}$ tiene dos infinitos, argumento que no es válido y evidencia la problemática con este registro de representación.

Aunque existen más problemáticas con los registros de representación propuestos en los libros de texto, solo se centró la atención en los anteriores ejemplos como una introducción a la falta de conciencia semiótica por parte de los profesores en la elección de las representaciones semióticas utilizadas para la enseñanza de los conjuntos infinitos; en la tesis se realiza un análisis de los registros de representaciones propuestas por el profesor en el aula de clase y las propuestas en la historia de las matemáticas.

Conclusiones

Estos problemas que se presentan en las representaciones, aunque hayan sido evidenciados por las investigaciones en didáctica de la matemática, se siguen presentando con profesores que actualmente están en ejercicio y en formación, por lo tanto es muy importante generar un cambio en la conciencia semiótica sobre la elección de las representaciones utilizadas en la enseñanza de los conjuntos infinitos.

Se destaca como elemento importante en la relación con las problemáticas semióticas de la representación semiótica de los conjuntos infinitos, el estudio y análisis crítico que se debe realizar a los registros de representación semiótica en los textos escolares y universitarios, y a las prácticas docentes al enseñar los conjuntos infinitos, ya que: "*la comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento* […] *están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica"* (Duval, 1995/1999, p. 18).

Referencias y bibliografía

Arrigo, G., D´Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti.* Trento: Erickson. [Versión en idioma español: (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotá: Magisterio].

Azcárate, C., García, L., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [RELIME]. 9*(1), 85-116.

D´Amore, B., Fandiño, M., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio.

Dedekind, R. (1982). *Sritti sui fondamenti della matematica*. A cura di Francesco Gana. Nápoles: Bibliopolis. 98-99.

Dueñas, W., Garavito, A, & Lara, G. (2007). *Aciertos matemáticos 8*. Bogotá: Grupo Editorial Educar.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385-414.

Duval, R. (1993). Registres de Répresentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. [Versión en idioma español: 1999, Cali: Universidad del Valle].

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 1-2, 103-131.

Duval, R., & Sáenz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (M. Acosta, P. Perry. Trad.). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Moreno, J., Roldán, D., & Romero, F**.** (2011). *Norma Matemáticas para pensar 11*. Bogotá: Carvajal Educación S.A.S.

Rubio, M., & Dueñas, H. (2006). *Notas de clase Cálculo 1*. Bogotá: Universidad Nacional.